

# SÉMINAIRE HENRI CARTAN

H. CARTAN

## **Puissances divisées**

*Séminaire Henri Cartan*, tome 7, n° 1 (1954-1955), exp. n° 7, p. 1-11

<[http://www.numdam.org/item?id=SHC\\_1954-1955\\_\\_7\\_1\\_A7\\_0](http://www.numdam.org/item?id=SHC_1954-1955__7_1_A7_0)>

© Séminaire Henri Cartan  
(Secrétariat mathématique, Paris), 1954-1955, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la collection « Séminaire Henri Cartan » implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

PUISSANCES DIVISÉES

---

(Exposé de H. CARTAN, 3-1-1955)

---

Préambule. Dans une algèbre graduée commutative sur le corps des rationnels, considérons, pour chaque entier  $k$ , l'application  $\gamma_k : x \rightarrow x^k/k!$ . Elle jouit des propriétés suivantes :

- (1)  $\gamma_0(x) = 1$ ,  $\gamma_1(x) = x$ ,  $\deg \gamma_k(x) = k \cdot \deg(x)$ .
- (2)  $\gamma_k(x) \gamma_h(x) = (k,h) \gamma_{k+h}(x)$ , en notant  $(k,h)$  le coefficient binominal  $\frac{(k+h)!}{k!h!}$ .
- (3)  $\gamma_k(x+y) = \sum_{i+j=k} \gamma_i(x) \gamma_j(y)$  (formule de Leibniz)
- (4)  $\gamma_k(xy) = k! \gamma_k(x) \gamma_k(y) = x^k \gamma_k(y) = \gamma_k(x) y^k$
- (5)  $\gamma_k(\gamma_h(x)) = (h,h-1)(2h,h-1)\dots((k-1)h,h-1) \gamma_{kh}(x)$ .

On vérifie (5) en montrant, par récurrence sur  $k$ , que le coefficient du second membre est égal à  $\frac{(kh)!}{k!(h!)^k}$ , qui est donc entier.

Enfin, si l'algèbre est munie d'une différentielle  $d$ , on a

$$(6) \quad d \gamma_k(x) = (dx) \gamma_{k-1}(x) \quad \text{pour } k \geq 1.$$

1. - Une propriété de la bar construction.

On ne fait aucune hypothèse sur l'anneau de base  $\Lambda$ .

Théorème 1 : Soit  $A$  une DGA-algèbre anticommutative (au sens strict, i.e. :  $a^2 = 0$  pour tout  $a \in A$  de degré impair). Pour chaque  $x \in \overline{\mathcal{B}}(A)$  de degré pair  $\geq 2$ , il existe une suite d'éléments  $\gamma_k(x) \in \overline{\mathcal{B}}(A)$

$(k = 0, 1, 2, \dots)$  qui satisfont à (1) et (6), où  $dx$  désigne la différentielle de  $x \in \overline{\mathcal{B}}(A)$  au sens de l'algèbre acyclique  $\mathcal{B}(A)$ .

Les éléments  $\gamma_k(x)$  sont déterminés de manière unique par ces conditions : ils ont un caractère fonctoriel ; ils satisfont en outre à (2), (3), (5), et à

$$(4') \quad \begin{cases} \text{pour } k \geq 2, & \gamma_k(xy) = 0 \text{ si } \deg(x) \text{ et } \deg(y) \text{ impairs,} \\ \gamma_k(xy) = x^k \gamma_k(y) & \text{si } \deg(y) \text{ pair } \geq 2 \text{ et } \deg(x) \text{ pair.} \end{cases}$$

Démonstration : d'après l'Exp. 4, th.4, (iv), l'algèbre  $\overline{\mathcal{B}}(A)$  est

anticommutative au sens strict. Donc le produit tensoriel  $A \otimes \overline{\mathcal{B}}(A) = \overline{\mathcal{B}}(A)$  est une algèbre anticommutative au sens strict ; par suite, si  $x \in \overline{\mathcal{B}}(A)$  est de degré pair,  $(dx)^2$  est nul.

Cela posé, la propriété (B) (Exp. 3, th. 3), qui caractérise la bar construction, va donner la clef de la démonstration.

Soit  $x \in \overline{\mathcal{B}}_{2q}(A)$ ,  $q \geq 1$  ; l'existence et l'unicité de  $\gamma_k(x)$  satisfaisant à (1) et (6) se montrent par récurrence sur  $k$ , étant triviales pour  $k = 0$  et  $k = 1$ . Si elles sont vraies pour  $k - 1$  ( $k \geq 2$ ), la détermination de  $\gamma_k(x)$  revient à celle d'un  $y \in \overline{\mathcal{B}}_{2kq}(A)$  tel que  $dy$  soit un élément connu  $z = (dx) \gamma_{k-1}(x)$  ; un tel  $y$  existe et est unique, pourvu que  $z$  soit un cycle ; or, d'après l'hypothèse de récurrence,  $dz = (dx)^2 \gamma_{k-2}(x)$ , qui est nul puisque  $(dx)^2 = 0$ .

Les applications  $\gamma_k$  ont un caractère fonctoriel : si  $f : A \rightarrow A'$  est un DGA-homomorphisme, l'application  $g : \overline{\mathcal{B}}(A) \rightarrow \overline{\mathcal{B}}(A')$  définie par  $f$  satisfait à  $g(\gamma_k(x)) = \gamma_k(g(x))$  pour  $x \in \overline{\mathcal{B}}_{2q}(A)$ . Démonstration par récurrence sur  $k$  : si c'est vrai pour  $k - 1$ , les deux membres ont des différentielles égales, donc sont égaux d'après la propriété (B) de la bar construction.

La propriété (2) se vérifie par récurrence sur  $k + h$ , étant triviale pour  $k + h = 0$  ou  $1$ . On prouve l'égalité des différentielles, qui résulte de l'hypothèse de récurrence, et de la relation classique :

$(k-1, h) + (k, h-1) = (k, h)$ . La propriété (3) se vérifie aussi par récurrence sur  $k$ , en différentiant. De même pour (4') : si les degrés de  $x$  et  $y$  sont impairs, la différentiation nous ramène au cas  $k = 2$ , et dans ce cas, par différentiation, on est ramené à vérifier que  $d(xy) \cdot (xy) = 0$ , ce qui résulte des relations  $x^2 = 0$  et  $y^2 = 0$ . Si  $\deg(y)$  est pair  $\geq 2$  et  $\deg(x)$  pair, (4') se prouve encore en différentiant, compte tenu de la relation  $y \cdot \gamma_{k-1}(y) = k \gamma_k(y)$  qui résulte de (2). Enfin, (5) est triviale pour  $k = 1$  et se prouve par récurrence sur  $k$  en différentiant : il suffit d'appliquer (2) au calcul du produit  $\gamma_{h-1}(x) \gamma_{kh-h}(x)$ .

## 2.- L'algèbre des polynômes divisée.-

Les  $\gamma_k(x)$  définis dans la bar construction  $\overline{\mathcal{B}}(A)$  s'appellent les puissances divisées de  $x$ . Cette dénomination est justifiée par la relation

$$x^k = k! \gamma_k(x)$$

qui résulte aussitôt de (2).

Prenons un exemple important : soit  $A = E(x ; 2q-1)$  l'algèbre extérieurement à un générateur  $x$  de degré impair  $2q-1$ . Introduisons le module  $P(y ; 2q)$  ayant la base suivante :  $y_0 = 1, y_1 = y, y_2, \dots, y_k, \dots$  dans les degrés  $0, 2q, 4q, \dots, 2kq, \dots$ . Sur le produit tensoriel  $A \otimes P(y ; 2q)$  mettons la différentielle

$$(7) \quad dx = 0, \quad dy_k = xy_{k-1}, \quad \text{d'où} \quad d(xy_k) = 0$$

Il est immédiat que les  $xy_k$  ( $k \geq 0$ ) forment une base des cycles, et que tout cycle est le bord d'un unique élément de  $P(y ; 2q)$ . La propriété caractéristique de la bar construction de  $A$  est donc vérifiée ; il s'ensuit que  $P(y ; 2q)$  est muni d'une structure d'algèbre, celle de  $\overline{\mathcal{B}}(A)$ . La relation (7), comparée à (6), montre que  $y_k = \gamma_k(y)$ . Alors (2) donne la multiplication dans  $P(y ; 2q)$  :  $y_k y_h = (k, h) y_{k+h}$ . Et (5) détermine les puissances divisées dans  $P(y ; 2q)$  :

$$(8) \quad \gamma_k(\gamma_h) = (h, h-1)(2h, h-1) \dots ((k-1)h, h-1) y_{kh}.$$

L'algèbre  $P(y ; 2q)$ , munie de ce système de  $\gamma_k$ , s'appelle l'algèbre des polynômes divisée (à un générateur  $y$  de degré  $2q$ ).

### 3.- Autres exemples.

Dans l'exemple précédent,  $y$  n'est autre que  $[x]$ , déduit de  $x \in A$  par l'application  $s$  qui définit la suspension. Plus généralement :

Soit  $A$  une DGA-algèbre anticommutative au sens strict, et soit  $a \in A_{2q-1}$  ( $q \geq 1$ ) ; dans  $\overline{\mathcal{B}}(A)$ , on a

$$(9) \quad \gamma_k([a]) = [a, \dots, a] \quad (k \text{ fois}).$$

Démonstration : par récurrence sur  $k$ , on doit vérifier que

$$\gamma_k([a]) = s(a \gamma_{k-1}([a])).$$

Pour cela, on différentie ; on doit prouver que

$$d[a]. \gamma_{k-1}([a]) = a \gamma_{k-1}([a]) - sd(a \gamma_{k-1}([a]))$$

$$\text{ou encore} \quad [da]. \gamma_{k-1}([a]) = sd(a \gamma_{k-1}([a])),$$

ou, en différentiant :

$$(da) \gamma_{k-1}([a]) - [da]. d \gamma_{k-1}([a]) = d(a \gamma_{k-1}([a])),$$

ce qui revient à  $d[a]. d \gamma_{k-1}([a]) = 0$ . Or c'est vrai, puisque le carré de  $d[a]$  est nul,  $d[a]$  étant de degré impair.

On démontre de même (c'est un peu plus compliqué) : si  $a \in A$  et  $b \in A$  sont de degrés pairs  $\geq 0$ , on a, dans  $\overline{\mathcal{B}}(A)$ ,

(10)  $\gamma_k([a,b]) = [a,b,\dots,a,b]$  (dans le crochet, on a  $k$  fois le couple  $a,b$ ).

#### 4.- Définition générale des puissances divisées.

Toutes les algèbres qu'on considérera désormais sont graduées et anticommutatives au sens strict. Etant donnée une telle algèbre  $N$ , on dit que  $N$  est munie d'un système de puissances divisées si on a attaché à chaque  $x \in N$  de degré pair  $\geq 2$ , une suite d'éléments  $\gamma_k(x) \in N$  ( $k = 0, 1, 2, \dots$ ) satisfaisant à (1), (2), (3) et (4'). (On ne pose pas la condition (5)). Si de plus  $N$  est sous-algèbre graduée d'une algèbre différentielle graduée  $M$  (anticommutative au sens strict), on dit que les puissances divisées de  $N$  sont compatibles avec la différentielle  $d$  de  $M$  si la condition (6) est satisfaite.

Comme on l'a déjà observé, (2) entraîne :

$$(11) \quad x \cdot \gamma_{k-1}(x) = k \gamma_k(x), \text{ d'où } x^k = k! \gamma_k(x).$$

(3) entraîne :

$$(12) \quad \gamma_k(x_1 + \dots + x_n) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} \gamma_{k_1}(x_1) \dots \gamma_{k_n}(x_n).$$

(4') entraîne que (4) a lieu chaque fois que  $\deg(x)$  et  $\deg(y)$  sont pairs  $\geq 2$ . Enfin, (6) entraîne que si  $x$  est un cycle, alors  $\gamma_k(x)$  est un cycle.

Théorème 2 : Soient  $B$  et  $C$  deux sous-algèbres graduées de l'algèbre  $N$  (anticommutative au sens strict), telles que l'application canonique  $B \otimes C \rightarrow N$  soit biunivoque. Etant donné, sur chacune des algèbres  $B$  et  $C$ , un système de puissances divisées, il existe sur  $N$  un système de puissances divisées qui les prolonge, et un tel système est unique. Si de plus les puissances divisées de  $B$  et de  $C$  sont compatibles avec la différentielle d'une algèbre  $M$  (dont  $N$  est sous-algèbre), il en est de même des puissances divisées de  $N$ .

Démonstration : L'unicité résulte aussitôt de (3) et (4'). D'une façon précise, un élément de  $B_q \otimes C_r$  ( $q+r$  pair  $\geq 2$ ) s'écrit sous la forme

$$\sum_{1 \leq i \leq n} b_i c_i, \text{ et l'on doit avoir, pour } k \geq 2,$$

$$(13) \quad \gamma_k\left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i c_i\right) = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n} b_{i_1} c_{i_1} \dots b_{i_k} c_{i_k} \text{ si } q \text{ impair}$$

$$(14) \quad \gamma_k\left(\sum_{1 \leq i \leq n} b_i c_i\right) = \sum_{k_1 + \dots + k_n = k} (b_1)^{k_1} \dots (b_n)^{k_n} \gamma_{k_1}(c_1) \dots \gamma_{k_n}(c_n)$$

si  $r$  pair  $\geq 2$ ,

et une formule analogue (14') si  $q$  pair  $\geq 2$  (si  $q$  et  $r$  sont tous deux pairs  $\geq 2$ , les formules (14) et (14') sont d'accord). Pour prouver l'existence, nous devons d'abord montrer que les valeurs des seconds membres de (13), (14), et (14') ne dépendent que de l'élément

$$\sum_i b_i c_i = \sum_i b_i \otimes c_i \in B_q \otimes C_r.$$

Notons provisoirement  $f(b_1, c_1, \dots, b_n, c_n)$  le second membre de (13), resp. (14), resp. (14'). Eu égard à la définition d'un produit tensoriel, on doit montrer trois choses :

$$(i) \quad f(\lambda b_1, c_1, b_2, c_2, \dots, b_n, c_n) = f(b_1, \lambda c_1, b_2, c_2, \dots, b_n, c_n);$$

$$(ii) \quad \text{si } b_1 = b' + b'', \text{ on a}$$

$$f(b_1, c_1, b_2, c_2, \dots) = f(b', c_1, b'', c_1, b_2, c_2, \dots);$$

$$(iii) \quad \text{si } c_1 = c' + c'', \text{ on a}$$

$$f(b_1, c_1, b_2, c_2, \dots) = f(b_1, c', b_1, c'', b_2, c_2, \dots).$$

Or le point (i) est évident. La vérification de (ii) se ramène à  $(c_1)^2 = 0$  dans le cas de (13), et, dans le cas de (14), à

$$\sum_{k'+k''=k_1} b^{k'} b^{k''} \gamma_{k'}(c) \gamma_{k''}(c) = (b'+b'')^{k_1} \gamma_{k_1}(c)$$

ce qui résulte de (2). Enfin, la vérification de (iii), dans le cas de (14), se ramène à

$$\sum_{k'+k''=k_1} b^{k'} b^{k''} \gamma_{k'}(c') \gamma_{k''}(c'') = b^{k_1} \gamma_{k_1}(c' + c'')$$

qui résulte de (3).

Il est ainsi prouvé que les formules (13), (14) et (14') définissent sans ambiguïté les  $\gamma_k$  sur chacun des sous-modules  $B_q \otimes C_r$  ( $q+r$  pair  $\geq 2$ ), et par suite, d'après (3), sur leur somme directe. Les  $\gamma_k$  ainsi définis satisfont évidemment à (3). Ils satisfont à (2) : c'est évident si  $x$  est de la forme  $bc$ ; et si (2) est vérifié par  $x$  et par  $y$ , il l'est par la somme  $x+y$ , en vertu de (3), et de la relation  $(k,h) = \sum (i,i')(j,j')$  étendue aux systèmes  $(i,i',j,j')$  tels que  $i+j=k$ ,  $i'+j'=h$ . La condition (4') est vérifiée si  $x$  a la forme  $bc$  et  $y$  la forme  $b'c'$  (vérification facile); si elle l'est pour un produit  $x'y$  et pour un produit  $x''y$ , elle l'est pour  $(x'+x'')y$ , d'après un calcul ci-dessus; si elle l'est pour un produit  $xy'$  et pour un produit  $xy''$ , elle l'est pour  $x(y'+y'')$ ; donc elle est vérifiée

quels que soient  $x$  et  $y$ .

Enfin, supposons que (6) soit vérifié quand  $x \in B$  et quand  $x \in C$ ; alors, pour  $b \in B$  et  $c \in C$ , on a  $d \gamma_k(bc) = d(bc) \cdot \gamma_{k-1}(bc)$ ; car si  $b$  et  $c$  sont de degrés impairs tout revient à voir que le produit de  $d(bc)$  et de  $bc$  est nul (ce qui résulte de  $b^2 = 0$  et  $c^2 = 0$ ); et si  $b$  et  $c$  sont de degrés pairs ( $\deg(c) \geq 2$ ), cela résulte de la relation  $c \cdot \gamma_{k-1}(c) = k \gamma_k(c)$ . Enfin, si (6) est vérifié par des  $x_i$ , il l'est par leur somme: il suffit d'utiliser (3).

Ceci achève la démonstration du théorème 2.

### 5.- Puissances divisées dans une construction.

Soit  $(A, N, M)$  une construction anticommutative (au sens strict). Supposons que chacune des algèbres  $A$  et  $N$  soit munie d'un système de puissances divisées, compatible avec la différentielle de l'algèbre  $M = A \otimes N$ . D'après le théorème 2, il existe sur  $M$  un système de puissances divisées, compatible avec la différentielle de  $M$ , qui prolonge les deux systèmes donnés; et ce système prolongé est unique. On dit alors que la construction  $(A, N, M)$  est munie de puissances divisées. (Observer que  $A$  et  $N$  sont stables pour les puissances divisées).

Proposition 1 - Soit  $(A, N, M)$  une construction munie de puissances divisées. Alors :

1) la projection  $M \rightarrow N$  (définie par l'augmentation  $\xi$  de  $A$ ) est compatible avec les  $\gamma_k$ ;

2) les puissances divisées de  $N$  sont compatibles avec la différentielle  $\bar{d}$  de l'algèbre finale  $N$ ;

3) si  $M$  est acyclique, les  $\gamma_k$  de  $N$  passent à l'algèbre d'homologie  $H_*(N)$ , qui devient donc une algèbre munie de puissances divisées.

Démonstration : 1) soit  $x \in N$ , et soit  $u \in M$  dont la projection  $\bar{u}$  dans  $N$  soit nulle. Montrons que  $\gamma_k(x+u) - \gamma_k(x)$  a une projection nulle. C'est égal à  $\sum_{1 \leq i \leq k} \gamma_i(u) \gamma_{k-i}(x)$ , et il suffit donc de montrer

que, pour  $i \geq 1$ ,  $\gamma_i(u)$  a une projection nulle. Il suffit de le montrer quand  $u \in A_q \otimes N_r$ ,  $q+r$  pair  $\geq 2$ . Soit  $u = \sum_j a_j \otimes n_j$ . D'après (3), il

suffit de montrer que  $\gamma_i(a \otimes n)$  a une projection nulle quand  $a \in A_q$ ,  $n \in N_r$ ,  $q+r$  pair  $\geq 2$ , et  $\xi a = 0$ . Supposons d'abord  $r$  pair  $\geq 2$ ; alors

$\gamma_i(a \otimes n) = a^i \otimes \gamma_i(n)$  a bien une projection nulle, car  $\xi(a^i) = 0$ .

Si  $r$  impair,  $\chi_i(a \otimes n) = 0$ . Si  $r = 0$ , alors  
 $\chi_i(a \otimes n) = \chi_i(a)n^i$ , dont la projection est nulle puisque le degré de  
 $\chi_i(a)$  est  $> 0$ .

2) la relation (6) ayant lieu quand  $x \in N$  et  $d$  est la différentielle de  $M$ , on en déduit, par projection sur  $N$ ,

$$\bar{d} \chi_k(x) = (\bar{d}x) \chi_{k-1}(x), \text{ ce qui prouve l'assertion 2) .}$$

3) si  $x \in N$  et  $\bar{d}x = 0$ , on a  $\bar{d} \chi_k(x) = 0$  d'après ce qui précède.

Pour montrer que  $\chi_k$  passe à la  $\bar{d}$ -homologie de  $N$ , on doit prouver que

$$\chi_k(x + \bar{d}y) - \chi_k(x) = \sum_{1 \leq i \leq k} \chi_i(\bar{d}y) \chi_{k-i}(x)$$

est un  $\bar{d}$ -bord si  $x \in N_{2q}$ ,  $\bar{d}x = 0$ ,  $y \in N_{2q+1}$  ( $q \geq 1$ ). Il suffit de montrer que, dans le second membre, chacun des  $\chi_i(\bar{d}y)$  est un  $\bar{d}$ -bord.

Or, d'après 1),  $\chi_i(\bar{d}y)$  est la projection, sur  $N$ , de  $\chi_i(dy)$ , qui est un  $d$ -cycle. Puisque  $M$  est supposée acyclique,  $\chi_i(dy)$  est un  $d$ -bord, donc, par projection,  $\chi_i(\bar{d}y)$  est un  $\bar{d}$ -bord.

Application : soit  $A$  une DGA-algèbre anticommutative (au sens strict). Il en est alors de même de  $\overline{\mathcal{B}}^{(n-1)}(A)$ , pour  $n \geq 2$  (cf Exp. 4, th. 4, (iv)). Donc  $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$ , qui est canoniquement munie de puissances divisées quand  $n \geq 1$  (th. 1 ci-dessus), voit ses  $\chi_k$  passer à l'homologie  $H_* (\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$  quand  $n \geq 2$ . De plus, si  $A$  est de degré zéro,  $A$  est trivialement munie de puissances divisées, donc les  $\chi_k$  de  $\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(A)$  passent aussi à l'homologie. En particulier, prenant  $A = \Lambda(\Pi)$ ,  $\Pi$  groupe abélien, on voit que les algèbres d'Eilenberg-MacLane  $H_*(\Pi, n; \Lambda)$ , pour  $n \geq 1$ , sont canoniquement munies de puissances divisées qui satisfont à (1), (2), (3), (4) et (5).

De plus, pour tout homomorphisme  $\Pi \rightarrow \Pi'$ , l'application fonctorielle  $H_*(\Pi, n; \Lambda) \rightarrow H_*(\Pi', n; \Lambda)$  est compatible avec les puissances divisées, d'après le théorème 1.

#### 6.- Puissances divisées dans une construction spéciale.

Soit  $(A, N, M, \tilde{N})$  une construction spéciale anticommutative (au sens strict). On dira qu'elle est munie de puissances divisées si les  $\chi_k$  laissent stable non seulement les sous-algèbres  $A$  et  $N$ , mais aussi la sous-algèbre  $\tilde{N}$ . C'est trivialement ainsi pour la bar construction, car alors  $\tilde{N} = N$ .



Proposition 2 - Si  $(A, N, M, \tilde{N})$  est une construction spéciale avec puissances divisées, les  $\gamma_k$ , sur  $\tilde{N}$  (et a fortiori sur  $N$ ) satisfont à (5).

Démonstration : par récurrence sur  $k$ , en différentiant, et en observant que  $d$  applique biunivoquement  $\tilde{N}$  dans  $M$ . C'est le même calcul que pour la bar construction (th.1).

Proposition 3 - Si on a deux constructions spéciales avec puissances divisées, leur produit tensoriel (Exp. 4, n° 5) est une construction spéciale avec puissances divisées.

Démonstration : les puissances divisées sont définies, sur le produit tensoriel  $(A'', N'', M'', \tilde{N}'')$ , par le théorème 2 ci-dessus. Il reste à vérifier que  $\tilde{N}''$  est stable pour les  $\gamma_k$ ; or cela résulte de la formule (9) de l'Exposé 4.

La proposition 3 s'applique notamment à un produit tensoriel de plusieurs bar-constructions; les puissances divisées de ce produit tensoriel satisfont donc à (5), en vertu de la prop. 2.

En particulier : dans un produit tensoriel d'algèbres de polynômes divisées (cf n° 2), les puissances divisées satisfont à (5). Plus généralement :

Proposition 4 - Dans les hypothèses du théorème 2, si les puissances divisées de  $B$  et celles de  $C$  satisfont à (5), les puissances divisées de  $B \otimes C$  satisfont à (5).

Démonstration : il suffit de montrer que les  $x \in B \otimes C$  qui satisfont à (5) forment une sous-algèbre; autrement dit, si  $x$  et  $y$  sont des éléments de degrés pairs  $q$  et  $q' \geq 2$ , d'une algèbre graduée  $N$  et satisfont à (5), il en est de même de la somme  $x + y$  et du produit  $xy$ . Pour le voir, considérons les algèbres de polynômes divisées  $P(\xi, q)$  et  $P(\xi', q')$ , et définissons une application linéaire de  $P(\xi, q) \otimes P(\xi', q')$  dans  $N$ , en envoyant  $\gamma_k(\xi) \otimes \gamma_h(\xi')$  dans le produit  $\gamma_k(x) \gamma_h(y)$ . La condition (2) des puissances divisées entraîne que  $f$  est un homomorphisme d'algèbres graduées; puisque  $x$  et  $y$  satisfont à (5), la restriction de  $f$  à chacune des sous-algèbres  $P(\xi, q)$  et  $P(\xi', q')$  est compatible avec les puissances divisées. Il résulte alors des propriétés (3) et (4') des puissances divisées, que  $f$  est compatible avec les puissances divisées; comme tous les éléments de  $P(\xi, q) \otimes P(\xi', q')$  satisfont à (5), (5) est vérifiée par tous les éléments de l'image de  $f$ , et en particulier par  $x + y$  et par  $xy$ .

Théorème 3 : Soit  $(C, Q, P)$  une construction anticommutative (au sens strict), et  $(A, N, M, \tilde{N})$  une construction spéciale, anticommutative au sens strict, munie de puissances divisées. Soit  $f : C \rightarrow A$  un DGA-homomorphisme,

et soient  $g : P \rightarrow M$  et  $\bar{g} : Q \rightarrow N$  les homomorphismes spéciaux définis par  $f$  (Exp. 4, th.5). Si  $Q$  est munie de puissances divisées compatibles avec la différentielle de  $P$ , alors  $\bar{g}$  est compatible avec les puissances divisées.

Démonstration : observons d'abord qu'on ne suppose pas que  $C$  soit munie de puissances divisées. L'application  $\bar{g}$  est composée de  $Q \rightarrow \tilde{N} \rightarrow N$ , dont la première est la restriction de  $g$  à  $Q$ , et la seconde est la restriction à  $N$  de la projection  $M \rightarrow N$ , qui est compatible avec les puissances divisées (prop.1). Il suffit donc de montrer que, pour  $x \in Q$ , de degré pair  $\geq 2$ , on a

$$g(\gamma_k(x)) = \gamma_k(g(x)).$$

Or les deux membres sont dans  $\tilde{N}$ , puisque  $\tilde{N}$  est stable pour  $\gamma_k$ .

Il suffit donc de montrer l'égalité des différentielles, et ceci fournit une démonstration par récurrence sur  $k$ .

#### 7.- Puissances divisées en caractéristique $p$ .

On suppose désormais que l'on a  $p = 0$  dans l'anneau de base  $\Lambda$ ,  $p$  désignant un entier premier. Soit  $N$  une algèbre graduée anticommutative munie de puissances divisées; on a donc  $x^p = 0$  pour tout  $x \in N$  de degré pair  $\geq 2$ , d'après la relation (11).

On suppose en outre que les puissances divisées de  $N$  satisfont à (5). Les propriétés arithmétiques élémentaires des coefficients binomiaux donnent alors

$$(5') \quad \gamma_k(\gamma_p(x)) = \gamma_{kp}(x) \text{ pour tout } k, \text{ en caractéristique } p.$$

Ceci s'écrit aussi  $\gamma_{kp} = \gamma_k \circ \gamma_p$ . On en déduit, par récurrence sur l'entier  $i$ ,

$$\gamma_p^i = \gamma_p \circ \dots \circ \gamma_p \quad (i \text{ fois}).$$

Soit  $k = k_0 + k_1 p + \dots + k_i p^i$  le développement  $p$ -adique de  $k$  ( $k_0 < p$ ,  $k_1 < p$ , ...,  $k_i < p$ ). la formule (2) donne, compte tenu de (5') :

$$(15) \quad \gamma_k(x) = \gamma_{k_0}(x) \cdot \gamma_{k_1}(\gamma_p(x)) \dots \gamma_{k_i}(\gamma_p^i(x)).$$

D'autre part,  $\gamma_{k_i}(y) = (1/k_i!) y^{k_i}$ , de sorte que toutes les opérations  $\gamma_k$

sont déterminées par la structure multiplicative de  $N$  et par l'unique opération  $\gamma_p$  ("puissance  $p$ -ième divisée"). On observera que, d'après (4'), on a

$$(16) \quad \gamma_p(xy) = 0 \text{ pour } \deg(x) > 0 \text{ et } \deg(y) > 0.$$

La relation (15) peut être interprétée comme donnant la structure de l'algèbre des polynômes divisée (à coefficients modulo  $p$ ) :

notons  $Q_p(y)$  le quotient de l'algèbre des polynômes ordinaires à un générateur  $y$ , par l'idéal engendré par  $y^p$  ("algèbre des polynômes tronquée").

Alors

$$P(y ; 2q) \approx Q_p(y) \otimes Q_p(\gamma_p(y)) \otimes \dots \otimes Q_p(\gamma_{p^i}(y)) \otimes \dots$$

(produit tensoriel infini d'algèbres).

### 8.- Puissances divisées en caractéristique 2.

Lorsque  $p = 2$ , ce qui précède reste valable : tout se ramène à l'opération  $\gamma_2$  ("carré divisé"). Mais on peut faire davantage. Nous dirons (lorsque  $p = 2$ ) qu'une algèbre graduée est strictement anticommutative si elle est anticommutative (i.e : commutative) et si en outre  $x^2 = 0$  pour tout  $x$  de degré  $> 0$ . Exemple : la bar construction  $\overline{\mathcal{B}}(A)$  d'une  $A$  anticommutative est strictement anticommutative (Exp. 4, th. 4, (iv)).

Reprenons alors le théorème 1 ; en caractéristique 2, si  $A$  est strictement anticommutative,  $\gamma_k(x)$  se définit pour tout  $x \in \overline{\mathcal{B}}_q(A)$  tel que  $q \geq 2$  ( $q$  pair ou impair), ainsi que pour les  $x \in \overline{\mathcal{B}}_1(A)$  tels que  $(dx)^2 = 0$  dans  $A$ . Ces  $x$  forment un sous-module. Les propriétés (1) à (6) restent valables ; (4') se précise comme suit :

$$(4'') \quad \text{pour } k \geq 2, \quad \begin{cases} \gamma_k(xy) = 0 & \text{si } \deg(x) > 0 \text{ et } \deg(y) > 0, \\ \gamma_k(xy) = x^k \gamma_k(y) & \text{si } \deg(x) = 0. \end{cases}$$

L'algèbre des polynômes divisée  $P(y ; q)$  est définie pour tout  $q \geq 1$ , pair ou impair. La formule (15) donne sa structure :

$$P(y ; q) \approx E(y, q) \otimes E(\gamma_2(y) ; 2q) \otimes \dots \otimes E(\gamma_{2^i}(y) ; 2^i q) \otimes \dots$$

(produit tensoriel d'algèbres extérieures) : c'est l'algèbre extérieure ayant pour générateurs  $y, \gamma_2(y), \dots, \gamma_{2^i}(y), \dots$ .

Exercice : soit une DGA-algèbre  $A$  strictement anticommutative ; si  $a \in A$  est de degré  $> 0$ , ou si  $a$  de degré 0 satisfait à  $a^2 = (\xi a)^2$ , on a, dans la bar construction de  $A$ ,  $\gamma_k([a]) = [a, \dots, a]$  ( $k$  fois). Si  $a$  et  $b$  sont des éléments quelconques de  $A$ , on a

$$\gamma_k([a, b]) = [a, b, \dots, a, b] \quad (k \text{ fois}).$$

Définition d'un système de puissances divisées : soit  $N$  une algèbre graduée strictement anticommutative. On dit que  $N$  est munie d'un système

de puissances divisées si on a attaché une suite d'éléments  $\gamma_k(x)$  à chaque  $x \in N$  de degré  $\geq 2$ , et à un certain sous-module de  $N_1$ , ces  $\gamma_k$  devant satisfaire à (1), (2), (3) et (4''), éventuellement à (5). Si de plus  $N$  est sous-algèbre graduée d'une algèbre différentielle graduée (strictement anticommutative), on dit que les puissances divisées de  $N$  sont compatibles avec la différentielle de  $M$  si la condition (6) est satisfaite.

Alors le théorème 2 s'étend à ce cas (démonstration inchangée).

Quant à la proposition 1, elle subsiste, ainsi que sa démonstration, pour les puissances divisées des éléments de degré  $\geq 2$ .

Elle subsiste aussi pour les puissances divisées des éléments de degré 1, si les  $\gamma_k$  sont définis pour tous les éléments de degré 1 de  $\Delta$  et de  $N$ .

Application : soit  $A$  une DGA-algèbre, strictement anticommutative (en caractéristique 2). Alors, pour  $n \geq 2$ ,  $\overline{\mathcal{B}}^{(n-1)}(A)$  est strictement anticommutative et munie de puissances divisées. Pour  $n \geq 2$ ,  $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$  n'a pas d'élément  $\neq 0$  de degré 1, donc les puissances divisées de  $\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A)$  passent à l'homologie  $H_*(\overline{\mathcal{B}}^{(n)}(A))$ . De plus, si  $A$  est de degré 0 et si  $a^2 = (\epsilon a)^2$  pour tout  $a \in A$ , les puissances divisées sont définies pour tous les éléments de degré  $\geq 1$  de  $\overline{\mathcal{B}}^{(1)}(A)$  et passent à l'homologie.

En particulier : les algèbres d'Eilenberg-MacLane  $H_*(\Pi, n; Z_2)$  sont canoniquement munies de puissances divisées satisfaisant à (1), (2), (3), (4'') et (5). Ces puissances divisées  $\gamma_k(x)$  sont définies pour les  $x$  de degré  $> 0$  si  $n \geq 2$ ; pour  $n = 1$ , elles sont définies pour les  $x$  de degré  $\geq 2$ , ainsi que pour les éléments de  $H_1(\Pi, 1; Z_2)$  situés dans l'image de  ${}_2\Pi$  par la suspension.

(Ce dernier point se voit comme suit : les  $\gamma_k$  sont définis pour tous les éléments de degré 1 de  $H_1({}_2\Pi, 1; Z_2)$ , qui s'envoie biunivoquement dans  $H_1(\Pi, 1; Z_2)$ ).