MÉCANISATIONS--ÉTUDE AXIOMATIQUE DES SUITES SPECTRALES (D'APRÈS D. PUPPE)

Par

Minato YASUO

La note se divise en dix paragraphes:

1. Mécanisations
2. Suite spectrale associée à un mécanisé
3. Limite
4. Mécanisés gradués
5. Mécanisés bigradués
6. Anneaux mécanisés gradués
7. Anneaux mécanisés bigradués
8. Modules mécanisés sur un anneau mécanisé
9. Algèbres mécanisées
10. Appendice: exemples

Dans toute la suite, $\mathbb{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels; $\mathbb{Z}$ désigne le groupe additif des entiers rationnels, et $\mathbb{Z}^2$ désigne le produit $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$.

1. Mécanisations

Soit E un groupe commutatif, sa loi de groupe étant notée additivement. Sur l'ensemble produit $E \times E$, on définit alors une addition par

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$

et cette addition définit sur $E \times E$ une structure de groupe commutatif ("groupe produit de E et de lui-même"). Soient

$$\mathrm{pr}_1 : E \times E \rightarrow E \quad \text{et} \quad \mathrm{pr}_2 : E \times E \rightarrow E$$

les projections canoniques $(x, y) \mapsto x$ et $(x, y) \mapsto y$, respectivement. Nous appelons <u>mécanisation</u> sur E toute suite $(G_r)_{r \in \mathbb{N}}$ de sous-groupes de $E \times E$, satisfaisant aux axiomes suivants:

(MÉC_{1a}) $\mathrm{pr}_1(G_{r+1}) = \mathrm{pr}_1(G_r \cap (E \times \{0\}))$ pour tout $r \in \mathbb{N}$;

(MÉC_{1b}) $\mathrm{pr}_1(G_0) = E$;

(MÉC_{2a}) $\mathrm{pr}_2(G_r) = \mathrm{pr}_2(G_{r+1} \cap (\{0\} \times E))$ pour tout $r \in \mathbb{N}$;

(MÉC_{2b}) $\mathrm{pr}_2(G_0 \cap (\{0\} \times E)) = \{0\}$;

(MÉC_3) $\mathrm{pr}_1(G_s) \supset \mathrm{pr}_2(G_t)$ pour tout $s \in \mathbb{N}$ et tout $t \in \mathbb{N}$.

Nous appelons <u>groupe commutatif mécanisé</u> tout groupe commutatif muni d'une mécanisation.

De façon analogue, on peut plus généralement formuler la notion de "groupe mécanisé non nécessairement commutatif"(*). Dans ce qui suit, nous nous bornons cependant à considérer le cas commutatif, et sauf mention expresse du contraire, nous notons additivement la loi de groupe d'un groupe commutatif donné.

Soient E, E' deux groupes commutatifs, et f un homomorphisme de E dans E'. L'application produit

(*) **(added 2018)** —In such a generalization, we add the following axiom (where e denotes the neutral element of the group E) :
(MÉC_4) $\mathrm{pr}_2(G_r)$ is a *normal* subgroup of $\mathrm{pr}_1(G_r \cap (E \times \{e\}))$ for all $r \in \mathbb{N}$.

$$f \times f : E \times E \to E' \times E'$$

définie par $(f \times f)(x, y) = (f(x), f(y))$, est alors un homomorphisme de $E \times E$ dans $E' \times E'$. Soient maintenant $(G_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une mécanisation sur E et $(G'_r)_{r \in \mathbb{N}}$ une mécanisation sur E'. Nous disons que f est compatible avec ces mécanisations si, pour tout $r \in \mathbb{N}$, on a $(f \times f)(G_r) \subset G'_r$, c'est-à-dire si, pour tout $r \in \mathbb{N}$ et tout couple $(x, y) \in G_r$, on a $(f(x), f(y)) \in G'_r$.

Nous appelons morphisme de groupes mécanisés d'un groupe mécanisé E dans un groupe mécanisé E' tout homomorphisme de E dans E' compatible avec les mécanisations de E et E'.

Étant donné un groupe commutatif quelconque E, on peut définir une mécanisation $(G_r)_{r \in \mathbb{N}}$ sur E en posant $G_r = E \times \{0\}$ pour chaque $r \in \mathbb{N}$; nous disons que cette mécanisation est triviale. Évidemment, tout homomorphisme d'un groupe trivialement mécanisé dans un groupe trivialement mécanisé est un morphisme de groupes mécanisés.

2. Suite spectrale associée à un mécanisé

Soient E un groupe commutatif mécanisé, et $(G_r)_{r \in \mathbb{N}}$ sa mécanisation. Pour chaque $r \in \mathbb{N}$, posons $Z_r = pr_1(G_r)$ et $B_{r+1} = pr_2(G_r)$. Posons de plus $B_0 = \{0\}$. Remarquons d'abord que par définition:

1° $(Z_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est une suite décroissante de sous-groupes de E, telle que $Z_0 = E$;

2° $(B_r)_{r \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante de sous-groupes de E, telle que $B_0 = \{0\}$;

3° $Z_s \supset B_t$ pour tout $s \in \underset{\sim}{N}$ et tout $t \in \underset{\sim}{N}$;

4° pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$, on a

$$pr_1(G_r) = Z_r, \qquad pr_1(G_r \cap (E \times \{0\})) = Z_{r+1},$$
$$pr_2(G_r) = B_{r+1}, \quad pr_2(G_r \cap (\{0\} \times E)) = B_r$$

et

$$Z_r \times B_{r+1} \supset G_r \supset Z_{r+1} \times B_r = G_r \cap (Z_{r+1} \times E) = G_r \cap (E \times B_r).$$

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
E & E \times E \arrow[l, "pr_1"'] \arrow[r, "pr_2"] & E \\
Z_r \arrow[u, "\text{injection canonique}"'] \arrow[d, "\text{surjection canonique}"'] & G_r \arrow[l, "p_r"'] \arrow[r, "q_r"] \arrow[u, "\text{injection canonique}"'] \arrow[d, "\text{surjection canonique}"'] & B_{r+1} \arrow[u, "\text{injection canonique}"'] \arrow[d, "\text{surjection canonique}"'] \\
Z_r/Z_{r+1} & G_r/(Z_{r+1} \times B_r) \arrow[l, "\alpha_r"] \arrow[r, "\beta_r"'] & B_{r+1}/B_r
\end{tikzcd}$$

où p_r et q_r sont respectivement définis par $p_r(x, y) = x$ et $q_r(x, y) = y$, et où α_r et β_r sont les homomorphismes respectifs déduits de p_r et q_r par passage aux quotients. Alors

$$p_r(G_r) = pr_1(G_r) = Z_r,$$
$$p_r^{-1}(Z_{r+1}) = G_r \cap pr_1^{-1}(Z_{r+1}) = Z_{r+1} \times B_r,$$
$$q_r(G_r) = pr_2(G_r) = B_{r+1},$$
$$q_r^{-1}(B_r) = G_r \cap pr_2^{-1}(B_r) = Z_{r+1} \times B_r.$$

Les homomorphismes α_r et β_r sont donc bijectifs. Posons maintenant $E_r = Z_r/B_r$, et soit d_r l'endomorphisme de E_r rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc} E_r & \xrightarrow{\quad d_r \quad} & E_r \\ \Big\downarrow {\scriptstyle \text{surjection canonique}} & & \Big\uparrow {\scriptstyle \text{injection canonique}} \\ Z_r/Z_{r+1} & \xrightarrow[\beta_r \circ \alpha_r^{-1}]{\qquad} & B_{r+1}/B_r \end{array}$$

On a alors

$$\mathrm{Ker}(d_r) = Z_{r+1}/B_r, \quad \mathrm{Im}(d_r) = B_{r+1}/B_r$$

et

$$\mathrm{Ker}(d_r)/\mathrm{Im}(d_r) = (Z_{r+1}/B_r)/(B_{r+1}/B_r) \simeq Z_{r+1}/B_{r+1} = E_{r+1}. \quad (*)$$

On obtient ainsi une "suite spectrale" $(E_r, d_r)_{r\in\mathbb{N}}$; nous disons que cette suite spectrale est <u>associée</u> au groupe mécanisé E.

Soient E' un second groupe commutatif mécanisé, $(G'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ sa mécanisation, et posons $Z'_r = \mathrm{pr}_1(G'_r)$, $B'_{r+1} = \mathrm{pr}_2(G'_r)$ et $B'_o = \{0\}$. Soit $(E'_r, d'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite spectrale associée à E'. Soit f un morphisme de groupes mécanisés de E dans E'. Alors

$$f(Z_r) \subset Z'_r, \quad f(B_r) \subset B'_r,$$

donc f définit, par restriction et passage aux quotients, un homomorphisme f_r de $E_r = Z_r/B_r$ dans $E'_r = Z'_r/B'_r$. Notons que les diagrammes

---

(∗) Note (2012) —Here, the following four conditions are equivalent:
(i) $d_r = 0$; (ii) $Z_r = Z_{r+1}$; (iii) $B_{r+1} = B_r$;
(iv) $G_r = M \times N$ for some subgroups M and N of E.
Note that if (iv) holds then :
$$Z_r = \mathrm{pr}_1(G_r) = M = \mathrm{pr}_1(G_r \cap (E \times \{0\})) = Z_{r+1},$$
$$B_{r+1} = \mathrm{pr}_2(G_r) = N = \mathrm{pr}_2(G_r \cap (\{0\} \times E)) = B_r.$$

$$\begin{array}{ccc} E_r & \xrightarrow{f_r} & E'_r \\ \Big\downarrow{\scriptstyle d_r} & & \Big\downarrow{\scriptstyle d'_r} \\ E_r & \xrightarrow[f_r]{} & E'_r \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{Ker}(d_r)/\mathrm{Im}(d_r) & \xrightarrow{\text{homomorphisme déduit de } f_r} & \mathrm{Ker}(d'_r)/\mathrm{Im}(d'_r) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle \text{isomorphisme canonique}} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \text{isomorphisme canonique}} \\ E_{r+1} & \xrightarrow[f_{r+1}]{} & E'_{r+1} \end{array}$$

sont commutatifs. On obtient ainsi un "morphisme de suites spectrales" $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ de $(E_r, d_r)_{r\in\mathbb{N}}$ dans $(E'_r, d'_r)_{r\in\mathbb{N}}$; nous disons que c'est associé à f.

3. Limite

Soient E un groupe commutatif mécanisé, et $(G_r)_{r\in\mathbb{N}}$ sa mécanisation. Alors, en posant

$$Z_\infty = \bigcap_{r\in\mathbb{N}} pr_1(G_r), \quad B_\infty = \bigcup_{r\in\mathbb{N}} pr_2(G_r)$$

et

$$E_\infty = Z_\infty/B_\infty,$$

on obtient le "terme E_∞" de la suite spectrale associée à E.

Soient E' un second groupe commutatif mécanisé, $(G'_r)_{r\in\underset{\sim}{N}}$ sa mécanisation, et posons $Z'_\infty = \bigcap_{r\in\underset{\sim}{N}} pr_1(G'_r)$, $B'_\infty = \bigcup_{r\in\underset{\sim}{N}} pr_2(G'_r)$ et $E'_\infty = Z'_\infty / B'_\infty$. Soit f un morphisme de groupes mécanisés de E dans E'. Alors

$$f(Z_\infty) \subset Z'_\infty , \quad f(B_\infty) \subset B'_\infty ,$$

donc f définit, par restriction et passage aux quotients, un homomorphisme f_∞ de E_∞ dans E'_∞.

4. Mécanisés gradués

Soient E un groupe commutatif gradué, et $(E_n)_{n\in\underset{\sim}{Z}}$ sa graduation. Soit $E(-1)$ (resp. $E(1)$) le groupe gradué obtenu par décalage de -1 (resp. de 1) de la graduation de E, c'est-à-dire le groupe E gradué par la famille $(E_{n-1})_{n\in\underset{\sim}{Z}}$ (resp. $(E_{n+1})_{n\in\underset{\sim}{Z}}$), et soit $E \times E(-1)$ (resp. $E\times E(1)$) le produit gradué des groupes gradués E et $E(-1)$ (resp. E et $E(1)$), c'est-à-dire le groupe produit $E \times E$ gradué par la famille $(E_n \times E_{n-1})_{n\in\underset{\sim}{Z}}$ (resp. $(E_n \times E_{n+1})_{n\in\underset{\sim}{Z}}$). Nous disons qu'une mécanisation $(G_r)_{r\in\underset{\sim}{N}}$ sur le groupe E est <u>homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible</u> avec la graduation de E si, pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$, G_r est un sous-groupe gradué de $E \times E(-1)$ (resp. de $E \times E(1)$).

Nous appelons <u>groupe commutatif mécanisé gradué de type homologique (resp. de type cohomologique)</u> tout groupe commutatif gradué muni d'une mécanisation homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible avec sa graduation.

Soient E un groupe commutatif mécanisé gradué de type homologique (resp. de type cohomologique), $(G_r)_{r\in\mathbb{N}}$ sa mécanisation, et posons $Z_r = pr_1(G_r)$, $B_{r+1} = pr_2(G_r)$ et $B_0 = \{0\}$. Soit $(E_r, d_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite spectrale associée à E. Alors, pour tout $r\in\mathbb{N}$, Z_r et B_r sont des sous-groupes gradués de E, et d_r est un endomorphisme gradué de degré -1 (resp. de degré 1) du groupe gradué quotient $E_r = Z_r/B_r$.

Soient E' un second groupe commutatif mécanisé gradué de type homologique (resp. de type cohomologique), et $(E'_r, d'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ la suite spectrale associée à E'. Soient $m\in\mathbb{Z}$, f un homomorphisme gradué de degré m de E dans E' compatible avec les mécanisations, et $(f_r)_{r\in\mathbb{N}}$ le morphisme de suites spectrales de $(E_r, d_r)_{r\in\mathbb{N}}$ dans $(E'_r, d'_r)_{r\in\mathbb{N}}$ associé à f. Alors, pour tout $r\in\mathbb{N}$, f_r est un homomorphisme gradué de degré m de E_r dans E'_r.

5. Mécanisés bigradués

Par analogie avec la notion de "groupe mécanisé monogradué", on peut en outre formuler celle de "groupe mécanisé bigradué":

Soient E un groupe commutatif bigradué, et $(E_{i,j})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ sa bigraduation. Pour chaque $r\in\mathbb{N}$, soit $E(-r, r-1)$ (resp. $E(r, 1-r)$) le groupe bigradué obtenu par décalage de $(-r, r-1)$ (resp. de $(r, 1-r)$) de la bigraduation de E, c'est-à-dire le groupe E bigradué par $(E_{i-r,j+r-1})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$ (resp. par $(E_{i+r,j-r+1})_{(i,j)\in\mathbb{Z}^2}$), et soit $E\times E(-r, r-1)$ (resp. $E\times E(r, 1-r)$) le produit bigradué des groupes bigradués E et $E(-r, r-1)$ (resp. E et $E(r, 1-r)$), c'est-à-dire le groupe produit $E \times E$ bigradué par $(E_{i,j} \times E_{i-r,j+r-1})_{(i,j)\in \mathbb{Z}^2}$ (resp. par $(E_{i,j} \times E_{i+r,j-r+1})_{(i,j)\in \mathbb{Z}^2}$). Nous disons qu'une mécanisation $(G_r)_{r\in \mathbb{N}}$ sur le groupe E est <u>homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible</u> avec la bigraduation de E si, pour tout $r \in \mathbb{N}$, G_r est un sous-groupe bigradué de $E \times E(-r, r-1)$ (resp. de $E \times E(r, 1-r)$).

Un <u>groupe commutatif mécanisé bigradué de type homologique (resp. de type cohomologique)</u> est un groupe commutatif bigradué muni d'une mécanisation homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible avec sa bigraduation.

Soient E un groupe commutatif mécanisé bigradué de type homologique (resp. de type cohomologique), $(G_r)_{r\in \mathbb{N}}$ sa mécanisation, et posons $Z_r = pr_1(G_r)$, $B_{r+1} = pr_2(G_r)$ et $B_0 = \{0\}$. Soit $(E_r, d_r)_{r\in \mathbb{N}}$ la suite spectrale associée à E. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, Z_r et B_r sont des sous-groupes bigradués de E, et d_r est un endomorphisme bigradué de bidegré $(-r, r-1)$ (resp. de bidegré $(r, 1-r)$) du groupe bigradué quotient $E_r = Z_r/B_r$.

Soient E' un second groupe commutatif mécanisé bigradué de type homologique (resp. de type cohomologique), et $(E'_r, d'_r)_{r\in \mathbb{N}}$ la suite spectrale associée à E'. Soient $(h, k) \in \mathbb{Z}^2$, f un homomorphisme bigradué de bidegré (h, k) de E dans E' compatible avec les mécanisations, et $(f_r)_{r\in \mathbb{N}}$ le morphisme de suites spectrales de $(E_r, d_r)_{r\in \mathbb{N}}$ dans $(E'_r, d'_r)_{r\in \mathbb{N}}$ associé à f. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, f_r est un homomorphisme bigradué de bidegré (h, k) de E_r dans E'_r.

6. Anneaux mécanisés gradués

Nous définissons les "anneaux mécanisés gradués" comme suit:

Étant donnés un anneau gradué E et une mécanisation $(G_r)_{r\in \mathbb{N}}$ sur le groupe additif E, nous disons que cette mécanisation est <u>homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible</u> avec la structure d'anneau gradué de E si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $(G_r)_{r\in \mathbb{N}}$ est homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible avec la graduation de E;

(ii) pour tout $r \in \mathbb{N}$, tout $(x, y) \in G_r$ tel que $x \in E$ soit homogène, et tout $(x', y') \in G_r$, on a

$$(xx', yx' + (-1)^{\deg(x)}xy') \in G_r,$$

où $\deg(x)$ désigne le degré de x;

(iii) $(1, 0) \in G_r$ pour tout $r \in \mathbb{N}$.

Un <u>anneau mécanisé gradué de type homologique (resp. de type cohomologique)</u> est un anneau gradué muni d'une mécanisation homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible avec sa structure d'anneau gradué. Si E et E' sont deux anneaux mécanisés gradués, un <u>morphisme d'anneaux mécanisés gradués</u> de E dans E' est un morphisme d'anneaux gradués de E dans E' compatible avec les mécanisations.

Soient E un anneau mécanisé gradué de type homologique (resp. de type cohomologique), $(G_r)_{r\in \mathbb{N}}$ sa mécanisation, et posons $Z_r = pr_1(G_r)$, $B_{r+1} = pr_2(G_r)$ et $B_0 = \{0\}$. Soit $(E_r, d_r)_{r\in \mathbb{N}}$ la suite spectrale associée à E. Alors, pour tout $r \in \mathbb{N}$, Z_r est un sous-anneau gradué de E, B_r est un idéal bilatère gradué de Z_r, et d_r est une antidérivation de degré -1 (resp. de degré 1) de l'anneau gradué quotient $E_r = Z_r/B_r$.

Soient E' un second anneau mécanisé gradué, et $(E'_r, d'_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ la suite spectrale associée à E'. Soient f un morphisme d'anneaux mécanisés gradués de E dans E', et $(f_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ le morphisme de suites spectrales de $(E_r, d_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ dans $(E'_r, d'_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ associé à f. Alors, pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$, f_r est un morphisme d'anneaux gradués de E_r dans E'_r.

7. Anneaux mécanisés bigradués.

On peut en outre considérer les "anneaux mécanisés bigradués":

Étant donnés un anneau bigradué E et une mécanisation $(G_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ sur le groupe additif E, nous disons que cette mécanisation est <u>homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible</u> avec la structure d'anneau bigradué de E si les trois conditions suivantes sont satisfaites:

(i) $(G_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ est homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible avec la bigraduation de E;

(ii) pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$, tout $(x, y) \in G_r$ tel que $x \in E$ soit homogène, et tout $(x', y') \in G_r$, on a

$$(xx', yx' + (-1)^{\deg(x)} xy') \in G_r,$$

où $\deg(x)$ désigne le degré total de x;

(iii) $(1, 0) \in G_r$ pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$.

Un <u>anneau mécanisé bigradué de type homologique (resp. de type cohomologique)</u> est un anneau bigradué muni d'une mécanisation homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible avec sa structure d'anneau bigradué.

8. Modules mécanisés sur un anneau mécanisé

Soient A un anneau mécanisé gradué, et $(C_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ sa mécanisation. Nous appelons A-module mécanisé gradué de type homologique (resp. de type cohomologique) à gauche tout A-module gradué à gauche E muni d'une mécanisation $(G_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ satisfaisant aux deux conditions suivantes:

(i) $(G_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ est homologiquement (resp. cohomologiquement) compatible avec la graduation de E;

(ii) pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$, tout $(x, y) \in G_r$, et tout $(a, b) \in C_r$ tel que $a \in A$ soit homogène, on a

$$(ax,\ bx + (-1)^{\deg(a)} ay) \in G_r .$$

Nous laissons au lecteur le soin de définir de façon analogue les "modules mécanisés bigradués à gauche".

Soit $(A_r, p_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ la suite spectrale associée à l'anneau mécanisé gradué A, et soit $(E_r, d_r)_{r \in \underset{\sim}{N}}$ la suite spectrale associée au A-module mécanisé gradué à gauche E. Alors:

1° pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$, E_r est naturellement muni d'une structure de A_r-module gradué à gauche;

2° pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$, tout $u \in E_r$ et tout élément homogène $\lambda \in A_r$, on a

$$d_r(\lambda u) = p_r(\lambda)u + (-1)^{\deg(\lambda)} \lambda d_r(u).$$

On peut de même considérer les "modules mécanisés à droite".

9. Algèbres mécanisées

Nous laissons au lecteur le soin de formuler les notions d' "algèbre mécanisée", de "cogèbre mécanisée", de "bigèbre mécanisée", etc..

10. Appendice: exemples

Soit L^* une théorie cohomologique nonréduite. Soient X un CW-complexe, X_i son squelette de dimension i, et posons

$$E^{i,j}(X;\ L) = L^{i+j}(X_i,\ X_{i-1})$$

et

$$E^{*,*}(X;\ L) = \bigoplus_{i,j} E^{i,j}(X;\ L).$$

On sait (cf. [1] et [2]) qu'il existe alors une suite spectrale bigraduée canonique $(E_r^{*,*}(X;\ L),\ d_r)_{r\in \underset{\sim}{N}}$ telle que

$$E^{*,*}(X;\ L) = E_0^{*,*}(X;\ L) = E_1^{*,*}(X;\ L).$$

La construction de cette suite spectrale est comme suit:

1° Pour chaque entier $r \geqslant 1$ et chaque $(i,\ j) \in \underset{\sim}{Z}^2$, posons

$$Z_r^{i,j}(X;\ L) = \mathrm{Ker}(\delta\colon L^{i+j}(X_i,\ X_{i-1}) \longrightarrow L^{i+j+1}(X_{i+r-1},\ X_i)),$$

$$B_r^{i,j}(X;\ L) = \mathrm{Im}(\delta\colon L^{i+j-1}(X_{i-1},\ X_{i-r}) \longrightarrow L^{i+j}(X_i,\ X_{i-1})),$$

et notons $G_r^{i,j}(X;\ L)$ le produit fibré de $L^{i+j}(X_i,\ X_{i-1})$ et $L^{i+j+1}(X_{i+r},\ X_{i+r-1})$ sur $L^{i+j+1}(X_{i+r},\ X_i)$ relativement à l'homomorphisme cobord

$$\delta\colon L^{i+j}(X_i,\ X_{i-1}) \longrightarrow L^{i+j+1}(X_{i+r},\ X_i)$$

et l'homomorphisme

$$L^{i+j+1}(X_{i+r},\ X_{i+r-1}) \longrightarrow L^{i+j+1}(X_{i+r},\ X_i)$$

induit par $(X_{i+r},\ X_i) \subset (X_{i+r},\ X_{i+r-1})$.

2° Posons de plus

$$Z_0^{i,j}(X;\ L) = L^{i+j}(X_i,\ X_{i-1}),\quad B_0^{i,j}(X;\ L) = \{0\}$$

et

$$G_0^{i,j}(X;\ L) = L^{i+j}(X_i,\ X_{i-1}) \times \{0\}$$

pour chaque $(i,\ j) \in \underset{\sim}{Z}^2$.

Notons que, pour tout $r \in \underset{\sim}{N}$ et tout $(i, j) \in \underset{\sim}{Z}^2$, $G_r^{i,j}(X; L)$ est par définition un sous-groupe du groupe produit $E^{i,j}(X; L) \times E^{i+r,j-r+1}(X; L)$.

3° Posons enfin

$$Z_r^{*,*}(X; L) = \bigoplus_{i,j} Z_r^{i,j}(X; L), \quad B_r^{*,*}(X; L) = \bigoplus_{i,j} B_r^{i,j}(X; L)$$

et

$$G_r^{*,*}(X; L) = \bigoplus_{i,j} G_r^{i,j}(X; L)$$

pour chaque $r \in \underset{\sim}{N}$.

La suite $(G_r^{*,*}(X; L))_{r \in \underset{\sim}{N}}$ est alors une mécanisation sur $E^{*,*}(X; L)$, cohomologiquement compatible avec la bigraduation canonique de $E^{*,*}(X; L)$ et telle que

$$pr_1(G_r^{*,*}(X; L)) = Z_r^{*,*}(X; L), \quad pr_2(G_r^{*,*}(X; L)) = B_{r+1}^{*,*}(X; L).$$

La suite spectrale associée au groupe mécanisé $E^{*,*}(X; L)$ est celle d'Atiyah-Hirzebruch: $E_r^{*,*}(X; L) = Z_r^{*,*}(X; L)/B_r^{*,*}(X; L)$.

On peut de même vérifier que la suite spectrale de L-cohomologie pour une fibration $\xi = (Y, X, \pi)$ est "associée" à un groupe mécanisé $E^{*,*}(\xi; L)$ tel que

$$E^{i,j}(\xi; L) = L^{i+j}(\pi^{-1}(X_i), \pi^{-1}(X_{i-1})),$$

où $\pi^{-1}(X_i)$ est l'image réciproque du squelette X_i par la projection $\pi: Y \to X$.

Bibliographie

[1] M. F. ATIYAH and F. HIRZEBRUCH, Vector bundles and homogeneous spaces, Proc. Sympos. Pure Math., vol. 3, Amer. Math. Soc., 1961.

[2] H. CARTAN and S. EILENBERG, Homological algebras, Princeton University Press, 1956.

[3] S. MACLANE, An algebra of additive relations, Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 47 (1961), 1043-1051.

[4] S. MACLANE, Homology, Berlin-Göttingen-Heidelberg: Springer, 1963.

[5] D. PUPPE, Korrespondenzen in abelschen Kategorien, Math. Ann., 148 (1962), 1-30.

Additional remarks (April, 2018) :

(1) Using the terminology of my note, one can in fact say that :

Every spectral sequence is "isomorphic" to some spectral sequence associated to a mechanisation.

Thus, roughly speaking, **giving a spectral sequence amounts to giving a mechanisation.** On the basis of this principle, we can actually "reaxiomatise" the theory of spectral sequences, by making use of the notion of mechanisation. <u>This idea is originally due to **Dieter Puppe**, and his idea was advertised by **Saunders Mac Lane** in the early 1960's,</u> although, of course, they never used the term "mechanisation" adopted in my note.

(2) I am now preparing the following informal notes (written in English, Version_2018_xx_xx) :

"**Deblackboxification of spectral sequences**",

in which I shall explain in detail how the notion of mechanisation is related to the so-called "**Goursat's lemma**" (1889, cf. **MR1508819**) in basic group theory.