Бързо Пресмятане на Симетрични и Хипергеометрични Функции на Много Променливи

Пламен Коев
Факултет по Математика
Масачузетски Технологичен Институт

Българска Академия на Науките, 15 Юли 2005г.

Цел: Пресмятане на разпределения свързани със случайни матрици

- Обект на изледване: Случайни матрици на Уишърт **(Wishart)**

  Пример: реални $\boldsymbol{n \times n}$ със $\boldsymbol{l}$ степени на свобода:

  $$\boldsymbol{A \equiv B^T \Sigma B}, \quad \text{където}$$

  $$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N(0,1)} & \boldsymbol{N(0,1)} & \dots & \boldsymbol{N(0,1)} \\ \boldsymbol{N(0,1)} & \boldsymbol{N(0,1)} & \dots & \boldsymbol{N(0,1)} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \boldsymbol{N(0,1)} & \boldsymbol{N(0,1)} & \dots & \boldsymbol{N(0,1)} \end{bmatrix} \qquad (\boldsymbol{l \times n})$$

  $$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{s_1} & & & \\ & \boldsymbol{s_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & \boldsymbol{s_n} \end{bmatrix} \qquad \text{(Ковариационна матрица)}$$

- Търсим разпределението на:
  - $\boldsymbol{\lambda_{\max}, \lambda_{\min}}$
  - Следа, детерминанта, моменти

Приложения

- Теория на случайните матрици
- Статистически анализ на много променливи
- Телекомуникации
- Военни цели: Автоматична класификация на цели

Формули съществуват от 1964г. (Джеимс)

$$P(\boldsymbol{\lambda}_{\max}(\boldsymbol{A}) < \boldsymbol{x}) = \frac{\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{n}}\left(\frac{\boldsymbol{n}+1}{2}\right)}{\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{n}}\left(\frac{\boldsymbol{l}+\boldsymbol{n}+1}{2}\right)} \cdot \det\left(\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)^{\boldsymbol{l}/2} \cdot {}_1\boldsymbol{F}_1\left(\tfrac{\boldsymbol{l}}{2}; \tfrac{\boldsymbol{n}+\boldsymbol{l}+1}{2}; -\tfrac{1}{2}\boldsymbol{x}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\right)$$

- Синьо = лесно:
  - $\boldsymbol{\Gamma}_{\boldsymbol{n}}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\pi}^{\frac{\beta m(m-1)}{4}} \prod_{\boldsymbol{i}=1}^{\boldsymbol{n}} \boldsymbol{\Gamma}(\boldsymbol{x} + \frac{\beta}{2}(\boldsymbol{i}-1))$ ($\boldsymbol{\Gamma}$ фукнция на много променливи)
  - Детерминанта на матрица
- Червено = трудоемко:
  - Хипергеометрична функция на много променливи
- Невъзможно за пресмятане на практика до сега:
  - Гутиерес, Родригес и Саес – 2000г. ($\boldsymbol{n} = \boldsymbol{5}$): 8 седмици

Формули съществуват от 1964г. (Джеимс)

$$\boldsymbol{P(\lambda_{\max}(A) < x) = \frac{\Gamma_n\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma_n\left(\frac{l+n+1}{2}\right)} \cdot \det\left(\frac{1}{2}x\Sigma^{-1}\right)^{l/2} \cdot {}_1F_1\left(\frac{l}{2}; \frac{n+l+1}{2}; -\frac{1}{2}x\Sigma^{-1}\right)}$$

- Синьо = лесно:
  - $\boldsymbol{\Gamma_n(x) = \pi^{\frac{\beta m(m-1)}{4}} \prod_{i=1}^{n} \Gamma(x + \frac{\beta}{2}(i-1))}$ ($\boldsymbol{\Gamma}$ фукнция на много променливи)
  - Детерминанта на матрица
- Червено = трудоемко:
  - Хипергеометрична функция на много променливи
- Невъзможно за пресмятане на практика до сега:
  - Гутиерес, Родригес и Саес – 2000г. ($\boldsymbol{n = 5}$): 8 седмици
  - Нов алгоритъм: $\boldsymbol{\frac{1}{100}}$ секунда

Хипергеометрична функция на много променливи

$$ {}_pF_q(a_1,\ldots,a_p;b_1,\ldots,b_q;X) \equiv \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{\kappa\vdash k}\frac{(a_1)_\kappa\cdots(a_p)_\kappa}{k!(b_1)_\kappa\cdots(b_q)_\kappa}\cdot C_\kappa(X) $$

- Понякога се нарича ,,С матричен аргумент X"
- Зависи само от собствените стойности на X
- Много бавна сходимост – проблем дори и при една променлива
  $\Rightarrow \infty = m = 20, 40, 60, \ldots$
- $\kappa \vdash k$ означава κ е разбиване на k (следващата страница)
- $(a)_\kappa \equiv \prod_{(i,j)\in\kappa}\left(a - \frac{i-1}{\alpha} + j - 1\right)$ — Символ на Покамер (лесно)
  $\Rightarrow$ ${}_pF_q$ и ${}_1F_1$ са еднакво сложни за пресмятане
- $C_\kappa(X)$—Обобщен полином на Шур
  Също известен като Зонален Полином или Полином на Джак
  —Най сложната част на пресмятането: $O(n^m)$ операции!
- Нашият принос: $O(n)$

Разбивания

$$\boldsymbol{\kappa} = (\boldsymbol{\kappa_1}, \boldsymbol{\kappa_2}, \ldots) \vdash \boldsymbol{k}$$

означава

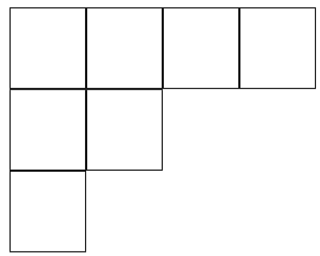
$$\boldsymbol{k} = \boldsymbol{\kappa_1} + \boldsymbol{\kappa_2} + \ldots \quad \text{и} \quad \boldsymbol{\kappa_1} \geq \boldsymbol{\kappa_2} \geq \ldots$$

Например:

$$\begin{aligned}
\mathbf{1} &= \mathbf{1} \\
\mathbf{2} &= \mathbf{2} \\
&= \mathbf{1} + \mathbf{1} \\
\mathbf{3} &= \mathbf{3} \\
&= \mathbf{2} + \mathbf{1} \\
&= \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} \\
\mathbf{4} &= \mathbf{4} \\
&= \mathbf{3} + \mathbf{1} \\
&= \mathbf{2} + \mathbf{2} \\
&= \mathbf{2} + \mathbf{1} + \mathbf{1} \\
&= \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1} + \mathbf{1}
\end{aligned}$$

Разбиванията и диаграми на Юнг

Разбиването $\mathbf{7} \vdash (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ се преставя чрез следната диаграма на Юнг



Полиноми на Шур

- Появяват се в теория на представянията, комбинаторика и т.н.
- Симетрични функции
- Описват характерите на $\boldsymbol{GL_n}$
- Елементарни примери:

$$\boldsymbol{e_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1<i_2<\cdots<i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}$$
$$\boldsymbol{h_k(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i_1\leq i_2\leq\cdots\leq i_k} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k}}$$

- Общ случай: Сумиране по всички полустандартни таблици на Юнг

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{2} & \mathbf{3} \\ \hline \mathbf{3} & \mathbf{4} \\ \cline{1-2} \mathbf{5} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

$$\downarrow$$

$$\boldsymbol{x_1^2 x_2 x_3^2 x_4 x_5}$$

Пресмятане на обобщения полином на Шур

- Зависи само собствените стойности $\boldsymbol{x_1, x_2, \ldots, x_n}$ на $\boldsymbol{X}$
- Илюстрираме само случая $\boldsymbol{\beta = 2}$ (комплексни матрици на Уишърт; стандартни полиноми на Шур); общият случай е аналогичен

Разбиване $\boldsymbol{\kappa}$	$\boldsymbol{C_\kappa}$	Брой членове
$\mathbf{(1)}$	$\boldsymbol{x_1 + \cdots + x_n}$	$\boldsymbol{O(n)}$
$\mathbf{(2)}$	$\boldsymbol{\sum_{i \le j} x_i x_j}$	$\boldsymbol{O(n^{2})}$
$\mathbf{(1,1,1)}$	$\boldsymbol{\sum_{i<j<k} x_i x_j x_k}$	$\boldsymbol{O(n^{3})}$
$\boldsymbol{\kappa}$	$\boldsymbol{\sum_T x^T}$	$\boldsymbol{O\left(n^{\lvert\kappa\rvert}\right)}$

сумирането е по всички полустандартни таблици на Юнг

Идеи при ефективни пресмятания

Колко аритметични операции са необходими за да се пресметне

$$\boldsymbol{f(x) = x^{16}?}$$

- **15 :** $\underbrace{x.x\dots x}_{16}$
- **4 :** $(((x^2)^2)^2)^2$
- $\boldsymbol{O(1)}$ **:** $e^{16\ln x}$

Пресмятане на обобщения полином на Шур

Идея: Само да се обнови стойността на $C_\kappa(X)$ използвайки $C_\lambda(X)$, $\lambda < \kappa$ пресметнати по-напред в реда

$$\begin{aligned} C_{(1,1)}(X) &= \sum_{i<j} x_i x_j \\ &= x_1x_2 + (x_1+x_2)x_3 + \cdots + (x_1+\cdots+x_{n-1})x_n \end{aligned}$$

Алгоритъм:

$$\begin{aligned} s_1 &= x_1 & & \\ s_2 &= s_1 + x_2 & &(= x_1 + x_2) \\ s_3 &= s_2 + x_3 & &(= x_1 + x_2 + x_3) \\ &\vdots & & \\ s_{n-1} &= s_{n-2} + x_{n-1} & &(= x_1 + x_2 + \cdots + x_{n-1}) \end{aligned}$$

$$C_{(1,1)}(X) = s_1x_2 + s_2x_3 + \cdots + s_{n-1}x_n$$

- $O(n)$ операции вместо $O(n^2)$

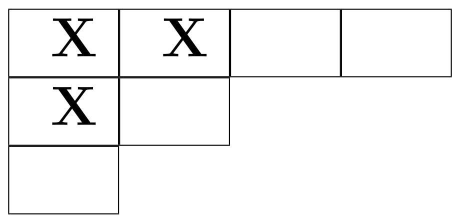
Пресмятане на обобщения полином на Шур

Общ случай:

$$\boldsymbol{C_\kappa(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{\mu \leq \kappa} C_\mu(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \cdot x_n^{|\kappa|-|\mu|} \cdot f_{\kappa\mu}(\beta)}$$

- Сумирането е по всички разбивания $\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\kappa}$, такива че $\boldsymbol{\kappa/\mu}$ е ,,хоризонтална лента”, т.е.

$$\boldsymbol{\mu_1 \geq \kappa_2; \quad \mu_2 \geq \kappa_3; \quad \mu_3 \geq \kappa_4 \ldots}$$



- $\boldsymbol{f_{\kappa\mu}(\beta)}$ е рационална функция на $\boldsymbol{\beta}$
- $\boldsymbol{O(n)}$ операции вместо $\boldsymbol{O(n^{|\kappa|})}$

Запаметяване на вече пресметнати стойности на $C_{\boldsymbol{\kappa}}$

- Цел: Лесно намиране и използване на готово
- Идея: Номериране на всички разбивания $|\boldsymbol{\kappa}| \le \boldsymbol{m}$
- Отговор: Линеаризация на $\boldsymbol{m}$-дърво
- Разбиването $\boldsymbol{\kappa} = (\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \ldots, \boldsymbol{\kappa}_p), \quad |\boldsymbol{\kappa}| \le \boldsymbol{m}$ има най-много $\boldsymbol{m}$ деца

  $(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \ldots, \boldsymbol{\kappa}_p)$

  $(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \ldots, \boldsymbol{\kappa}_p, 1)$

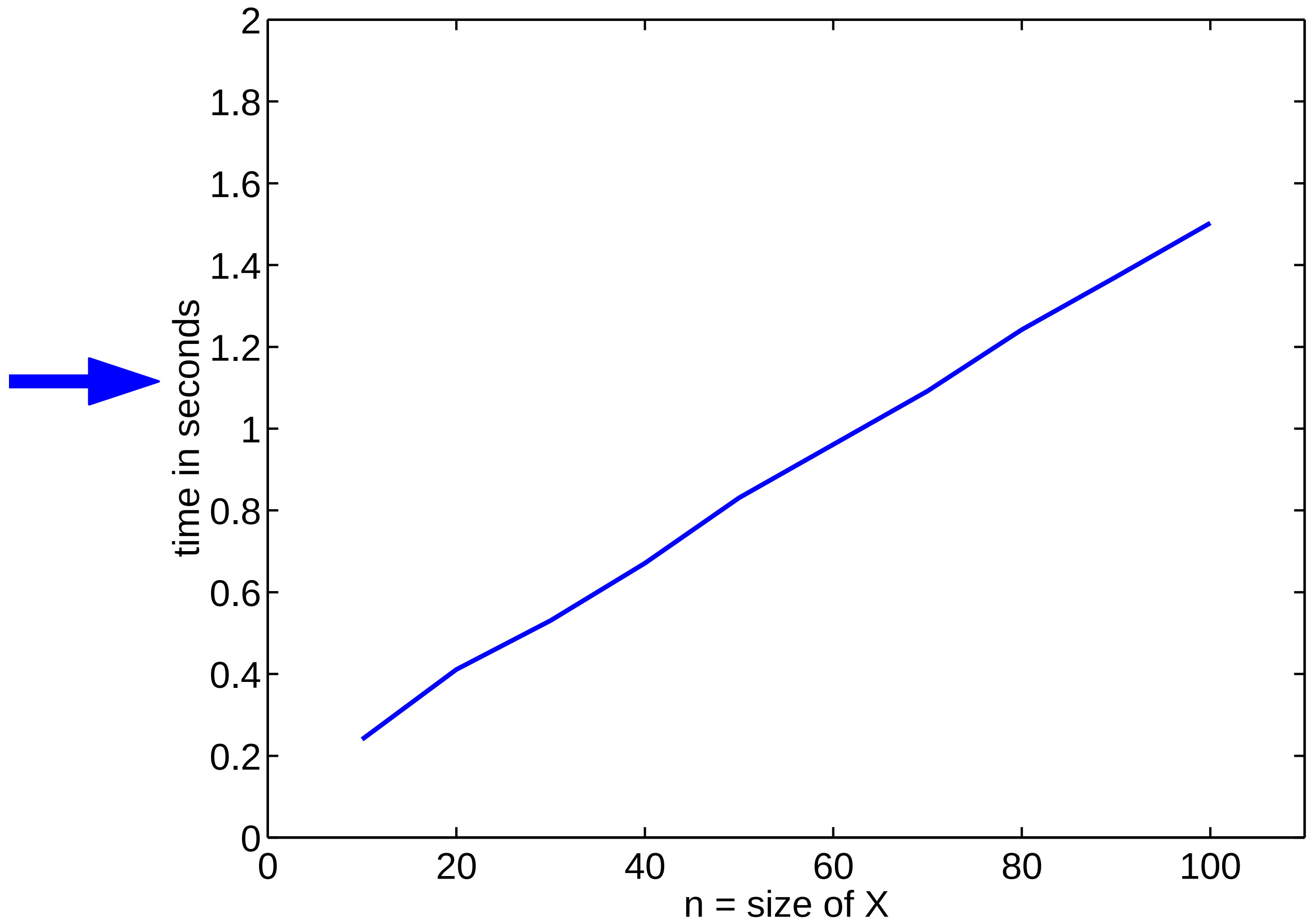
  $\ldots$

  $(\boldsymbol{\kappa}_1, \boldsymbol{\kappa}_2, \ldots, \boldsymbol{\kappa}_p, \boldsymbol{\kappa}_p)$

  Пример: Разбивания $|\boldsymbol{\kappa}| \le \mathbf{6}$:

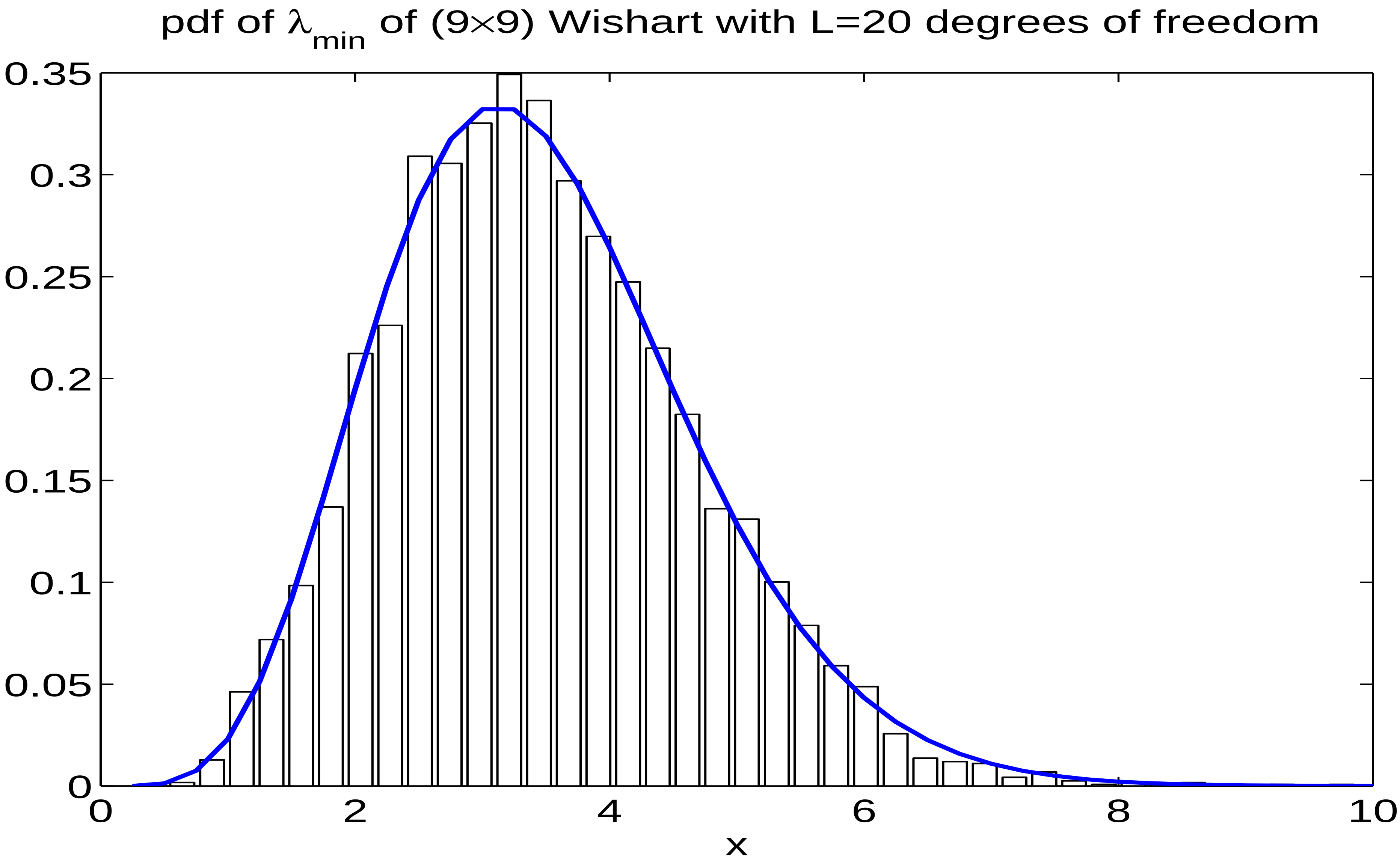
(1)	**(2)**	**(3)**	**(4)**	**(5)**	**(6)**
(1,1)	**(2,1), (2,2)**	**(3,1), (3,2), (3,3)**	**(4,1), (4,2)**	**(5,1)**	
$\ldots$					

Бързина



- Редът е прекратен на $\boldsymbol{m = 25}$
- Линейна сложност по $\boldsymbol{n =}$**size**$\boldsymbol{(X)}$
- **ANSI C MEX** функция в **MATLAB**

Пример



pdf of λ_{min} of (9×9) Wishart with L=20 degrees of freedom
0.35
0.3
0.25
0.2
0.15
0.1
0.05
0
0
2
4
6
8
10
x

Разпределения които можем да пресмятаме сега

Разпределение	Уишърт, произволна $\boldsymbol{\Sigma}$	$\boldsymbol{\beta}$-Лагер, $\boldsymbol{\Sigma = E}$
$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{min}}$	✓	✓
$\boldsymbol{\lambda}_{\mathbf{max}}$	✓	✓
trace	✓	✓
$\mathbf{E}(\mathbf{det}^{\boldsymbol{k}})$	✓	✓

Заключения

- Нов бърз за ${}_p\boldsymbol{F}_{\boldsymbol{q}}$: секунди вместо седмици
- Разрешава 40 годишен проблем
- Бъдеща работа (Дренски, Еделман и Коев)

  Алгоритъм ала бърза трансформация на Фурие:

$$\text{Нов брой операции} = \boldsymbol{O}(\sqrt{\text{Сегашен брой операции}})$$

- **MATLAB** софтуер, статия, този доклад**:**

  `http://math.mit.edu/~plamen` = **GOOGLE(Plamen Koev)**