

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

NORBERT ROBY

**Sur l'algèbre des puissances divisées d'un module et le module de ses différentielles**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 83, n° 2 (1966), p. 75-89

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1966\\_3\\_83\\_2\\_75\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1966_3_83_2_75_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

# SUR L'ALGÈBRE DES PUISSANCES DIVISÉES D'UN MODULE ET LE MODULE DE SES DIFFÉRENTIELLES

PAR M. NORBERT ROBY.



On désigne par  $A$  un anneau commutatif unitaire. Par *module* nous entendons un  $A$ -*module unitaire*. Par *algèbre*, nous entendons une  $A$ -*algèbre associative et commutative*. Une algèbre n'a pas nécessairement d'élément unité; si elle en a un, elle est dite unitaire. Un *homomorphisme d'algèbres*  $\varphi : R \rightarrow S$  est un homomorphisme de modules qui respecte la multiplication. Si  $R$  et  $S$  sont unitaires et si  $\varphi(1) = 1$ , on dit que  $\varphi$  est *unitaire*.

Tous les produits tensoriels considérés sont pris sur l'anneau  $A$ .

En algèbre commutative, la distinction entre « module à droite » et « module à gauche » est en principe sans objet. Ici, toutefois, nous considérerons des modules  $P$  où, pour noter le produit d'un élément  $x \in P$  par un scalaire  $\lambda \in A$ , nous aurons à utiliser soit la notation  $\lambda x$ , soit la notation  $x\lambda$ . Dans le premier cas (resp. le second), nous dirons que  $P$  est un module à gauche (resp. à droite); cette distinction tient donc avant tout à une convention d'écriture. En principe, tous les modules sont considérés comme modules à gauche. Mais il arrivera que, pour un même groupe abélien  $P$ , on ait à considérer deux structures de  $A$ -modules, l'une notée à gauche et l'autre notée à droite. Si l'on a, en outre,  $(\lambda x)\mu = \lambda(x\mu)$ , on dira que  $P$  est un *bimodule*. Le module à gauche (resp. à droite) sous-jacent au bimodule  $P$  sera noté  $P^g$  (resp.  $P^d$ ).

## I. — Les bimodules $M_{p^b}$ .

1. LE BIMODULE  $A_{p^b}$ . — Soit  $p$  un nombre premier  $\geq 2$ . L'idéal principal engendré par  $p \cdot 1$  dans  $A$  est noté  $(p)$ . On pose

$$A/(p) = A_p.$$

Nous n'utiliserons pas la structure d'anneau quotient de  $A_p$ ; par contre, nous utiliserons sa structure de  $A$ -module quotient, que nous notons à gauche.

Pour tout entier  $h \geq 1$ , nous désignerons par  $A_{p^h}$  la donnée du groupe additif  $A_p$  et des deux applications

$$\Lambda \times A_p \rightarrow A_p \quad \text{et} \quad A_p \times \Lambda \rightarrow A_p$$

définies respectivement par

$$(\lambda, \alpha) \rightarrow \lambda \alpha \quad \text{et} \quad (\alpha, \mu) \rightarrow \mu^{p^h} \alpha \quad (\text{que nous notons } \alpha \mu).$$

La première de ces applications confère à  $A_p$  une structure de module à gauche, qui n'est rien d'autre que sa structure de module quotient. La seconde confère à  $A_p$  une structure de module à droite; la seule chose non tout à fait triviale à vérifier est

$$x(\mu + \mu') = x\mu + x\mu',$$

et cela résulte de la relation dans  $A$ ,

$$(\mu + \mu')^{p^h} \equiv \mu^{p^h} + \mu'^{p^h} \pmod{p}.$$

On vérifie aussi que  $\lambda(x\mu) = (\lambda x)\mu$ . Ainsi, nous venons de définir un bimodule noté  $A_{p^h}$ , avec  $A_{p^0}^s = A_p$ .

De la relation  $\lambda(x\mu) = (\lambda x)\mu$  il résulte que l'homothétie de rapport  $\lambda$  dans  $A_{p^h}^s$  est un endomorphisme de  $A_{p^h}^d$ , que nous notons  $\hat{\lambda}$ .

2. LES BIMODULES  $M_{p^h}$ . — Soit, à présent, un module  $M$ . Nous formons le produit tensoriel

$$M_{p^h}' = A_{p^h}' \otimes M$$

que nous considérons comme *module à droite*.

Pour  $\alpha \in A_p$  et  $x \in M$ , nous notons  $\alpha \otimes_{p^h} x$  l'élément  $\alpha \otimes x$  de  $M_{p^h}'$ , où  $\alpha$  est considéré comme appartenant à  $A_{p^h}'$ .

On fait maintenant opérer  $A$  à gauche sur le groupe abélien  $M_{p^h}$  sous-jacent à  $M_{p^h}'$ , de la manière suivante : la multiplication à gauche par  $\lambda$  est l'endomorphisme de  $M_{p^h}'$  égal à  $\hat{\lambda} \otimes \varepsilon_M$ , où  $\varepsilon_M$  est l'application identique de  $M$ . On vérifie que cette loi externe fait de  $M_{p^h}'$  un *module à gauche*, que nous notons  $M_{p^h}^s$ . Enfin, ces deux structures de modules sur  $M_{p^h}$  en font un bimodule. Les deux lois externes du bimodule  $M_{p^h}$  sont explicitées par les formules suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall \lambda \in A, \quad \alpha \in A_p, \quad x \in M : \\ \lambda \left( \alpha \otimes_{p^h} x \right) = (\lambda \alpha) \otimes_{p^h} x, \\ \left( \alpha \otimes_{p^h} x \right) \lambda = \alpha \otimes_{p^h} (\lambda x) = (\alpha \lambda) \otimes_{p^h} x = (\lambda^{p^h} \alpha) \otimes_{p^h} x = \lambda^{p^h} \left( \alpha \otimes_{p^h} x \right). \end{array} \right.$$

*Remarques.* — 1° Si  $M = A$ , le bimodule  $M_{p^h}$  s'identifie au bimodule  $A_{p^h}$  défini auparavant (notations cohérentes).

2° Si  $A = \mathbf{Z}$ , on a  $\mathbf{Z}_{p^h}^{\#} = \mathbf{Z}_{p^h}' = \mathbf{F}_p$  (corps à  $p$  éléments), car dans  $\mathbf{Z}$  on a la relation  $\lambda^{p^h} \equiv \lambda(p)$ . On en déduit que, pour tout  $h$  :

$$M_{p^h}^{\#} = M_{p^h}' = M \otimes \mathbf{F}_p = M/pM.$$

3° Si  $A$  contient un sous-corps de caractéristique  $o$ , on a  $A_p = o$ , car  $(p) = A$ . Il en résulte que  $M_{p^h} = o$ .

4° Si  $A$  contient un sous-corps de caractéristique  $q \geq 2$ , on a

$$(p) = \begin{cases} A & \text{si } p \neq q \\ o & \text{si } p = q \end{cases} \text{ donc } A_p = \begin{cases} o & \text{si } p \neq q, \\ A & \text{si } p = q. \end{cases}$$

Il en résulte que  $M_{p^h} = o$  si  $p \neq q$ .

Supposons en outre que  $A = \mathbf{F}_q$ . Alors, les multiplications externes à droite et à gauche coïncident toujours, en vertu de la relation  $\lambda^{q^h} = \lambda$  dans  $\mathbf{F}_q$ . On a donc

$$M_{q^h}^{\#} = M_{q^h}' = A \otimes M = M.$$

## II. — Le résidu de $\Gamma_+(M)$ .

3. LE RÉSIDU D'UNE ALGÈBRE. — Soit  $R$  une algèbre. La loi multiplicative de  $R$  étant bilinéaire, il existe une application linéaire  $\mu: R \otimes R \rightarrow R$ , avec  $\mu(r \otimes s) = rs$ .

On appelle *résidu* de  $R$  le conoyau de  $\mu$ . Le résidu de  $R$  est donc le module quotient de  $R$  par le sous-module  $I$  engendré par les produits deux à deux d'éléments de  $R$ .

On peut noter que  $I$  est aussi un idéal de  $R$ ; mais la multiplication induite sur le résidu par passage au quotient est tout à fait inintéressante, car avec cette structure le produit de deux éléments est toujours nul.

4. LE RÉSIDU DE  $\Gamma_+(M)$ . — Soit  $M$  un module. Nous introduisons l'algèbre  $\Gamma(M)$  des puissances divisées du module  $M$  (cf. [2], essentiellement chap. III).

Nous désignons par  $G(M)$  le résidu de l'idéal  $\Gamma_+(M)$  et par  $\varphi: \Gamma_+(M) \rightarrow G(M)$  l'application canonique. Nous allons expliciter la structure du module  $G(M)$ .

Soit  $I$  le noyau de  $\varphi$ ; c'est l'idéal de  $\Gamma_+(M)$  engendré par les produits  $x^{(n)} y^{(m)}$  ( $x, y \in M$ ;  $n, m \geq 1$ ). Comme ces éléments sont homogènes,  $I$  est un sous-module homogène de l'algèbre graduée  $\Gamma_+(M) = \bigoplus_{n \geq 1} \Gamma_n(M)$ . Si l'on pose

$$I_n = I \cap \Gamma_n(M) \quad \text{et} \quad G_n(M) = \Gamma_n(M)/I_n,$$

on a donc une graduation du module  $G(M)$  sous la forme

$$G(M) = \bigoplus_{n \geq 1} G_n(M).$$

THÉORÈME 1. — On a

$$\left\{ \begin{array}{l} G_1(M) \simeq M; \\ \text{Pour } n \geq 2 : \\ G_n(M) = 0 \quad \text{si } n \text{ n'est pas une puissance de nombre premier;} \\ G_n(M) \simeq M_{\neq p}^{h_k} \quad \text{si } n = p^h \quad (p, \text{ nombre premier}). \end{array} \right.$$

1° Pour  $n = 1$  :

Le produit de deux éléments de  $\Gamma_+(M)$  a toutes ses composantes homogènes de degrés  $\geq 2$ , de sorte que  $I_1 = 0$ . Comme  $\Gamma_1(M) \simeq M$ , on a bien  $G_1(M) \simeq M$ .

Si l'on identifie, comme d'habitude,  $M$  à  $\Gamma_1(M)$ , on pourra donc écrire

$$G_1(M) = M$$

à condition de poser  $\varphi(x) = x$  pour  $x \in M$ .

2° Pour  $n \geq 2$ , non puissance de nombre premier :

Il suffit de montrer que  $\Gamma_n(M) \subset I_n$ .

Un élément de  $\Gamma_n(M)$  est une combinaison linéaire d'éléments  $u$  de la forme  $x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p} (k_1 + \dots + k_p = n, k_i \geq 1)$ . Si  $p \geq 2$ , on a  $u \in I_n$ . Il suffit donc de montrer encore que, pour tout  $x \in M$ , on a  $x^{[n]} \in I_n$ .

Or,  $I_n$  contient tous les produits  $x^{[r]} x^{[s]} = ((r, s)) x^{[n]}$ , avec  $r \geq 1, s \geq 1, r + s = n$  et  $((r, s)) = (r + s) ! / r ! s !$ ; il contient donc aussi l'élément  $d_n x^{[n]}$ , où  $d_n$  est le p. g. c. d. des nombres  $((r, s))$  précédents. Mais il est connu que, si  $n$  n'est pas une puissance de nombre premier,  $d_n$  est égal à 1. Donc  $x^{[n]} \in I_n$ , C. Q. F. D.

3° Pour  $n = p^h$  ( $p$  premier  $\geq 2, h \geq 1$ ) :

Il est connu qu'alors  $d_n = p$ . Par un raisonnement analogue à celui du 2° on peut donc déjà affirmer que :

- $G_n(M)$  est linéairement engendré par les  $\varphi(x^{[n]})$ ;
- $\varphi(px^{[n]}) = p\varphi(x^{[n]}) = 0$ ; autrement dit : tout élément de  $G_n(M)$  est annulé par  $p$ .

Il en résulte qu'on peut équiper  $G_n(M)$  en module à droite, la multiplication à droite par  $\lambda$  étant la multiplication à gauche par  $\lambda^n$ . Ce module à droite sera noté  $G_n''(M)$ , tandis que pour la structure initiale de module à gauche on gardera la notation  $G_n(M)$ .

Pour  $\lambda \in A$ , désignons par  $\bar{\lambda}$  sa classe modulo  $(p)$ .

Considérons l'application

$$\varphi: A_{p^h}^d \times M \rightarrow G_n^d(M)$$

définie par

$$\varphi(\bar{\lambda}, x) = \lambda \rho(x^{[n]}).$$

Cette définition a un sens, car  $\lambda \rho(x^{[n]})$  ne dépend que de la classe de  $\lambda$  modulo  $(p)$ .

•  $\varphi$  est linéaire en  $x$ , car :

$$\begin{aligned} -: \varphi(\bar{\lambda}, x + y) &= \lambda \rho((x + y)^{[n]}) = \sum_{r+s=n} \lambda \rho(x^{[r]} y^{[s]}) \\ &= \lambda \rho(x^{[n]}) + \lambda \rho(y^{[n]}) \quad (\text{car } \rho \text{ annule } x^{[r]} y^{[s]} \text{ si } r \text{ et } s \geq 1) \end{aligned}$$

$$= \varphi(\bar{\lambda}, x) + \varphi(\bar{\lambda}, y);$$

$$-: \varphi(\bar{\lambda}, \mu x) = \lambda \rho(\mu^n x^{[n]}) = \lambda \mu^n \rho(x^{[n]}) = \lambda \rho(x^{[n]}) \mu = \varphi(\bar{\lambda}, x) \mu.$$

•  $\varphi$  est linéaire en  $\bar{\lambda}$ , car :

$$-: \varphi(\bar{\lambda} + \bar{\mu}, x) = (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) \rho(x^{[n]}) = \varphi(\bar{\lambda}, x) + \varphi(\bar{\mu}, x);$$

$$\begin{aligned} -: \varphi(\bar{\lambda} \mu, x) &= \varphi(\mu^n \bar{\lambda}, x) = \varphi(\overline{\mu^n \bar{\lambda}}, x) = \mu^n \lambda \rho(x^{[n]}), \\ &= \lambda \rho(x^{[n]}) \mu = \varphi(\bar{\lambda}, x) \mu. \end{aligned}$$

Il en résulte une application linéaire

$$u: M_{p^h}^d = A_{p^h}^d \otimes M \rightarrow G_n^d(M)$$

telle que

$$u(\bar{\lambda} \otimes_n x) = \lambda \rho(x^{[n]}).$$

Mais on vérifie aussi que  $u$  est linéaire à gauche :

$$u[\mu(\bar{\lambda} \otimes_n x)] = u[(\mu \bar{\lambda}) \otimes_n x] = u[(\overline{\mu \bar{\lambda}}) \otimes_n x] = \mu \lambda \rho(x^{[n]}) = \mu u(\bar{\lambda} \otimes_n x).$$

Autrement dit,  $u$  est une application linéaire de  $M_{p^h}^s$  dans  $G_n(M)$ .

Nous allons maintenant fabriquer une application en sens inverse.

Soit  $R$  une algèbre unitaire quelconque. Formons le module à gauche :

$$T^s = M_{p^h}^s \otimes R.$$

Comme tous les éléments de  $M_{p^h}$  sont annihilés par  $p$ , il en est de même de ceux de  $T^s$ . On peut donc définir sur  $T^s$  une loi externe à droite, la multiplication à droite par  $\lambda$  étant la multiplication à gauche par  $\lambda^n$ . On obtient ainsi un module à droite  $T^d$ .

Considérons l'application

$$\psi: M \times R \rightarrow T^d.$$

définie par

$$\psi(x, r) = (\bar{1} \otimes_n x) \otimes r^n.$$

•  $\psi$  est linéaire en  $x$  :

— : additivité évidente ;

$$- : \psi(\lambda x, r) = (\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} \lambda x) \otimes r^n = \lambda^n (\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x) \otimes r^n = \psi(x, r) \lambda.$$

•  $\psi$  est linéaire en  $r$  :

$$- : \psi(x, r + r') = (\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x) \otimes (r + r')^n = (\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x) \otimes r^n + (\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x) \otimes r'^n \\ = \psi(x, r) + \psi(x, r')$$

on a utilisé le fait que  $(r + r')^n = r^n + r'^n +$  multiple de  $p$  ;

$$- : \psi(x, \lambda r) = \lambda^n \psi(x, r) = \psi(x, r) \lambda.$$

Il en résulte une application linéaire

$$F_R: M \otimes R \rightarrow T^d$$

telle que

$$F_R(x \otimes r) = (\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x) \otimes r^n.$$

Plus généralement :

$$F_R(x_1 \otimes r_1 + \dots + x_q \otimes r_q) = \sum_{k=1}^q (\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x_k) \otimes r_k^n.$$

Si l'on considère  $F_R$  comme une application de  $M \otimes R$  dans  $T^g = M_{\rho^g}^g \otimes R$ ,  $F_R$  n'est plus linéaire. Cependant, si  $\Theta: R \rightarrow R'$  est un homomorphisme unitaire d'algèbres, il est clair que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc} M \otimes R & \xrightarrow{F_R} & M_{\rho^g}^g \otimes R \\ \varepsilon_M \otimes \Theta \downarrow & & \downarrow \varepsilon_N \otimes \Theta \quad (N = M_{\rho^g}^g) \\ M \otimes R' & \xrightarrow{F_{R'}} & M_{\rho^g}^g \otimes R' \end{array}$$

Autrement dit, les  $F_R$  constituent une *loi polynome*  $F$  sur le couple  $(M, M_{\rho^g}^g)$  (cf. [2], p. 219). Il est clair que  $F$  est homogène de degré  $n$  ([2], p. 226). D'après ([2], th. IV-1, p. 266), il existe une application linéaire  $\varphi: \Gamma_n(M) \rightarrow M_{\rho^g}^g$  telle qu'on ait

$$F_R(x_1 \otimes r_1 + \dots + x_q \otimes r_q) = \sum_{k_1 + \dots + k_q = n} \varphi(x_1^{k_1} \dots x_q^{k_q}) \otimes r_1^{k_1} \dots r_q^{k_q}.$$

D'après l'unicité d'une telle écriture ([2], th. I-1, p. 220), on a donc :

— :  $\varphi(x_1^{k_1} \dots x_q^{k_q}) = 0$  si deux  $k_i$  au moins sont  $\geq 1$ , autrement dit :  $\varphi$  s'annule sur  $I_n$  ;

— :  $\varphi(x^{[n]}) = \bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x$ .

La première de ces assertions montre que  $\varphi$  se factorise en  $\omega \circ \rho$ , où  $\omega$  est une application linéaire de  $G_n(M)$  dans  $M_{\rho^g}^g$ , et l'on a

$$\omega \circ \rho(x^{[n]}) = \bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x.$$

Si l'on rapproche cette formule de celle déjà établie ci-dessus :

$$u(\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x) = \rho(x^{[n]}),$$

si l'on remarque enfin que les  $\rho(x^{[n]})$  engendrent linéairement  $G_n(M)$  et que les  $\bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x$  engendrent linéairement  $M_{\rho, h}^{\xi}$ , on voit que  $u$  et  $\omega$  sont des isomorphismes inverses l'un de l'autre, et le théorème est démontré. Désormais, nous identifierons  $G_n(M)$  et  $M_{\rho, h}^{\xi}$ , en posant

$$\rho(x^{[n]}) = \bar{1} \otimes_{\mathfrak{u}} x$$

et l'on pourra écrire

$$G(M) = M \oplus \bigoplus_{\rho, h} M_{\rho, h}^{\xi},$$

où la sommation est étendue aux nombres premiers  $p \geq 2$  et aux entiers  $h \geq 1$ .

5. LA PD-ALGÈBRE  $\overline{G(M)} = A \oplus G(M)$ . — L'idéal  $I$  précédent est aussi un idéal de  $\Gamma(M)$ . On peut donc considérer l'algèbre-quotient  $\overline{G(M)} = \Gamma(M)/I$ .

Il est clair que le module  $\overline{G(M)}$  est la somme directe de  $\Gamma_0(M) = A$  et de  $G(M)$  :

$$\overline{G(M)} = A \oplus G(M).$$

L'anneau  $A$  est une *sous-algèbre* de  $\overline{G(M)}$  et  $G(M)$  est un *idéal* de  $\overline{G(M)}$ . De façon précise :

- le produit de deux éléments de  $A$  est le produit usuel dans  $A$ ;
- le produit d'un  $\lambda \in A$  par un  $g \in G(M)$  est  $\lambda g$  [multiplication scalaire dans le module  $G(M)$ ];
- le produit de deux éléments de  $G(M)$  est nul.

L'application canonique

$$\Gamma(M) = A \oplus \Gamma_+(M) \rightarrow A \oplus G(M) = \overline{G(M)}$$

est un homomorphisme d'*algèbres prégraduées* ([3], § 4). En outre, on sait que  $\Gamma(M)$  est une PD-algèbre ([3], § 2 et 10). Montrons que  $I$  est un *idéal divisé* ([3], § 5).

$I$  est l'idéal engendré dans  $\Gamma(M)$  par les  $x^{[p]} y^{[q]}$  ( $x, y \in M$ ;  $p, q \geq 1$ ). Or, pour  $n \geq 1$ , on a  $\gamma_n(x^{[p]} y^{[q]}) = (x^{[p]})^n \gamma_n(y^{[q]}) \in I$ , car  $(x^{[p]})^n$  et  $\gamma_n(y^{[q]})$  sont dans  $\Gamma_+(M)$ . Donc  $I$  est divisé ([3], § 5, prop. 4).

Par passage au quotient, il en résulte une *structure de PD-algèbre sur l'algèbre prégraduée*  $\overline{G(M)}$  ([3], § 6).

Cette structure est assez intéressante; car si la multiplication dans  $G(M)$  est tout à fait triviale, les puissances divisées le sont beaucoup moins.



On a vu que le module  $G(M)$  est linéairement engendré par les éléments de la forme  $x$  et  $\rho(x^{[p^h]})$  ( $x \in M$ ,  $p$  premier,  $h \geq 1$ ). Les puissances divisées  $\gamma_n$  dans  $\overline{G(M)}$  seront donc connues si, pour  $n \geq 0$ , on connaît tous les  $\gamma_n(x)$  et les  $\gamma_n \circ \rho(x^{[p^h]})$ .

Tous les  $\gamma_0$  sont égaux à 1. Étudions donc les cas où  $n \geq 1$ .

• Détermination de  $\gamma_n(x)$  :

$$\gamma_n(x) = \gamma_n \circ \rho(x) = \rho \circ \gamma_n(x) = \rho(x^{[n]}).$$

Donc :

$\gamma_n(x) = 0$  si  $n$  n'est pas une puissance (éventuellement nulle) de nombre premier;

$\gamma_n(x) = \rho(x^{[p^h]})$  si  $n = p^h$  ( $p$  premier,  $h \geq 0$ ).

• Détermination de  $\gamma_n \circ \rho(x^{[p^k]})$  ( $p$  premier,  $k \geq 1$ ) :

$$\gamma_n \circ \rho(x^{[p^k]}) = \rho \circ \gamma_n(x^{[p^k]}) = [(n p^k)! / n! (p^k!)^n] \rho(x^{[n p^k]}).$$

Donc, si  $n$  n'est pas une puissance (éventuellement nulle) de  $p$ , on a

$$\gamma_n \circ \rho(x^{[p^k]}) = 0.$$

Si  $n = p^h$  ( $h \geq 0$ ), on a

$$\gamma_n \circ \rho(x^{[p^k]}) = [(n p^k)! / n! (p^k!)^n] \rho(x^{[p^{h+k}]}).$$

Dans cette expression, le coefficient numérique  $(n p^k)! / n! (p^k!)^n$  peut être remplacé par tout autre entier qui lui est congru modulo  $p$ , car  $p$  annule  $M_{p^{h+k}}$ . Or, il est congru à 1 modulo  $p$  (cf., par exemple, [2], lemme p. 343). Donc  $\gamma_n \circ \rho(x^{[p^k]}) = \rho(x^{[p^{h+k}]})$ .

On constate que tous ces résultats sont rassemblés dans le

**THÉORÈME 2.** — *Dans la PD-algèbre  $\overline{G(M)}$ , on a*

$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x \in M, \quad h \geq 0, \quad k \geq 0, \quad p \text{ premier} \geq 2 \text{ et } n \geq 1: \\ \gamma_0 \circ \rho(x^{[p^k]}) = 1; \\ \gamma_n \circ \rho(x^{[p^k]}) = 0 \quad \text{si } n \text{ n'est pas une puissance (éventuellement nulle) de } p; \\ \gamma_{p^h} \circ \rho(x^{[p^k]}) = \rho(x^{[p^{h+k}]}). \end{array} \right.$$

En outre, pour  $n \geq 1$ , les applications  $\gamma_n$  sont additives.

La dernière assertion précise encore la structure des puissances divisées dans  $\overline{G(M)}$ . Elle se vérifie immédiatement; pour  $u, v \in G(M)$ , on a

$$\gamma_n(u + v) = \gamma_n(u) + \gamma_n(v) + \sum_{k=1}^{n-1} \gamma_k(u) \gamma_{n-k}(v);$$

or le  $\sum$  est nul, car le produit de deux éléments de  $G(M)$  est nul.

III. — Les lois formelles additives.

6. PARAGRAPHE UNIQUE. — Soient deux modules M et N :

Une loi formelle F (cf. [2], chap. VI) sur le couple (M, N) est dite *additive*, si, m et m' désignant deux exemplaires de la loi identique sur M, on a

$$F(m + m') = F(m) + F(m').$$

Autrement dit, pour toute algèbre R et pour z et z' ∈ M(R) ([2], chap. VI, § 1), on a

$$F_R(z + z') = F_R(z) + F_R(z').$$

D'une manière générale, une loi formelle F ∈ ℱ(M, N) est décrite par une application linéaire φ : Γ<sub>+</sub>(M) → N et, pour z = x<sub>1</sub> ⊗ r<sub>1</sub> + ... + x<sub>q</sub> ⊗ r<sub>q</sub> ∈ M(R) (les r<sub>i</sub> étant nilpotents), on a la « formule de Taylor » :

$$F_R(x_1 \otimes r_1 + \dots + x_q \otimes r_q) = \sum_{k_1 + \dots + k_q \geq 1} \varphi(x_1^{[k_1]} \dots x_q^{[k_q]}) \otimes r_1^{k_1} \dots r_q^{k_q}.$$

En particulier :

$$F_R(x \otimes r) = \sum_{k \geq 1} \varphi(x^{[k]}) \otimes r^k.$$

PROPOSITION 1. — Pour que F soit additive, il faut et il suffit que φ s'annule sur I.

• Nécessité : Si F est additive, on a aussi

$$F_R(x_1 \otimes r_1 + \dots + x_q \otimes r_q) = \sum_{i=1}^q F_R(x_i \otimes r_i) = \sum_{i=1}^q \sum_{h_i \geq 1} \varphi(x_i^{[h_i]}) \otimes r_i^{h_i}.$$

D'après l'unicité d'une telle écriture générale, on en déduit que φ(x<sub>1</sub><sup>[k<sub>1</sub>]</sup> ... x<sub>q</sub><sup>[k<sub>q</sub>]</sup>) = 0 si deux des k<sub>i</sub> au moins sont ≥ 1. Autrement dit, φ s'annule sur I.

• Suffisance : Si φ s'annule sur I, la formule de Taylor montre que

$$F_R(x_1 \otimes r_1 + \dots + x_q \otimes r_q) = \sum_{i=1}^q \sum_{k_i \geq 1} \varphi(x_i^{[k_i]}) \otimes r_i^{k_i} = \sum_{i=1}^q F_R(x_i \otimes r_i),$$

C. Q. F. D.

Pour que F soit additive, il faut et suffit donc que φ se factorise en ψ ∘ ρ, où ψ est une application (nécessairement unique) de G(M) dans N.

En particulier, l'application ρ : Γ<sub>+</sub>(M) → G(M) définit une loi formelle additive sur le couple (M, G(M)), que nous notons α<sub>M</sub> : nous disons que

$\alpha_M$  est la loi additive canonique sur le couple  $(M, G(M))$ . Elle se définit par additivité à partir de la formule

$$(\alpha_M)_R(x \otimes r) = x \otimes r + \sum_{\rho, h} \binom{r}{\rho^h} \otimes r^{\rho^h}$$

( $p$  premier  $\geq 2$ ,  $h \geq 1$ ).

On peut donc énoncer le

**THÉORÈME 3.** — *Il existe un isomorphisme bijectif entre le module des lois formelles additives sur le couple  $(M, N)$  et le module des applications linéaires de  $G(M)$  dans  $N$ . Si  $F \in \mathcal{F}(M, N)$  (additive) et  $\psi \in \mathcal{L}(G(M), N)$  se correspondent de cette manière, on a*

$$F = \psi \circ \alpha_M,$$

où  $\alpha_M$  est la loi additive canonique sur le couple  $(M, G(M))$ .

#### IV. — Le module des différentielles de l'algèbre $\Gamma(M)$ .

7. DES REMARQUES ET UN LEMME. — Soient deux  $A$ -modules  $M$  et  $N$ . On désigne par  $\mathcal{C}(M, N)$  le module des lois complètes sur le couple  $(M, N)$  (cf. [4]).

Soit  $R$  une algèbre unitaire et supposons, plus précisément, que  $N$  soit un module sur  $R$ . Nous savons déjà (cf. [4]) que  $\mathcal{C}(M, R)$  peut être muni d'une structure d'algèbre unitaire sur  $A$ ; nous allons montrer ici qu'on peut faire de  $\mathcal{C}(M, N)$  un module sur  $\mathcal{C}(M, R)$ .

On peut dire que la structure de  $N$  comme  $R$ -module est définie par une application  $A$ -bilinéaire

$$\beta : R \times N \rightarrow N, \quad \text{avec } \beta(r, y) = ry,$$

ou par une application  $A$ -linéaire,

$$\mu : R \otimes N \rightarrow N, \quad \text{avec } \mu(r \otimes y) = ry.$$

On peut considérer  $\beta$  comme une loi bihomogène de bidegré  $(1, 1)$  sur le couple  $(R \times N, N)$ . Pour deux lois complètes

$$u \in \mathcal{C}(M, R) \quad \text{et} \quad F \in \mathcal{C}(M, N),$$

considérons alors la loi  $uF \in \mathcal{C}(M, N)$  définie par

$$uF = \beta(u, F).$$

De manière explicite, pour une algèbre unitaire  $S$  et pour  $z \in M(S)$ , on pose

$$(uF)_S(z) = u_S(z) F_S(z);$$

ce dernier produit, avec  $u_s(z) \in R \otimes S$  et  $F_s(z) \in N \otimes S$ , se calcule à partir de  $u_s(z) \otimes F_s(z) \in R \otimes S \otimes N \otimes S$ , en contractant  $R \otimes N$  sur  $N$  par  $\mu$  et  $S \otimes S$  sur  $S$  par le produit dans  $S$ .

Il est tout à fait trivial de vérifier ensuite que la loi de composition externe

$$\mathcal{C}(M, R) \times \mathcal{C}(M, N) \rightarrow \mathcal{C}(M, N)$$

définie par  $(u, F) \rightarrow uF$ , confère à  $\mathcal{C}(M, N)$  une structure de module sur  $\mathcal{C}(M, R)$ . Si  $N = R$ , on retrouve la multiplication déjà connue de  $\mathcal{C}(M, R)$ .

*Exemple.* — Supposons que  $R = \Gamma(M)$  et que  $N$  soit un  $\Gamma(M)$ -module (donc aussi un  $A$ -module). Soit  $g \in \mathcal{C}(M, N)$ . On peut écrire

$$g = \varphi \circ \mathbf{e}^M,$$

où  $\mathbf{e}^M$  est la loi complète universelle sur le couple  $(M, \Gamma(M))$  (cf. [4]), et où  $\varphi$  est une application  $A$ -linéaire de  $\Gamma(M)$  dans  $N$ .

Nous utiliserons plus loin le lemme suivant :

LEMME 1. — *En posant*

$$F = \mathbf{e}^M g$$

on a

$$F = D \circ \mathbf{e}^M,$$

où  $D$ , application  $A$ -linéaire de  $\Gamma(M)$  dans  $N$ , est donné par la formule

$$D = \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi) \circ \Delta.$$

[On rappelle que  $\Delta$  est l'application diagonale  $\Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M) \otimes \Gamma(M)$  définie en [2], (p. 290), et que  $\mu : \Gamma(M) \otimes N \rightarrow N$  est l'application qui définit  $N$  comme  $\Gamma(M)$ -module.]

En effet, soit  $S$  une algèbre unitaire et soit

$$z = x_1 \otimes s_1 + \dots + x_p \otimes s_p \in M \otimes S \quad (\text{les } s_i \text{ nilpotents});$$

on a

$$\begin{aligned} F_S(z) &= \left( \sum_{h_1, \dots, h_p} x_1^{h_1} \dots x_p^{h_p} \otimes s_1^{h_1} \dots s_p^{h_p} \right) \left( \sum_{k_1, \dots, k_p} \varphi(x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p}) \otimes s_1^{k_1} \dots s_p^{k_p} \right) \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_p} \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi) \left( \sum_{h_1+k_1=n_1} \dots \sum_{h_p+k_p=n_p} x_1^{h_1} \dots x_p^{h_p} \otimes x_1^{k_1} \dots x_p^{k_p} \right) \otimes s_1^{n_1} \dots s_p^{n_p} \\ &= \sum_{n_1, \dots, n_p} \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi) \circ \Delta(x_1^{n_1} \dots x_p^{n_p}) \otimes s_1^{n_1} \dots s_p^{n_p}. \end{aligned}$$

Donc,

$$F = \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi) \circ \Delta \circ \mathbf{e}^M.$$

C. Q. F. D.

8. LES DÉRIVATIONS ET LE MODULE DES DIFFÉRENTIELLES D'UNE ALGÈBRE. — Soient  $R$  une algèbre,  $N$  un  $R$ -module. On appelle *A-dérivation de  $R$  dans  $N$*  une application  $D : R \rightarrow N$  telle que :

- a.  $D$  est  $A$ -linéaire;
- b.  $\forall r, s \in R : D(rs) = rD(s) + sD(r)$ .

Si  $P$  est un  $R$ -module et si  $\psi : N \rightarrow P$  est  $R$ -linéaire, alors  $\psi \circ D$  est une  $A$ -dérivation de  $R$  dans  $P$ .

Il est connu (*cf.* par exemple [1]) qu'on peut associer à toute algèbre  $R$  un  $R$ -module  $\mathcal{O}(R)$  et une application  $d : R \rightarrow \mathcal{O}(R)$ , de telle sorte que :

- 1°  $d$  est une  $A$ -dérivation;
- 2° toute  $A$ -dérivation de  $R$  dans un  $R$ -module  $N$  se factorise de manière unique sous la forme  $D = u \circ d$ , où  $u$  est une application  $R$ -linéaire de  $\mathcal{O}(R)$  dans  $N$ .

Les conditions 1°, 2° déterminent le couple  $(\mathcal{O}(R), d)$  à un isomorphisme près.

Le  $R$ -module  $\mathcal{O}(R)$  s'appelle le *module des A-différentielles* de l'algèbre  $R$ , et  $d$  est l'*application différentielle* de  $R$  dans  $\mathcal{O}(R)$ . On dit que  $d(r)$  est la  $A$ -différentielle de  $r$ .

On trouve dans la littérature, par exemple dans [1], une construction devenue classique de  $\mathcal{O}(R)$ . Ici, nous en donnerons une autre pour l'algèbre  $\Gamma(M)$ , qui permettra de l'explicitier entièrement.

9. LES  $A$ -DÉRIVATIONS ET LE MODULE DES DIFFÉRENTIELLES DE L'ALGÈBRE  $\Gamma(M)$ . — Soit  $M$  un module. Nous notons par  $m$  et  $m'$  les deux projections canoniques du module  $M \times M$  sur  $M$ ; nous notons aussi par  $\gamma$  et  $\gamma'$  les deux projections canoniques de  $\Gamma(M) \times \Gamma(M)$  sur  $\Gamma(M)$ .

LEMME 2. — *Soit  $N$  un  $\Gamma(M)$ -module. Pour qu'une application  $A$  linéaire  $D : \Gamma(M) \rightarrow N$  soit une  $A$ -dérivation, il faut et il suffit que, dans le module  $\mathcal{C}(\Gamma(M) \times \Gamma(M), N)$  considéré comme module sur  $\mathcal{C}(\Gamma(M) \times \Gamma(M), \Gamma(M))$ , on ait la relation*

$$D(\gamma\gamma') = \gamma D(\gamma') + \gamma' D(\gamma).$$

En effet, chacun des deux membres représente une loi bilinéaire sur le couple  $(\Gamma(M) \times \Gamma(M), N)$ . Pour que ces lois soient égales, il faut et il suffit que leurs restrictions au module  $\Gamma(M) \times \Gamma(M)$  coïncident, c'est-à-dire que  $D$  soit une dérivation.

LEMME 3. — *Pour qu'une application  $A$ -linéaire  $D : \Gamma(M) \rightarrow N$  soit une  $A$ -dérivation, il faut et il suffit que, dans le module  $\mathcal{C}(M \times M, N)$  considéré comme module sur  $\mathcal{C}(M \times M, \Gamma(M))$ , on ait la relation*

$$D(\mathbf{e}^M(m) \mathbf{e}^M(m')) = \mathbf{e}^M(m) \cdot D(\mathbf{e}^M(m')) + \mathbf{e}^M(m') \cdot D(\mathbf{e}^M(m)).$$

• Nécessité : Elle découle du lemme 2, où l'on compose  $\gamma$  avec  $\mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(m)$  et  $\gamma'$  avec  $\mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(m')$ .

• Suffisance : En égalant dans les deux membres la composante bihomogène de bidegré  $(p, q)$ , il vient

$$D(m^{[p]} m'^{[q]}) = m^{[p]} \cdot D(m'^{[q]}) + m'^{[q]} \cdot D(m^{[p]}).$$

Composons  $m$  avec  $m_1 + \dots + m_r$  et  $m'$  avec  $m'_1 + \dots + m'_s$ , où les  $m_i$  et  $m'_j$  sont les projections canoniques de  $M^r$  et  $M^s$  sur  $M$ , et prenons la composante multihomogène de multidegré  $(h_1, \dots, h_r; k_1, \dots, k_s)$  (avec  $h_1 + \dots + h_r = p$  et  $k_1 + \dots + k_s = q$ ). Il vient, en posant

$$u = m_1^{[h_1]} \dots m_r^{[h_r]} \quad \text{et} \quad v = m'_1^{[k_1]} \dots m'_s^{[k_s]} :$$

$$D(uv) = u D(v) + v D(u).$$

Si l'on compose enfin, dans cette égalité des lois polynomes, chaque  $m_i$  (resp.  $m'_j$ ) par un élément  $x_i$  (resp.  $y_j$ ) de  $M$ , on obtient une relation qui montre que  $D$  est une dérivation.

PROPOSITION 2. — Soient  $M$  un module et  $N$  un  $\Gamma(M)$ -module. Pour une application  $A$ -linéaire  $D : \Gamma(M) \rightarrow N$ , posons  $F(m) = D \circ \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(m)$  et  $g(m) = \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(-m) F(m)$ , de sorte qu'aussi  $F(m) = \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(m) g(m)$ . Alors, pour que  $D$  soit une dérivation, il faut et il suffit que  $g(m)$  soit une loi formelle additive.

La formule du lemme 3 s'écrit en effet

$$F(m + m') = \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(m) F(m') + \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(m') F(m).$$

Si l'on multiplie chaque membre par  $\mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(-m - m') = \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(-m) \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}(-m')$ , on obtient la formule équivalente

$$g(m + m') = g(m) + g(m').$$

On voit que  $g$  est une loi formelle en composant  $m$  et  $m'$  avec  $o$ , ce qui donne  $g(o) = o$ , et que dès lors  $g$  est une loi formelle additive,

C. Q. F. D.

D'après le théorème 3 du présent article, une loi formelle  $g$  sur le couple  $(M, N)$  est additive si et seulement si elle est de la forme  $\varphi \circ q \circ \mathbf{e}^{\mathfrak{M}}$ , où  $\varphi$  est une application  $A$ -linéaire de  $G(M)$  dans  $N$  et où  $q$  est l'application linéaire de  $\Gamma(M)$  sur  $G(M)$  qui s'annule sur  $A$  et qui coïncide avec  $\varphi$  sur  $\Gamma_+(M)$ .

D'après le lemme 1 ci-dessus, on voit que l'application  $D : \Gamma(M) \rightarrow N$  est une  $A$ -dérivation si et seulement si elle est de la forme

$$D = \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi) \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes q) \circ \Delta.$$

Posons

$$d = (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes q) \circ \Delta.$$

C'est une application  $A$ -linéaire de  $\Gamma(M)$  dans  $\Gamma(M) \otimes G(M)$ . Posons aussi  $\Phi = \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi)$ ;  $\Phi$  est l'application  $A$ -linéaire de  $\Gamma(M) \otimes G(M)$  dans  $N$  définie par  $\Phi(\gamma \otimes g) = \gamma\varphi(g)$ . On voit que  $\Phi$  est aussi  $\Gamma(M)$ -linéaire, si l'on fait de  $\Gamma(M) \otimes G(M)$  un module sur  $\Gamma(M)$  de manière évidente.

Ainsi, pour une dérivation  $D$  de  $\Gamma(M)$  dans  $N$ , on a  $D = \Phi \circ d$ , où  $\Phi$  est une application  $\Gamma(M)$ -linéaire de  $\Gamma(M) \otimes G(M)$  dans  $N$ .

Réciproquement, soit  $\Phi$  une application  $\Gamma(M)$ -linéaire de  $\Gamma(M) \otimes G(M)$  dans  $N$ . Définissons  $\varphi : G(M) \rightarrow N$  par  $\varphi(g) = \Phi(1 \otimes g)$ ; alors,  $\varphi$  est  $A$ -linéaire et l'on a  $\Phi = \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi)$ . Si l'on définit  $D$  par  $D = \Phi \circ d$ , on voit que  $D$  est une dérivation. De façon plus précise, on a

$$D \circ e^M(m) = e^M(m) g(m), \quad \text{où } g(m) = \varphi \circ q \circ e^M(m).$$

Supposons qu'on ait aussi  $D = \Phi' \circ d$ , avec  $\Phi' : \Gamma(M) \otimes G(M) \rightarrow N$  et  $\Gamma(M)$ -linéaire; définissons  $\varphi' : G(M) \rightarrow N$  par  $\varphi'(g) = \Phi'(1 \otimes g)$ . Alors on aura aussi  $D \circ e^M(m) = e^M(m) g'(m)$ , avec  $g'(m) = \varphi' \circ q \circ e^M(m)$ . De là il résulte successivement

$$\begin{aligned} e^M(m) g(m) &= e^M(m) g'(m); & g(m) &= g'(m); \\ \varphi' \circ q &= \varphi \circ q; & \varphi &= \varphi'; & \Phi &= \Phi'. \end{aligned}$$

Ainsi, pour que  $D$  soit une dérivation, il faut et il suffit que  $D$  soit de la forme  $\Phi \circ d$ , où  $\Phi$  est une application  $\Gamma(M)$ -linéaire définie sur  $\Gamma(M) \otimes G(M)$ ; en outre, un tel  $\Phi$  est unique.

En particulier,  $d$  est une dérivation de  $\Gamma(M)$  dans  $\Gamma(M) \otimes G(M)$ .

En vertu des résultats rappelés au paragraphe précédent, on peut donc énoncer le

**THÉORÈME 4.** — *Le module des  $A$ -différentielles de l'algèbre  $\Gamma(M)$  est le module  $\omega(\Gamma(M)) = \Gamma(M) \otimes G(M)$ . L'application différentielle  $d : \Gamma(M) \rightarrow \omega(\Gamma(M))$  est définie par la relation*

$$d = (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes q) \circ \Delta,$$

où  $\Delta$  est l'application diagonale et où  $q$  est l'application linéaire de  $\Gamma(M)$  sur  $G(M)$  qui s'annule sur  $A$  et coïncide avec  $\varphi$  sur  $\Gamma_+(M)$ .

Soit  $N$  un  $\Gamma(M)$ -module. Il existe une correspondance bijective entre l'ensemble des  $A$ -dérivations  $D$  de  $\Gamma(M)$  dans  $N$  et l'ensemble des applications  $A$ -linéaires  $\varphi$  de  $G(M)$  dans  $N$ . Si  $D$  et  $\varphi$  se correspondent de cette manière, on a

$$D = \mu \circ (\varepsilon_{\Gamma(M)} \otimes \varphi) \circ d,$$

où  $\mu : \Gamma(M) \otimes N \rightarrow N$  est l'application qui définit  $N$  comme  $\Gamma(M)$ -module.

10. EXPRESSION DES DIFFÉRENTIELLES DANS  $\Gamma(M)$ . — Comme  $\Gamma(M)$  est engendrée algébriquement par les  $x^{[n]}$  ( $x \in M$ ,  $n \geq 0$ ), l'application

différentielle  $d : \Gamma(\mathbf{M}) \rightarrow \Gamma(\mathbf{M}) \otimes \mathbf{G}(\mathbf{M})$  sera explicitée dès qu'on aura explicité  $d(x^{[n]})$ . Nous supposons  $n \geq 1$ , car  $d(1) = 0$ .

On a

$$\Delta(x^{[n]}) = \sum_{k=0}^n x^{[n-k]} \otimes x^{[k]},$$

d'où

$$d(x^{[n]}) = \sum_{k=1}^n x^{[n-k]} \otimes \rho(x^{[k]}).$$

Finalement

PROPOSITION 3. — *A la décomposition*

$$\omega(\Gamma(\mathbf{M})) = (\Gamma(\mathbf{M}) \otimes \mathbf{M}) \oplus \bigoplus_{\rho, h} (\Gamma(\mathbf{M}) \otimes \mathbf{M}_{\rho^h}^g)$$

( $p$  premier,  $h \geq 1$ ), correspond pour  $n \geq 1$  la formule

$$d(x^{[n]}) = (x^{[n-1]} \otimes x) + \sum_{\rho^h \leq n} x^{[n-\rho^h]} \otimes \left( \bar{1} \otimes_{\rho^h} x \right).$$

Remarque. — Définissons les applications

$$d_1 : \mathbf{M} \rightarrow \Gamma(\mathbf{M}) \otimes \mathbf{M} \quad \text{et} \quad d_{\rho^h} : \mathbf{M} \rightarrow \Gamma(\mathbf{M}) \otimes \mathbf{M}_{\rho^h}^g$$

par

$$d_1(x) = 1 \otimes x \quad \text{et} \quad d_{\rho^h}(x) = 1 \otimes \left( \bar{1} \otimes_{\rho^h} x \right).$$

Alors on a

$$d(x^{[n]}) = x^{[n-1]} d_1(x) + \sum_{\rho^h \leq n} x^{[n-\rho^h]} d_{\rho^h}(x).$$

#### BIBLIOGRAPHIE.

- [1] Y. NAKAI, *On the theory of differentials in commutative rings* (J. Math. Soc. Japan, vol. 13, n° 1, 1961).
- [2] N. ROBY, *Lois polynomes et lois formelles en théorie des modules* (Ann. scient. Éc. Norm. Sup., fasc. 3, 1963, p. 213).
- [3] N. ROBY, *Les algèbres à puissances divisées* (Bull. Sc. math., 2<sup>e</sup> série, t. 89, 1965, p. 75 à 91).
- [4] N. ROBY, *Sur les lois complètes et les algèbres de puissances divisées* (Boletim da Sociedade de Matematica de São-Paulo, vol. 18, fasc. 1 e 2, dez. 1966).