Topology Vol. 3, pp. 409–412, Pergamon Press, 1965. Printed in Great Britain

CLASSIFICATION DES VARIÉTÉS ANALYTIQUES p-ADIQUES COMPACTES

JEAN-PIERRE SERRE

(Received 22 *March* 1964*)*

§1. DÉFINITIONS ET RÉSULTATS

SOIT k un corps localement compact pour la topologie définie par une valuation discrète v. On note A (resp. $\mathfrak{m}$) l'anneau (resp. l'idéal maximal) de cette valuation. Le corps résiduel $k_0 = A/\mathfrak{m}$ est un corps fini; on note q le nombre de ses éléments. Si $a \in k^*$, on note $|a|$ la valeur absolue *normalisée* de a, autrement dit le module de l'automorphisme du groupe additif de k défini par a (cf. BOURBAKI: *Int.*, Chapitre VII, §1, n°10); on sait que $|a| = q^{-v(a)}$. Lorsque $k = \mathbf{Q}_p$, corps des nombres p-adiques, on a $A = \mathbf{Z}_p$, $k_0 = \mathbf{F}_p$, $q = p$.

Si U est un ouvert de k^n, une application $f : U \to k$ est dite analytique si elle est développable en série de Taylor au voisinage de tout point de U. Au moyen de ces fonctions, on définit (par "recollement") la catégorie des *variétés analytiques sur* k (appelées encore variétés analytiques *p-adiques* si $k = \mathbf{Q}_p$). Toutes les notions usuelles de géométrie différentielle se laissent définir sans difficultés pour de telles variétés; on peut parler de leur dimension (au voisinage d'un point), de leur fibré tangent, cotangent, etc.

Soit n un entier $\geqq 1$, fixé une fois pour toutes. Nous nous intéresserons dans ce qui suit aux variétés analytiques X sur k qui vérifient les deux conditions suivantes:

(i) X est un espace topologique *compact non vide.*

(ii) La dimension de X en chacun de ses points est égale à n.

Pour abréger, un tel X sera appelé une *n-variété compacte.* La *boule* A^n en est un exemple. Plus généralement, on peut faire la somme disjointe de r copies ($r \geqq 1$) de A^n; la variété ainsi obtenue sera notée $r.A^n$. Ce procédé fournit *toutes* les n-variétés compactes. On a en effet:

THÉORÈME (1). (a) *Toute n-variété compacte X est isomorphe à $r.A^n$ pour un entier $r \geqq 1$ convenable.*

(b) *Pour que $r.A^n$ et $r'.A^n$ soient isomorphes, il faut et il suffit que* $r \equiv r' \bmod.(q-1)$.

Il s'ensuit que, si l'on attache à X la classe de $r \bmod.(q-1)$, on obtient un élément $i(X) \in \mathbf{Z}/(q-1)\mathbf{Z}$ qui est un *invariant* de X, et il est clair que cet invariant *caractérise* X à isomorphisme près. En particulier:

COROLLAIRE. *Toute n-variété compacte X est isomorphe à une variété et une seule de la forme $r.A^n$, avec $1 \leqq r \leqq q-1$.*

(Noter le cas particulier $q = 2$, dans lequel toutes les n-variétés compactes sont isomorphes.)

On peut donner une définition *analytique* de l'invariant $i(X)$:

Soit $\mathrm{d}x$ la mesure de Haar sur k, normalisée de telle sorte que $\int_A \mathrm{d}x = 1$. Si ω est une forme différentielle de degré n sur la n-variété X, on définit (cf. Weil [3], p. 14–15) la mesure positive $|\omega|$ sur X; rappelons que, si ω s'écrit $f\,\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$ en termes de coordonnées locales, la mesure $|\omega|$ est égale à $|f|\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_n$, la valeur absolue étant la valeur absolue *normalisée*, introduite ci-dessus.

THÉORÈME (2). *Soit X une n-variété compacte.*

(a) *Il existe une forme différentielle analytique ω de degré n qui ne s'annule en aucun point de X.*

(b) *Si ω est une telle forme différentielle, l'intégrale $\int_X |\omega|$ s'écrit sous la forme a/q^b $(a, b \in \mathbf{N})$, et l'on a:*

$$i(X) \equiv a \equiv \int_X |\omega| \qquad \mathrm{mod}.(q-1).$$

(Noter que $a/q^b = a$ dans l'anneau $\mathbf{Z}/(q-1)\,\mathbf{Z}$.)

EXEMPLES. (i) Soit S un schéma lisse sur A (au sens de Grothendieck [1], Chapitre IV), et soit $X = S(A)$ l'ensemble des points de S à valeurs dans A. Supposons que $X \neq \varnothing$, et que le schéma réduit $\bar{S} = S \otimes k_0$ soit de dimension n en tout point. On définit alors sur X, de la façon habituelle, une structure de variété analytique sur k, qui en fait une n-variété compacte. De plus, l'ensemble $\bar{S}(k_0)$ est fini; soit N le nombre de ses éléments, et soit $\pi : X \to \bar{S}(k_0)$ l'application canonique évidente ("réduction modulo $\mathfrak{m}$"). On montre facilement que π est *surjective*, et que ses fibres sont des *boules* (comparer avec Weil [3] Théorème (2.2.5), Chapitre I). Il s'ensuit que *l'invariant $i(X)$ est congru à N* $\mathrm{mod}.(q-1)$.

(ii) Prenons $k = \mathbf{Q}_p$, et soit G un groupe analytique p-adique compact, de dimension n. C'est un groupe profini, et son *ordre* est défini (cf. par exemple [2], p. 1–4); on voit facilement qu'il peut s'écrire $(G) = p^{\infty}.N$, avec $(N, p) = 1$. On définit au moyen de l'exponentielle (ou par tout autre procédé) un sous-groupe ouvert U de G, qui est un pro-p-groupe et qui est isomorphe (comme variété) à une boule A^n; l'indice $(G : U)$ est égal à $p^h N$, avec $h \geqq 0$. En décomposant G en classes à gauche $\mathrm{mod}.\,U$, on voit que $i(G)$ est congru à $p^h N$ $\mathrm{mod}.(p-1)$, d'où finalement $i(G) \equiv N$ $\mathrm{mod}.(p-1)$. *L'invariant de G est donc déterminé par son ordre.*

§2. DÉMONSTRATIONS

LEMME (1) (Bourbaki). *Toute n-variété compacte X est somme disjointe de boules.*

Montrons-le tout d'abord lorsque X est un sous-ensemble *ouvert et fermé* de la boule A^n. Soit $Y = A^n - X$. Comme X et Y sont des ensembles compacts disjoints, leur distance est > 0. On en conclut qu'il existe un exposant $h \geqq 0$ tel que, si $x = (x_i)$, $x' = (x'_i)$ appartiennent à A^n et si $x_i \equiv x'_i \ \mathrm{mod}.\,\mathfrak{m}^h$ pour tout i, les relations $x \in X$ et $x' \in X$ sont équivalentes.

En d'autres termes, X est réunion de classes modulo $\mathfrak{m}^h$. Comme chacune de ces classes est visiblement isomorphe à une boule, le résultat cherché s'ensuit dans le cas considéré.

Dans le cas général, on peut écrire X sous la forme:

$$X = \bigcup X_i \qquad (1 \leqq i \leqq N),$$

où chaque X_i est une sous-variété ouverte compacte de X, isomorphe à la boule A^n. Raisonnons par récurrence sur N, le cas $N = 1$ étant trivial. Soit $X' = \bigcup X_i (1 \leqq i \leqq N-1)$. L'hypothèse de récurrence montre que X' est somme disjointe de boules. D'autre part $X'' = X - X'$ est isomorphe à un ouvert compact de A^n; vu ce qui précède, c'est donc une somme disjointe (éventuellement vide) de boules. Comme X est somme disjointe de X' et de X'', on voit que X est lui aussi somme disjointe de boules.

LEMME (2). *Soient $r, r' \geqq 1$, avec $r \equiv r'$* mod.$(q-1)$. *Les n-variétés $r.A^n$ et $r'.A^n$ sont isomorphes.*

Il suffit de voir que $q.A^n$ est isomorphe à A^n; pour cela on décompose A^n en q boules correspondant aux différentes valeurs de la première coordonnée modulo $\mathfrak{m}$.

LEMME (3). *Soit ω une forme différentielle analytique de degré n sur $X = r.A^n$. On suppose que ω ne s'annule en aucun point de X. On a alors $\int_X |\omega| = a/q^b$, avec $a \equiv r$* mod.$(q-1)$.

Par additivité, on est ramené au cas où $r = 1$, i.e. $X = A^n$; la forme différentielle ω s'écrit alors $f\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$, où f est une fonction analytique de $(x_1, \ldots, x_n)$ ne s'annulant en aucun point de A^n. La mesure $|\omega|$ correspondante est donnée par:

$$|\omega| = |f|\, dx_1 \ldots dx_n.$$

Puisque $|f|$ ne s'annule pas, elle prend des valeurs *discrètes*, et c'est une fonction *localement constante*. Il existe donc un $h \geqq 0$ tel que $|f|$ soit constante sur les classes B_α modulo $\mathfrak{m}^h$ (cf. démonstration du Lemme (1)); soit q^{c_α} la valeur de $|f|$ sur B_α; d'après la définition de la valeur absolue normalisée, c_α est un *entier*. Comme le volume de chaque B_α est $1/q^{nh}$, on obtient:

$$\int_X |\omega| = \sum_\alpha q^{c_\alpha - nh}.$$

Mais chaque $q^{c_\alpha - nh}$ est congru à 1 modulo $(q-1)$; comme le nombre des B_α est q^{nh}, on obtient finalement:

$$\int_X |\omega| \equiv q^{nh} \equiv 1 \qquad \text{mod.}(q-1),$$

ce qui démontre le lemme.

Les Théorèmes (1) et (2) sont maintenant évidents. En effet, l'assertion (a) du Théorème (1) a été démontrée (Lemme (1)); l'assertion (a) du Théorème (2) en résulte (sur toute boule on peut évidemment construire une forme ω qui ne s'annule en aucun point, par exemple $\mathrm{d}x_1 \wedge \ldots \wedge \mathrm{d}x_n$). Si une même variété X est isomorphe à $r.A^n$ et $r'.A^n$, et si ω est une forme différentielle analytique de degré n partout non nulle sur X, le Lemme (3) montre que $r \equiv \int_X |\omega| \equiv r'$ mod.$(q-1)$; inversement, si cette congruence est satisfaite,

$r.A^n$ et $r'.A^n$ sont isomorphes (Lemme (2)). Cela achève de prouver le Théorème (1); quant à la partie (b) du Théorème (2), elle résulte du Lemme (3).

BIBLIOGRAPHIE

1. A. GROTHENDIECK: Eléments de géométrie algébrique (rédigés avec la collaboration de J. DIEUDONNÉ) *Publ. Inst. Hautes Études Sci., Paris* (1965), n° 24.
2. J-P. SERRE: *Cohomologie galoisienne. Lecture Notes in Mathematics*, N° 5, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
3. A. WEIL: *Adeles and algebraic groups* (notes by M. DEMAZURE and T. ONO). Inst. for Advanced Study, Princeton, 1961.

Paris