Haynes Miller

S. Ochanine

S^1-variétés spinorielles et genres elliptiques.

I. Exposé d'introduction (29 octobre 1985).

Avant-propos. Cet exposé sera informel et servira à la fois de plan et de motivation pour les exposés suivants. Je parlerai des résultats récents obtenus par Witten, Landweber, Stong, Bosari et moi-même. Tous ces résultats existent sous forme de preprints ou de notes manuscrites.

1. Théorème d'Atiyah-Hirzebruch. Je commencerai par un résultat classique d'Atiyah-Hirzebruch de 1970 :

Théorème. Si M^{4n} est une variété spinorielle connexe dans munie d'une action non-triviale du cercle S^1, alors $\hat{A}[M^{4n}] = 0$.

Ici $\hat{A}[M^{4n}]$ est le $\hat{A}$-genre défini par les formules :

$$\hat{A}[M] = \hat{\alpha}(M)[M]$$
$$\hat{\alpha}(M) = \prod (x_i/2)/\sinh(x_i/2)$$
$$p(M) = \prod (1+x_i^2).$$

Ce théorème admet une réciproque : si un nombre de Pontriaguine rationnel en dimension $4n$ s'annule pour toutes les variétés qui figurent dans l'énoncé, alors ce nombre est proportionnel à $\hat{A}$.

Présenté ainsi, le théorème est complet. C'est l'analyse de sa démonstration qui fait apparaître des aspects intéressants et ouvre la voie à de nouvelles recherches. Cette démonstration s'appuie sur le théorème de l'indice. En voici les grandes lignes :

Soit M^{2k} une variété riemannienne orientée, et soit $Q \to M^{2k}$ le $SO(2k)$-fibré principal des repères orthonormés sur M^{2k}. Par définition, une spin-structure sur M^{2k} est la donnée d'un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & Q \arrow[dl] \\ & M & \end{tikzcd}$$

où P est un $Spin(2k)$-fibré principal, u préserve les fibres et coïncide, sur chaque fibre, avec le revêtement double non-trivial

$$Spin(2k) \longrightarrow SO(2k).$$

Le groupe $Spin(2k)$ est un sous-groupe du groupe des éléments inversibles de l'algèbre de Clifford C_{2k} (c'est le sous-groupe des produits de vecteurs de $S^{2k-1} \subset R^{2k} \subset C_{2k}$ en nombre pair). L'algèbre complexifiée $C_{2k} \otimes \mathbb{C}$ est l'algèbre d'endomorphismes $End_{\mathbb{C}}(S)$ d'un espace vectoriel complexe S de dimension 2^k. $Spin(2k)$ a donc une représentation canonique dans S. Cette représentation n'est pas irréductible : on a $S = S^+ \oplus S^-$, où $S^\pm$ sont des représentations irréductibles.

Formons $V = P \times_{Spin(2k)} S$. C'est un fibré vectoriel complexe de fibre S sur M. L'opérateur de Dirac, qu'on définit à l'aide de la connexion riemannienne sur M, agit dans $\Gamma(V)$. Le noyau de D est un espace vectoriel H de dimension finie. C'est l'espace des "spineurs harmoniques". La $Z/2$-graduation de S en induit

une sur V : $V = V^+ \oplus V^-$, et D envoie $\Gamma(V^\pm)$ dans $\Gamma(V^\mp)$. On a donc $H = H^+ \oplus H^-$. Le théorème de l'indice dit que

$$\text{ind}\, D = \dim H^+ - \dim H^- = \hat{A}[M].$$

Supposons maintenant qu'un groupe de Lie compact G agit sur P et sur M de manière compatible. Alors H^+ et H^- sont canoniquement des représentations complexes de G et on définit un indice équivariant

$$\text{ind}_G\, D = [H^+] - [H^-] \in R(G)$$

tel que

$$\dim(\text{ind}_G\, D) = \text{ind}\, D.$$

Prenons le cas de $G = S^1$. A chaque représentation de S^1 correspond son caractère

$$\chi : S^1 \longrightarrow C$$

et chacun sait que c'est un polynôme de Laurent en $z \in S^1$. Ainsi, l'indice équivariant de D s'identifie avec un polynôme de Laurent $\chi(z)$ tel que

$$\chi(1) = \text{ind}\, D = \hat{A}[M]$$

Considéré comme fonction de $z \in \mathbb{C} \cup \{\infty\}$, c'est une fonction rationnelle dont les pôles éventuels sont 0 et ∞. Si l'action du cercle est non-triviale, il existe une formule à la Lefschetz qui exprime $\chi(z)$ en fonction des variétés fixes de l'action de S^1. Il découle de cette formule que $\chi(z) \to 0$ pour $z \to 0$ et $z \to \infty$, ce qui prouve que $\chi(z) \equiv 0$, donc $\chi(1) = \hat{A}[M] = 0$.

2. Conjecture de Witten. Ed Witten, un physicien de Princeton, s'est intéressé à l'indice d'un autre opérateur elliptique, l'opérateur de Rarita-Schwinger, qui est l'opérateur de Dirac D_T dans $\Gamma(V \otimes T_c)$, où T_c est le complexifié du fibré tangent de M. L'indice de D_T est donné par

$$\mathrm{ind}\, D_T = ch\, T_c \cdot \hat{\mathcal{A}}(M)[M].$$

Lorsque G agit sur P et M, on a également un indice équivariant

$$\mathrm{ind}_G\, D_T \in R(G)$$

qu'on peut identifier avec un caractère $\chi : G \to \mathbb{C}$.

Conjecture. χ est constant.

En fait, Witten a vérifié cette conjecture pour $M = G/H$, où H est un sousgroupe fermé de G tel que $w_2(G/H) = 0$.

Il est assez facile de voir que seul le cas $G = S^1$ est important, le cas général s'en déduisant aisément.

Il ne semble pas que la démonstration d'Atiyah-Hirzebruch s'adapte à ce cas. Alors Witten a pensé qu'on pourrait chercher une démonstration à l'aide des théories de bordismes des S^1-variétés spinorielles.

3. La thèse de L. Borsari. L'ennui, c'est que jusqu'à récemment, on ne savait pas grand chose sur ce cobordisme-là. Le problème a été proposé par P. Landweber à L. Borsari comme sujet de thèse. Comme le cas général est difficile, L. Borsari s'est restreinte aux S^1-variétés semi-libres, i.e. telles que S^1 agit librement sur le complément des points fixes.

Les S^1-variétés spinorielles connexes se répartissent en deux groupes : les variétés de type pair et les variétés de type impair. Pour le voir, prenons un repère orthonormé en un point $p \in M$.

Comme M est spinorielle, on peut munir ce repère d'une orientation spinorielle, d'un "spin", i.e. le relever dans $\mathcal{L}$. Sous l'action de S^1, le point p voyage dans M entraînant le repère et son spin. Au retour du voyage, on retrouve le même repère, mais pas nécessairement le même spin. Si le spin est le même, on dit que l'action est paire. Dans le cas contraire, l'action est impaire. Comme M est connexe, cela ne dépend pas du choix de $p \in M$.

Il est facile de voir que les groupes de bordisme SF_n^{Spin} des S^1-variétés spinorielles semi-libres se décomposent en somme directe

$$SF_n^{Spin} = SF_n^{Spin,\,ev} \oplus SF_n^{Spin,\,odd}$$

et l'on peut étudier les deux composantes séparément. Borsari a entièrement décrit les groupes

$$SF_n^{Spin,\,odd} \otimes \mathbb{Q}$$

et en a donné les générateurs. L'étude du cas pair se heurte à la nécessité de décrire l'idéal I de $\Omega^{Spin} \otimes \mathbb{Q} = \Omega^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ engendré par les projectivisations de fibrés complexes de dimension paire $\mathbb{C}P(\xi^{2k})$ sur une variété close orientée B.

Cet idéal est d'ailleurs directement lié aux questions qui nous intéressent :

Théorème. (L. Borsari). L'idéal I coïncide avec l'idéal engendré par les variétés spinorielles admettant une action de S^1 de type impair.

Pour déterminer I on peut d'abord chercher dans I des générateurs de l'anneau de polynômes $\Omega^{SO} \otimes \mathbb{Q}$. Il est assez facile de voir qu'on peut le faire en dimensions $12, 16, 20, \ldots$ et que c'est impossible en dimensions 4 et 8. On a donc dans I un idéal $(x_{12}, x_{16}, x_{20}, \ldots)$.

Conjecture (Landweber - Stong). $I = (x_{12}, x_{16}, \ldots)$.

Dans sa thèse, L. Borsari vérifie cette conjecture en dimensions ≤ 56. Sa méthode consiste à démontrer, pour les éléments de I, des relations entre les nombres de Pontriaguine. Par exemple, le théorème d'Atiyah - Hirzebruch montre que $\hat{A}(I) = 0$, car toute action de type impair est non-triviale. De même, on a pour la signature,

$$\tau(\mathbb{C}P(\xi^{2k})) = \tau(\mathbb{C}P_{2k-1})\,\tau(B) = 0,$$

d'où $\tau(I) = 0$.

4. Les relations de Landweber–Stong. Landweber et Stong ont entrepris de démontrer d'autres relations de ce type, si possible, toutes les relations, ce qui permettrait de démontrer la conjecture. Ils ont d'abord remarqué que l'annulation de $\hat{A}[\mathbb{C}P(\xi^{2k})]$ figure déjà dans l'article de Borel–Hirzebruch de 1958-59, puis ont généralisé leur méthode pour démontrer d'autres relations.

Borel et Hirzebruch examinent la situation suivante :

Considérons un groupe de Lie compact connexe G, et soit $P \to B$ un G-fibré principal. Pour tout sous-groupe $U \subset G$ fermé connexe de rang maximal, on peut former le fibré

$$\pi : P/U \longrightarrow B$$

de fibre G/U. Par exemple, si $G = U(2k)$ et $U = U(1) \times U(2k-1)$, on a $P/U = \mathbb{C}P(\xi^{2k})$, où ξ^{2k} est le fibré complexe associé à P.

Le fibré tangent à P/U s'écrit

$$\pi^* T(B) \oplus T_f \quad ,$$

T_f étant le fibré des vecteurs tangents aux fibres de π.

Donc

$$\hat{\mathfrak{A}}(P/U) = \pi^* \hat{\mathfrak{A}}(B) \cdot \hat{\mathfrak{A}}(T_f) .$$

Il existe une opération

$$\natural : H^*(P/U) \longrightarrow H^*(B)$$

de degré $-\dim(G/U)$, "intégration sur la fibre", où, si vous préférez, homomorphisme de Gysin. On a :

$$\hat{\mathfrak{A}}(P/U)[P/U] = \hat{\mathfrak{A}}(P/U)^{\natural}[B]$$

et

$$\hat{\mathfrak{A}}(P/U)^{\natural} = \hat{\mathfrak{A}}(B) \cdot \hat{\mathfrak{A}}(T_f)^{\natural} .$$

Donc il suffit de prouver $\hat{\mathfrak{A}}(T_f)^{\natural} = 0$, pour démontrer $\hat{A}[P/U] = 0$.

Considérons maintenant l'algèbre de Lie $L(G)$ qu'on supposera munie d'une métrique invariante. Soit $T \subset U \subset G$ un tore maximal. Alors T a une représentation orthogonale (représentation adjointe) dans $L(G)$. On peut écrire

$$L(G) = V_1 \oplus \cdots \oplus V_r \oplus L(T) ,$$

somme orthogonale, où V_i sont des représentations irréductibles non-triviales, donc de dimension 2, de T. Prenons un $V = V_i$. Alors il existe une forme

$a \in L(T)^*$ telle que $s \in T$ agit sur V par

$$\begin{pmatrix} \cos 2\pi a(s') & , -\sin 2\pi a(s') \\ \sin 2\pi a(s') & , \cos 2\pi a(s') \end{pmatrix}$$

où $\exp(s') = s$. On obtient ainsi un ensemble $\{\pm a_1, \dots, \pm a_k\}$ de formes sur $L(T)$. Ce sont les <u>racines</u> de G.

Borel et Hirzebruch ont établi une relation entre la géométrie des racines et la nullité de $\hat{\alpha}(T_f)^q$. C'est ainsi qu'il prouvent $\hat{A}[P/U] = 0$, pour $G = U(2k)$, $U = U(1) \times U(2k-1)$.

En généralisant cette méthode, Landweber et Stong démontrent l'annulation sur I des nombres

$$ch\, T_c \cdot \hat{\alpha}(M)\ [M]$$
$$ch(\Lambda^2 T_c) \cdot \hat{\alpha}(M)\ [M]$$
$$ch(\Lambda^3 T_c + T_c \otimes T_c) \cdot \hat{\alpha}(M)\ [M]$$

et de quelques autres. Ils obtiennent, en particulier, la nullité de l'indice de Rarita-Schwinger pour les S^1-variétés spinorielles de type impair.

5. <u>Genres elliptiques</u>. Ces résultats de Landweber

et Stong sont très beaux, mais ils ne suffisent pas à démontrer la conjecture.

Prenons le problème par un autre bout : peut-on décrire tous les genres multiplicatifs

$$\varphi : \Omega^{SO} \to \mathbb{Q}$$

qui s'annulent sur $(x_{12}, x_{16}, \dots)$? Voici la réponse que j'ai trouvé :

<u>Théorème</u>. Soit

$$g(u) = \sum_{i \geq 0} \frac{\varphi(\mathbb{C}P_{2i})}{2i+1} u^{2i+1}$$

le logarithme de φ. Alors φ s'annule sur $(x_{12}, x_{16}, \dots)$ si et seulement si

$$g(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{R(u)}},$$

où $R(u) = 1 - 2\delta u^2 + \varepsilon u^4$ $(\delta, \varepsilon \in \mathbb{Q})$, autrement dit si $g(u)$ est donné par une intégrale elliptique de première espèce.

Appelons <u>elliptique</u> tout genre φ qui satisfait aux conditions du théorème. Par exemple, $\hat{A}$ et la signature sont elliptiques.

On dira que φ est non-dégénéré, si $R(u)$

a quatre racines distinctes (dans $\mathbb{C}$), i.e. si $\varepsilon^2 \neq \delta \neq 0$. Dans ce cas, $g^{-1}(u)$ est le développement en $u=0$ d'une fonction elliptique $\theta(u)$ d'ordre 2. En utilisant un calcule de résidus simple, j'ai démontré que dans ce cas $\varphi(\mathbb{C}P(\xi^{2k}))=0$. La conjecture de Landweber-Stong en découle aisément.

6. Relations non-multiplicatives. Cette méthode permet de démontrer également des relations non-multiplicatives dans I.

On remarque d'abord que les résultats précédents restent vrais si l'on remplace $\mathbb{Q}$ par une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative Λ arbitraire.

Considérons le cas de l'indice de Rarita-Schwinger, qui n'est pas multiplicatif. Posons $\Lambda = \mathbb{Q}[t]/(t^2)$ et définissons

$$\varphi : \Omega^{SO} \to \Lambda$$

par

$$\varphi([M]) = \hat{A}[M] + t\, ch(T_c - \dim T_c)\, \hat{\mathfrak{A}}(M)[M].$$

Il est facile de voir que φ est un Λ-genre multiplicatif et que son logarithme est donné par

$$g(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{1+\left(\frac{1}{4}-6t\right)u^2 - tu^4}}$$

C'est donc un Λ-genre elliptique, et $\varphi(I)=0$. La nullité de l'indice de Rarita-Schwinger sur I en découle immédiatement.

Les autres relations de Landweber-Stong peuvent être traités de la même manière. Par exemple, pour

$$ch(\Lambda^2 T_c)\, \hat{\mathfrak{A}}(M)[M]$$

il faut prendre $\Lambda = \mathbb{Q}[t]/(t^3)$ et combiner astucieusement ce nombre, $\hat{A}$ et $ch\, T_c\, \hat{\mathfrak{A}}(M)[M]$ pour obtenir un Λ-genre elliptique.

7. Classes ρ_k de Stong. Bob Stong a poussé cette technique jusqu'au bout :

Soient $s_\omega(\pi)$ les classes de Pontriaguine dans la KO-théorie. Ce sont des classes de $KO(BSO)$ telles que

$$ch(s_\omega(\pi)\otimes\mathbb{C}) = s_\omega(e^{x_1}+e^{-x_1}-2,\dots,e^{x_i}+e^{-x_i}-2,\dots)$$

où

$$p = \prod(1+x_i^2).$$

Stong cherche des classes

$$\rho_k = \pi_k + \sum_{0<|\omega|<k} a_\omega^k\, s_\omega(\pi)$$

$(a_\omega^k \in \mathbb{Q})$ telles que

(i) $\rho = 1 + \rho_1 + \rho_2 + \cdots$ est une classe multiplicative ;

(ii) le genre $\varphi : \Omega^{SO} \longrightarrow \mathbb{Q}[[t]]$ donné par

$$\varphi([M]) = \sum_k ch(\rho_k \otimes \mathbb{C})\, \hat{\alpha}(M)[M] \cdot t^k$$

est elliptique.

Ce problème se réduit à la recherche de solutions d'une équation différentielle. Stong donne une solution particulière de cette équation en imposant des conditions supplémentaires. Le calcul explicite des premiers ρ_k donne :

$$\rho_1 = \pi_1$$
$$\rho_2 = \pi_2$$
$$\rho_3 = \pi_3 + s_2(\pi)$$
$$\rho_4 = \pi_4 + s_{2,1}(\pi) + 3\, s_2(\pi)$$

etc. L'observation de ces classes et des quelques suivantes fait apparaître un phénomène remarquable : tous les coefficients a_ω^k qu'on obtient sont entiers ! C'était trop beau pour être une coïncidence. David et Gregory Chudnovsky, à qui Landweber et Stong ont soumis la question, ont trouvé une explication

à ce phénomène. Ils ont, en fait, trouvé pour les classes ρ_k des expressions explicites en utilisant les fonctions modulaires elliptiques. Plus précisément, ils ont démontré que le genre

$$\varphi : \Omega^{SO} \longrightarrow \mathbb{Q}[[t]]$$

correspondant à la série caractéristique

$$\frac{x/2}{\sinh(x/2)} \cdot f_t(e^x + e^{-x} - 2)$$

satisfait aux conditions (i) et (ii) si f_t est de la forme

$$f_t(y) = \prod_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1 - y\, q^{2n-1}/(1-q^{2n-1})^2}{1 - y\, q^{2n}/(1-q^{2n})^2} \right\}$$

où q est une série en t telle que

$$q = -t + o(t).$$

On peut prendre $q = -t$. Les classes que Stong a construites correspondent à

$$t = -\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1) \frac{q^{2n+1}}{1 - q^{2n+1}}.$$

Tous les coefficients étant entiers, les coefficients de $f_t(y)$ le sont également.

8. Genres elliptiques équivariants. Les résultats que j'ai mentionné jusqu'ici donnent une idée assez complète des relations entre les nombres de Pontriaguine des S^1-variétés spinorielles semi-libres de type impair. Par ailleurs, ils révèlent le rôles particulier que jouent dans cette théorie les genres elliptiques. Dans l'optique de la conjecture de Witten, nous souhaitons maintenant examiner les genres elliptiques équivariants. Comme il est douteux, faux sans doute, que l'on puisse naturellement associer à un genre elliptique un opérateur elliptique, la notion de genre équivariant nécessite une définition spéciale. Plusieurs approches sont possibles.

La première est celle de I.M. Krichever qui à chaque genre rationnel $\varphi : \Omega^{SO} \to \mathbb{Q}$ associe un élément $\varphi^{S^1}(M) \in K(BS^1) \otimes \mathbb{Q}$ (M étant une S^1-variété orientée). Si $\varepsilon : K(BS^1) \otimes \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ est l'augmentation naturelle, on a

$$\varepsilon \varphi^{S^1}(M) = \varphi(M).$$

Il semble (mais je n'en ai pas encore la preuve formelle) que si φ est l'indice d'un opérateur elliptique, $\varphi^{S^1}(M)$ coïncide avec l'indice equivariant via l'isomorphisme $\hat{R}(S^1) \otimes \mathbb{Q} \cong K(BS^1) \otimes \mathbb{Q}$.

Je ne vais pas reproduire la définition de $\varphi^{S^1}(M)$, car ce genre est mal adapté aux genres elliptiques.

Voici une autre définition, "cohomologique", d'un genre équivariant. Sous la forme ci-dessous, elle appartient à P.S. Landweber :

Soit M une S^1-variété orientée. Alors on peut former le fibré de Borel

$$\tilde{M} \to BS^1,$$

où $\tilde{M} = ES^1 \times_{S^1} M$. On note T_f le fibré des vecteurs tangents aux fibres de $\tilde{M}$.

Soit $\varphi : \Omega^{SO} \to \mathbb{Q}$ un genre rationnel et soit $\Phi \in H^{**}(BSO; \mathbb{Q})$ la classe multiplicative qui lui correspond. On a :

$$\varphi(M) = \Phi(T(M))[M].$$

On définit alors

$$\varphi(M,z) = \Phi(T_f)^{\natural} \in H^{**}(BS^1; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}[[z]].$$

On voit tout de suite que

$$\varphi(M,0) = \varphi(M).$$

D'autre part, on vérifie aisément que

$$ch\, \varphi^{S^1}(M) = \varphi(M,z)$$

de sorte que $\varphi^{S^1}(M)$ et $\varphi(M,z)$ sont nuls ou constants en même temps, et on peut les utiliser indifféremment.

Théorème. (?) Soit φ un genre elliptique sur une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative Λ, et M une S^1-variété spinorielle. Alors

(i) $\varphi(M,z) = \text{const}$

(ii) $\varphi(M,z) = 0$, si l'action de S^1 est impaire.

Remarques. (1) J'ai démontré ce théorème dans l'hypothèse que M est munie d'une structure faiblement complexe invariante par S^1. Bob Stong m'a récemment écrit pour dire que selon lui, un résultat d'Erik Ossa permet d'éviter cette hypothèse. Je n'ai pas encore la certitude absolue que cela soit le cas, mais c'est plus que probable.

(2) Stong a démontré qu'un genre multiplicatif φ satisfaisant à la condition (i) est nécessairement elliptique.

(3) La conjecture de Witten découlerait immédiatement de ce théorème si l'on savait que $\varphi^{S^1}(M)$ est l'indice équivariant, lorsque φ est

l'indice d'un opérateur elliptique.

(4) Enfin, ce théorème a pour corollaire que l'idéal I est l'image dans $\Omega^{Spin} \otimes \mathbb{Q}$ du bordisme des S^1-variétés spinorielles de type impair, non-nécessairement semi-libres, cf. le théorème de L. Bosari.

9. Quelques mots sur la démonstration. On considère d'abord un $\mathbb{C}$-genre elliptique non-dégénéré. Dans ce cas $g^{-1}(u)$ est la série de Taylor en $u=0$ d'une fonction elliptique $\theta(u)$ d'ordre 2. Soit 2Ω son réseau de périodes. Alors $\theta(u)$ a deux classes de zéros simples, 0 et $\omega \in \Omega$.

On démontre alors que $\varphi(M,z)$ est le développement en $z=0$ d'une fonction elliptique $H(M,z)$, nécessairement unique, 2Ω-périodique et régulière en 0. Les pôles de $H(M,z)$ sont de la forme $m\omega/n$ $(m,n \in \mathbb{Z})$.

On démontre ensuite que

$$H(M, z+\omega) = \pm H(M,z),$$

où le signe est $+$ ou $-$ selon que l'action de S^1 est paire ou impaire. En particulier, $H(M,z)$ est régulière en $z=\omega$.

Enfin, on élimine les autres pôles possibles de $H(M,z)$, ce qui achève la démonstration pour les $\mathbb{C}$-genres elliptiques non-dégénérés.

Le cas général est obtenu en approchant un Λ-genre elliptique arbitraire par des combinaisons linéaires de $\mathbb{C}$-genres elliptiques non-dégénérés.

S^1-variétés spinorielles et genres elliptiques.

II. Démonstration de la conjecture de Landweber - Stong (12 novembre 1985)

Cet exposé ~~contient~~ a 2 parties : la démonstration du théorème de Borsari qu'on trouvera ds ces notes, et la démonstration de la conjecture de Landweber - Stong qu'on trouvera dans le preprint "Variétés spinorielles"

1. Variétés spinorielles et actions de S^1. Soit ξ un fibré vectoriel réel sur une base B. On suppose que ξ est muni d'une métrique et d'une orientation. Alors, il existe un $SO(n)$-fibré principal des repères orthonormés positivement orientés Q dans ξ. Une structure spinorielle dans ξ est par définition la donnée d'un diagramme commutatif :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[rr, "u"] \arrow[dr] & & Q \arrow[dl] \\ & B & \end{tikzcd}$$

où P est un $Spin(n)$-fibré principal et où u préserve les fibres et coïncide avec le revêtement double canonique $Spin(n) \to SO(n)$ sur chaque fibre.

Il est facile de vérifier que ξ admet une Spin-structure si et seulement si $w_2(\xi) = 0$ et que dans ce cas il y a autant de Spin-structures (à isomorphisme près) qu'il y a d'éléments dans $H^1(B;F_2)$.

Si M^n est une variété riemannienne orientée, une Spin-structure sur M^n, c'est une Spin-structure dans le fibré tangent TM^n.

Supposons que M^n soit une variété spinorielle et que S^1 opère par isométries sur M^n. Le groupe additif $R = L(S^1)$ opère également sur M^n via l'exponentielle. Cette action en induit une sur Q et, comme $u : P \to Q$ est un revêtement, on a aussi une action canonique de R sur P.

Si la variété M est connexe, on a deux possibilités : – soit $1 \in R$ opère par id sur P (on dit alors que l'action de S^1 sur M est <u>paire</u>) ;

– soit $1 \in R$ opère par $-\mathrm{id}$ sur P (et c'est alors une action <u>impaire</u>).

Dans le premier cas, on voit que S^1 agit sur P et sur M de façon compatible. Dans le second cas, c'est le revêtement double $\tilde{S}^1$ de S^1 qui agit sur P de façon compatible avec l'action de S^1 sur M^n.

Soit $T \in S^1$ l'élément d'ordre 2. Il se relève canoniquement en une isométrie $\hat{T}$ de P. Alors il est clair que

$\hat{T}$ est d'ordre 2 $\Leftrightarrow$ l'action est paire ;

$\hat{T}$ est d'ordre 4 $\Leftrightarrow$ l'action est impaire.

Supposons que T agit librement sur M^n. On peut former M/T variété orientée. Si l'action est paire, le diagramme

$$\begin{tikzcd} P/\hat{T} \arrow[rr] \arrow[dr] & & Q/T \arrow[dl] \\ & M/T & \end{tikzcd}$$

définit une Spin-structure sur M/T qui induit la Spin structure donnée sur M. Inversement, si M/T a une structure spinorielle qui induit la structure donnée, l'action est paire.

<u>Exemples</u>. 1. Soit $M = S^1$ et l'action de S^1 sur M est la multiplication. Comme $Q = S^1$, il y a deux structures spinorielles sur S^1. Pour la première, P est connexe, l'action est impaire, et la structure spinorielle se prolonge sur le disque. Pour la seconde, P a deux composantes, l'action est paire, et S^1 représente l'élément non-nul du groupe $\Omega_1^{Spin} = F_2$.

2. Soit $M = S^{2n-1}$ $(n>1)$. Il n'y a qu'une Spin-structure. On a $M/T = RP^{2n-1}$.

Cette variété est spinorielle si et seulement si n est pair. Donc la multiplication complexe $S^1 \times S^{2n-1} \to S^{2n-1}$ définit une action paire si et seulement si n est pair.

Notons que $S^{2n-1}/S^1 = \mathbb{C}P^{n-1}$ est spinorielle si et seulement si n est pair. Ce fait est général : on démontre que si S^1 opère librement sur une variété spinorielle M, et si l'action est <u>paire</u>, M/S^1 est canoniquement spinorielle.

3. Si M est une S^1-variété spinorielle, son bord ∂M est également une S^1-variété spinorielle <u>du même type</u>.

4. Plus généralement, si M est une S^1-variété spinorielle (connexe) et $N \subset M$ est une sousvariété connexe invariante par S^1 et qui admet une trivialisation normale S^1-équivariante (i.e. par des champs de repères S^1-invariants), alors N est canoniquement spinorielle et a le même type que M.

5. Supposons que l'action de S^1 est <u>semilibre</u>, i.e. libre en dehors des points fixes. On sait que si F est une composante de points fixes et ν son fibré normal, ν admet une

structure complexe canonique pour laquelle S^1 agit dans ν par multiplication complexe. En particulier, la codimension de F est paire.

Soit F^{n-2k} la réunion des composantes de codimension $2k$, et ν le fibré normal à F^{n-2k}. Alors, d'après les exemples ci-dessus on a :

~~(a) le fibré en disques $D(\nu)$ a une structure~~ spinorielle du même type que M ;

(b) le fibré en sphères $S(\nu) = \partial D(\nu)$ est spinoriel et a le même type que M ;

(c) pour tout point $p \in F^{n-2k}$, si ν_p est la fibre de ν au-dessus de p, $S(\nu_p) = S^{2k-1}$ est spinorielle et du même type que M. Pour $k > 1$ cela entraîne k pair $\Leftrightarrow$ l'action est paire.

Pour $k = 1$, c'est encore vrai, car on peut voir aisément que la Spin structure de $S(\nu_p)$ se prolonge sur $D(\nu_p)$, donc l'action est impaire.

En résumé, pour une action semilibre on a

l'action est paire $\Leftrightarrow$ toutes les composantes non-vides de points fixes ont des codimensions $\equiv 0 \pmod 4$

l'action est impaire $\Leftrightarrow$ toutes les composantes non-vides de points fixes ont des codimensions $\equiv 2 \pmod 4$.

2. Théorème de L. Borsari. Avant d'aborder ce théorème, considérons le cas, plus simple des S^1-variétés semi-libres orientées, étudié par Uchida.

Soit M une telle variété et $\nu_1, \dots, \nu_r$ sont les fibrés normaux aux composants des points fixes de S^1. La projectivisation $\mathbb{C}P(\nu_i \oplus \varepsilon)$ (ε - fibré trivial complexe de dimension 1) a une action semi-libre

$$\mu : S^1 \times \mathbb{C}P(\nu_i \oplus \varepsilon) \longrightarrow \mathbb{C}P(\nu_i \oplus \varepsilon)$$

donnée par $\mu(\lambda, [u,v]) = [\lambda u, v]$.

Théorème (Uchida).

$$[M] = \sum_{i=1}^{r} [\mathbb{C}P(\nu_i \oplus \varepsilon), \mu]$$

dans le groupe de bordisme des S^1-variétés orientées semilibres.

Si M a une structure spinorielle et l'action est impaire, les fibrés $\nu_i \oplus \varepsilon$ ont des dimensions complexes paires. Notons $I \subset \Omega^{SO} \otimes \mathbb{Q} = \Omega^{Spin} \otimes \mathbb{Q}$ l'idéal engendré par les projectivisations $[\mathbb{C}P(\xi^{2k})]$ de fibrés complexes de dimension paire. Soit K l'idéal du même anneau, engendré par les S^1-variétés spinorielles semilibres de type impair.

Nous venons de voir que $I \supset K$.

Théorème (L. Borsari). $I = K$.

Démonstration. Considérons le morphisme

$$\rho_k : \Omega_*^{SO}(BU_{2k}) \otimes \mathbb{Q} \longrightarrow I$$

défini par

$$\rho_k(M, f) = [\mathbb{C}P(f^* \gamma_{2k})],$$

où $f : M \to BU_{2k}$ représente un élément de $\Omega_*^{SO}(BU_{2k})$ et où γ_{2k} est le fibré classifiant sur BU_{2k}. Par définition, I est la somme des images des ρ_k ($k \geq 1$).

On va décrire des générateurs de $\Omega_*^{SO}(BU_{2k}) \otimes \mathbb{Q}$. On a une surjection

$$\Omega_*^{SO}(BU_1) \otimes \cdots \otimes \Omega_*^{SO}(BU_1) \longrightarrow \Omega_*^{SO}(BU_{2k}).$$

$\Omega_*^{SO}(BU_1)$ est un Ω_*^{SO}-module libre avec des générateurs en chaque dimension paire. Pour pouvoir prendre un couple (M^{2i}, γ) comme générateur en dimension $2i$ pour $\Omega_*^{SO}(BU_1) \otimes \mathbb{Q}$ il faut et il suffit que l'on ait $c_1^{2i}(\gamma)[M] \neq 0$.

Nous prendrons $(\mathbb{C}P_i, \eta_i^{a_i})$, où
$a_i = 2$ si i impair, $a_i = 1$ si i pair ($\eta^2 = \eta \otimes \eta$).
Nous en déduisons que les classes

$$[\mathbb{C}P_{i_1} \times \cdots \times \mathbb{C}P_{i_{2k}}, \eta_{i_1}^{a_{i_1}} \times \cdots \times \eta_{i_{2k}}^{a_{i_{2k}}}]$$

engendrent $\Omega_*^{SO}(BU_{2k}) \otimes \mathbb{Q}$. Donc, les classes

$$[\mathbb{C}P(\eta_{i_1}^{a_{i_1}} \times \cdots \times \eta_{i_{2k}}^{a_{i_{2k}}})]$$

engendrent I.

On peut toujours écrire ces classes

$$[\mathbb{C}P(\xi \oplus \zeta)],$$

où ξ et ζ sont de dimension complexe impaire et $w_2(\xi \oplus \zeta) = w_2(\text{base})$. On a :

(a) $\mathbb{C}P(\xi \oplus \zeta)$ a une structure spinorielle. Pour le voir, remarquons que $S(\xi \oplus \zeta)$ est spinorielle. La multiplication complexe est de type pair, car pour tout point p de la base $S(\xi_p \oplus \zeta_p) = S^{4n-1}$. Donc $\mathbb{C}P(\xi \oplus \zeta) = S(\xi \oplus \zeta)/S^1$ est spinorielle.

(b) l'action $S^1 \times \mathbb{C}P(\xi \oplus \zeta) \longrightarrow \mathbb{C}P(\xi \oplus \zeta)$ définie par $(\lambda, [u,v]) \longrightarrow [\lambda u, v]$ est semi-libre et impaire, car les points fixes $\mathbb{C}P(\xi) \cup \mathbb{C}P(\zeta)$ ont des codimensions $\equiv 2 \pmod 4$.

Le théorème en découle.

La suite de l'exposé cetera suit d'assez près le preprint. "Sur les genres mult. définis par les intégrales elliptiques."

S. Ochanine.

S^1-variétés spinorielles et genres elliptiques.

III. Relations de Stong-Landweber. (le 26 novembre)

Dans l'exposé précédent, nous avons déterminé tous les genres multiplicatifs rationnels qui s'annulent sur l'idéal I de $\Omega^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ engendré par les classes $[\mathbb{C}P(\xi)]$, où ξ est un fibré vectoriel complexe de dimension paire sur une base orientée. On a vu (théorème de Bossew) que I est aussi l'idéal engendré par les variétés spinorielles qui admettent une action S^1 semi-libre de type impair. Aujourd'hui, nous allons étudier d'autres relations, non-multiplicatives, entre les nombres de Pontriaguine rationnels de telles variétés.

1. Indice de Rarita-Schwinger. Pour mieux comprendre ce qui va suivre, on va d'abord considérer un cas simple, celui de l'indice de Rarita-Schwinger. C'est, vous vous en souvenez, le nombre caractéristique

$$ch\, T(M) \cdot \hat{\mathcal{A}}(M)[M]$$

où $ch\, T(M)$ est le caractère de Chern du complexifié du fibré tangent de M et où $\hat{\mathfrak{A}}(M)$ est défini par les formules habituelles :

$$\begin{cases} p(M) = \prod(1+x_i^2) \\ \hat{\mathfrak{A}}(M) = \prod \dfrac{x_i/2}{\sinh(x_i/2)} \end{cases}$$

Il est clair que l'indice de R.S. n'est pas multiplicatif, mais, comme je vous l'avait dit dans le premier exposé, on obtient un indice multiplicatif de la manière suivante :

Soit $\Lambda = \mathbb{Q}[t]/t^2$. C'est une $\mathbb{Q}$-algèbre commutative. On définit $\varphi : \Omega^{SO} \to \Lambda$ par

$$\varphi([M]) = \hat{\mathfrak{A}}(M)[M] + t\, ch(T - \dim T)\,\hat{\mathfrak{A}}(M)[M].$$

Il est clair que

(1) φ est multiplicatif

(2) $\varphi(M) = 0$ entraîne la nullité de R.S.

Il nous faut donc démontrer que φ est elliptique. Soit η le fibré canonique sur CP^∞ et $\Phi \in H^{**}(BSO;\Lambda)$ la classe de Hirzebruch qui correspond à φ. On a

$$\Phi(\eta) = \hat{\mathfrak{A}}(\eta) + t\, ch(\eta-2)\,\hat{\mathfrak{A}}(\eta)$$

$$= \frac{x/2}{\sinh x/2}\left(1 + t(e^x+e^{-x}-2)\right) = \frac{x}{g^{-1}(x)}$$

où $g(x)$ est le logarithme de φ. Rappelons que $ch(\eta-2)$ signifie la classe de Chern de $(\eta-2)\otimes\mathbb{C} = \eta+\bar{\eta} - 2_{\mathbb{C}}$, d'où $e^x+e^{-x}-2$.

Posons $u = g^{-1}(x)$, $v = 2\sinh(x/2)$.

Alors,

$$u = v(1+tv^2)^{-1} = v(1-tv^2),$$

car $v^2 = e^x+e^{-x}-2$. D'autre part

$$(v')^2 = 1+\frac{v^2}{4}$$

(puisque le logarithme de $\hat{A}$ est $\int_0^x dx/\sqrt{1+\frac{x^2}{4}}$).

Donc

$$(u')^2 = (v'-3tv^2v')^2 = (v')^2(1-6tv^2)$$
$$= \left(1+\frac{v^2}{4}\right)(1-6tv^2) = 1+\left(\frac14-6t\right)v^2 - \frac32 tv^4.$$

Comme $u^2 = v^2-2tv^4$ et $u^4=v^4$ mod t, on a

$$(u')^2 = 1+\left(\frac14-6t\right)u^2 - tv^4 = 1+\left(\frac14-6t\right)u^2 - tu^4.$$

Donc

$$g(x) = \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1+\left(\frac14-6t\right)x^2-tx^4}}$$

et φ est elliptique.

2. Classes et nombres caractéristiques en KO-théorie.

Pour généraliser cette méthode, nous aurons besoin de classes de Pontriaguine en KO-théorie.

Soit ξ un fibré vectoriel réel sur X.

On définit un élément

$$\lambda_t(\xi) \in KO(X)[[t]]$$

par

$$\lambda_t(\xi) = 1 + \lambda^1(\xi)t + \lambda^2(\xi)t^2 + \cdots$$

où $\lambda^k(\xi)$ est la classe de $\Lambda^k\xi$ dans $KO(\xi)$.

Comme $\quad \lambda_t(\xi \oplus \zeta) = \lambda_t(\xi)\lambda_t(\zeta)$

ceci se prolonge sur $KO(X)$. Par exemple, pour $\xi = \varepsilon^k$ fibré trivial de dimension k, on a

$$\lambda_t(\varepsilon^k) = (1+t)^k.$$

On définit des classes $\pi_i(\xi)$ de la manière suivante :

$$1 + \pi_1(\xi)u + \pi_2(\xi)u^2 + \cdots = \pi_u(\xi) = \lambda_t(\xi - \dim\xi)$$

où $\quad u = \dfrac{t}{(1+t)^2}$.

Ces classes sont stables : $\pi_i(\xi \oplus \varepsilon) = \pi_i(\xi)$.

Voici d'autres propriétés remarquables :

1) $\quad \pi_u(\xi \oplus \zeta) = \pi_u(\xi)\pi_u(\zeta)$.

2) $\quad$ pour $\xi = \eta$, on a

$$\pi_u(\eta) = \lambda_t(\eta - 2) = \frac{\lambda_t(\eta)}{(1+t)^2} = \frac{1 + \eta t + t^2}{(1+t)^2}$$

$$= 1 + (\eta - 2)u$$

donc $\quad \pi_1(\eta) = \eta - 2 \quad$ et $\quad \pi_i(\eta) = 0, \quad i > 1$

3) Plus généralement, si $\dim \xi = k$

$$\pi_u(\xi) = \frac{\lambda_t(\xi)}{(1+t)^k} = 1 + (\xi - k)t + \cdots$$
$$= 1 + (\xi - k)u + \cdots$$

donc $\quad \pi_1(\xi) = \xi - k$.

4) Pour $\omega = (i_1, \ldots, i_s)$ on introduit, de la manière habituelle des classes π_ω, telles que $\pi_{\underbrace{(1, \ldots, 1)}_{i}} = \pi_i$. Il est facile de vérifier que

$$\begin{cases} \pi_\omega(\eta) = 0, & \text{si } \omega \neq (i), \text{ et que} \\ \pi_{(i)}(\eta) = (\eta - 2)^i & (i \geq 0) \end{cases}$$

Pour toute variété orientée M et toute classe x, combinaison linéaire des π_ω, on posera

$$x[M] = \mathrm{ch}\, x \cdot \hat{A}(M)[M] \in \mathbb{Q}$$

où $x = x(TM)$.

Cette notation s'explique comme ceci : si M est spinorielle, il existe une orientation canonique de M dans la KO-théorie, donc $x[M]$ est défini comme élément de $KO^{-\dim M}(pt)$. Si l'on applique ch à cet élément on obtient exactement $\mathrm{ch}\, x \cdot \hat{A}(M)[M]$. Si $\dim M = 4k$, c'est un entier (pair pour k impair). Si M n'est qu'une variété orientée, $x[M]$ est un nombre rationnel.

3. Enoncé du théorème de Landweber Stong. Considérons le genre qu'on a construit dans 1 : on a

$$\varphi(M) = 1\cdot[M] + t\,\pi_1[M].$$

Nous voulons généraliser ceci : on pose $\Lambda = \mathbb{Q}[[t]]$

Théorème. Il existe des classes $(k \geq 0)$

$$\rho_k = \pi_k + \sum_{0<|\omega|<k} a^k_\omega \pi_\omega$$

telles que

(i) $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \pi_1$, et la classe

$$\rho_t = 1 + \rho_1 t + \cdots + \rho_k t^k + \cdots$$

est multiplicative, i.e. on a

$$\rho_k(\xi \oplus \zeta) = \sum_{i+j=k} \rho_i(\xi)\rho_j(\zeta)\,;$$

(ii) le genre $\varphi : \Omega^{SO} \to \Lambda$ défini par

$$\varphi(M) = \sum_{k\geq 0} \rho_k[M]\, t^k = \sum_{k \geq 0} \mathrm{ch}\rho_k\, \hat{A}(M)[M]\, t^k$$

est elliptique (sur Λ).

Corollaire. $[M] \in I$ si et seulement si

$$\mathrm{ch}\rho_k\, \hat{A}(M)[M] = 0$$

pour tout $k \geq 0$.

4. L'équation différentielle fondamentale. Nous voulons exprimer la condition (ii) en explicitant le logarithme de φ. Pour cela écrivons

$$\rho_t(\eta) = \sum \rho_k(\eta) t^k.$$

On a, pour $y = \eta - 2$

$$p_k(\eta) = \pi_k(\eta) + \sum_{0<|\omega|<k} a_\omega^k \, \pi_\omega(\eta) = \begin{cases} y, & k=1 \\ \sum_{i=1}^{k-1} a_{(i)}^k y^i & (k>1) \end{cases}$$

en vertu de n°2. Donc

$$p_t(\eta) = f_t(y) = 1 + yt + \sum_{k=2}^{\infty} p_k(y)\, t^k$$

où

$$p_k(y) = \sum_{i=1}^{k-1} a_{(i)}^k y^i$$

est un polynôme de degré $\leq k-1$.

On a alors

$$\frac{x}{g^{-1}(x)} = \frac{x/2}{\sinh x/2}\, f_t(e^x + e^{-x} - 2)$$

et nous voulons que $u = g^{-1}(x)$ satisfasse à une équation

$$(u')^2 = R(u) \qquad (1)$$

avec

$$R(u) = 1 + \delta u^2 + \varepsilon u^4, \quad \delta, \varepsilon \in \mathbb{Q}[[t]].$$

On a

$$u = \frac{2 \sinh x/2}{f_t(e^x + e^{-x} - 2)}$$

Posons $y = e^x + e^{-x} - 2$ (ce n'est pas tout-à-fait incorrect !) et $\sqrt{y} = 2 \sinh(x/2)$. Plus tard, on aura une équation d'où toutes les racines vont disparaître. Il est facile de voir que $(\sqrt{y})^2 = y$!

On a donc :

$$u = \frac{\sqrt{y}}{f_t(y)}$$

Pour écrire (1) on calcule u'_x :

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{1}{2\sqrt{y}} f_t(y) - \frac{\partial f_t(y)}{\partial y}\sqrt{y}}{f_t(y)^2} = \frac{\frac{1}{2} f_t(y) - y \frac{\partial f_t(y)}{\partial y}}{\sqrt{y}\; f_t(y)^2}$$

D'autre part,

$$\frac{\partial y}{\partial x} = e^x - e^{-x} = \sqrt{y^2 + 4y},$$

donc

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 = \frac{\left\{\frac{1}{2} f_t(y) - y \frac{\partial f_t(y)}{\partial y}\right\}^2}{f_t(y)^4} (y+4)$$

$$= 1 + \frac{\delta y}{f_t(y)^2} + \frac{\varepsilon y^2}{f_t(y)^4}.$$

Finalement on obtient :

(2) $$\boxed{\left\{ \frac{1}{2} f_t(y) - y \frac{\partial f_t(y)}{\partial y} \right\}^2 (y+4) = f_t(y)^4 + \delta y\, f_t(y)^2 + \varepsilon y^2}$$

Il nous faut trouver une solution $f_t(y), \delta(t), \varepsilon(t)$ telle que $f_t(y) = 1 + yt + \sum p_k(y) t^k$, avec les restrictions indiquées pour $p_k(y)$. Toute solution de ce type définit une classe pt qui satisfait aux exigences du théorème.

5. Deuxième forme du problème. L'équation (2) est difficile à manier. C'est pourquoi nous allons introduire des restrictions supplémentaires sur $f_t(y)$ afin de trouver une solution particulière.

(a) On a

$$p_k(y) = \sum_{i=1}^{k-1} a^k_{(i)} y^i \;;$$

on va chercher un $f_t(y)$ pour lequel $a^k_{(1)} = 0$ pour tout $(k \geq 2)$. Ceci n'est pas très important : remarquons que

$$t + \sum a^k_{(1)} t^k$$

est le coefficient de y dans $f_t(y)$. On obtient donc facilement ce qu'on veut par un changement de variable

$$t' = t + \sum a^k_{(1)} t^k.$$

(b) Ceci est plus restrictif : on cherchera $f_t(y)$ tel que

$$a^k_{(i)} = 0 \quad \text{pour} \quad i > \left[\frac{k+1}{2}\right],$$

autrement dit, on doit avoir

$$p_k(y) = \sum_{i=2}^{[\frac{k+1}{2}]} a^k_{(i)} y^i.$$

Ceci est équivalent à : le coefficient de y^j dans $f_t(y)$ est divisible par y^{2j-1}.

Une manière d'écrire ceci est

$$t\, f_t(y) = k(yt^2, t)$$

où

$$k(v,t) \in \mathbb{Q}[[v,t]].$$

Comme $f_t(y) = 1 + yt +$ termes divisibles par $y^2 t^3$,

on a $$\boxed{k(v,t) = t + v + \text{termes divisibles par } v^2}$$

Il nous reste à écrire (2) en termes de $k(v,t)$. Mais avant de le faire, remarquons que

$$f_t(y) = 1 + yt \mod y^2 t^2$$

et substituons ceci dans (2) que l'on va calculer modulo y^2t^2 : on a

$$\left\{\tfrac{1}{2}(1+yt)-yt\right\}^2(y+4) \equiv (1+yt)^4+\delta y(1+yt)^2+\varepsilon y^2 \pmod{y^2t^2}$$

En comparant les coefficients de y on a $\delta(0)=\frac{1}{4}$. Après quelques calculs élémentaires, on a

$$1+\delta y+\varepsilon y^2 \equiv 1+\left(\tfrac{1}{4}-6t\right)y - ty^2 \mod y^2t^2$$

On en déduit que

$$\begin{cases} \delta(t)=\frac{1}{4}-6t \\ \varepsilon(t)\equiv -t \mod t^2 \end{cases}$$

On remarque que en posant $t^2=0$ on obtient les valeurs de δ et ε du n°1. Mais, et <u>c'est plus important</u>, on a ici une valeur <u>exacte</u> pour $\delta(t)$. Nous avons éliminé $\delta(t)$ de notre problème !

Ecrivons maintenant (2) en termes de $k(v,t)$ et $\varepsilon(t)$. On a

$$t\,\frac{\partial f_t(y)}{\partial y} = \frac{\partial k(v,t)}{\partial v}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial k(v,t)}{\partial v}\cdot t^2$$

Donc, en multipliant (2) par t^4 on a :

$$(3)\qquad \boxed{\left\{\tfrac{1}{2}k - v\frac{\partial k}{\partial v}\right\}^2(v+4t^2) = k^4+\left(\tfrac{1}{4}-6t\right)k^2+\varepsilon v^2}$$

Notre problème est de trouver $k(v,t)$ et $\varepsilon(t)$ qui satisfont à (3) et tels que

$$k(v,t) = t+v + \text{termes divisibles par } v^2$$

6. <u>Résolution de l'équation (3).</u> Posons

$$(4)\qquad \theta(v,t) = \left\{\tfrac{1}{2}k - v\frac{\partial k}{\partial v}\right\}^2(v+4t^2) - k^4 - \left(\tfrac{1}{4}-6t\right)k^2 .$$

Nous voulons que $\theta(v,t)$ soit de la forme $\varepsilon(t)v^2$.

<u>Lemme 1.</u> Une série $\theta(v,t)$ est de la forme $\varepsilon(t)v^2$ ssi

$$2\theta - v\frac{\partial\theta}{\partial v} = 0$$

<u>Démonstration.</u> Posons $\theta(v,t)=\sum b_i(t)v^i$.

Alors $$\sum \left(2b_i(t) - i\,b_i(t)\right)v^i = 0$$

$\Longleftrightarrow$ $b_i(t)=0$ pour $i\neq 2$. $\square$

On applique maintenant ce lemme à (4). Un calcul élémentaire, mais un peu long donne pour $2\theta - v\frac{\partial\theta}{\partial v}$ l'expression :

$$\left\{\frac{1}{2}k - v\frac{\partial k}{\partial v}\right\}\left(2v^2(v+4t^2)\frac{\partial^2 k}{\partial v^2} - 4t^2 v\frac{\partial k}{\partial v} + k(4t^2+12tv-4k^2)\right)$$

Comme $k(v,t) = t + v +$ terme divisible par v^2,

$$\frac{1}{2}k - v\frac{\partial k}{\partial v} = \frac{1}{2}t + \text{terme divisible par } v,$$

donc $\neq 0$. Notre condition devient :

(5) $$\boxed{2v^2(v+4t^2)\frac{\partial^2 k}{\partial v^2} - 4t^2 v\frac{\partial k}{\partial v} + k(4t^2+12tv-4k^2) = 0}$$

Remarque. Posons $t=0$. On obtient

$$\begin{cases} 2v^3\dfrac{\partial^2 k(v,0)}{\partial v^2} - 4k(v,0)^3 = 0 \\ k(v,0) = v + o(v). \end{cases}$$

L'unique solution est $\dfrac{v}{1-v}$. Il nous faut donc chercher une solution de la forme

$$k(v,t) = t + \frac{v}{1-v} + t\varphi_1(v) + t^2\varphi_2(v) + \cdots$$

où $\varphi_i(v) \in v^2\mathbb{Q}[[v]]$. Une dernière transformation : on pose $k(v,t) = t + m(v,t)$. Alors (5) devient :

$$\boxed{\begin{aligned} &2v^2(v+4t^2)\frac{\partial^2 m}{\partial v^2} - 4t^2 v\frac{\partial m}{\partial v} + A(m) = 0 \\ &A(m) = 12t^2 v + (12tv - 8t^2)m - 12tm^2 - 4m^3 \end{aligned}}$$

On écrira $D(m)$ pour le terme de gauche de cette équation.

Proposition. Il existe une solution unique

$$m(v,t) = \frac{v}{1-v} + t\varphi_1(v) + \cdots$$

$$\varphi_i(v) \in v^2\mathbb{Q}[[v]]$$

de l'équation $D(m) = 0$.

Il est clair que ceci entraîne le théorème du n°3.

Démonstration. On pose $m_0 = \dfrac{v}{1-v}$. On a

$$D(m_0) \in t\,\mathbb{Q}[[v,t]].$$

Supposons qu'on a construit

$$m_{r-1} = \frac{v}{1-v} + t\varphi_1 + \cdots + t^{r-1}\varphi_{r-1}$$

avec $\varphi_i \in v^2\mathbb{Q}[[v]]$ et tel que

$$D(m_{r-1}) \in t^r\,\mathbb{Q}[[v,t]].$$

On cherche alors

$$m_r = m_{r-1} + t^r\varphi, \quad \varphi \in v^2\mathbb{Q}[[v]]$$

tel que $D(m_r) \in t^{r+1}\mathbb{Q}[[v,t]]$.

Calculons

$$D(m_{r+1} + t^2\varphi) \text{ modulo } t^{r+1}.$$

On a $$D(m_{r-1}+t^r\varphi) = D(m_{r-1}) + t^r\left(2v^3\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - 12\left(\frac{v}{1-v}\right)^2\varphi\right) \mod t^{r+1}$$

car dans $A(m_{r-1}+t^r\varphi)$ seul le terme $-4m^3$ donne des termes additionnels non-nuls :

$$-4(m_{r-1}+t^r\varphi)^3 \equiv -4\cdot 3t^r m_{r-1}^2 = -12t^r\left(\frac{v}{1-v}\right)^2.$$

On a

$$D(m_{r-1}) = t^r a(v) + \dots$$

Il nous faut donc trouver un φ tel que

$$\varphi(v) \in v^2\mathbb{Q}[[v]]$$

et

$$L(\varphi) = 2v^3\frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} - 12\left(\frac{v}{1-v}\right)^2\varphi = -a$$

On a :

Lemme 2. $a(v)$ divisible par v^3.

Démonstration. On pose $m_{r-1} = v + v^2\varphi_2(t) + \cdots$

Alors $D(m_{r-1}) = O(v^2)$ par un calcul direct modulo v^2.

Lemme 3. $L : v^2\mathbb{Q}[[v]] \to v^3\mathbb{Q}[[v]]$ est un isomorphisme.

Démonstration. On a

$$L(v^k) = 2k(k-1)v^{k+1} + o(v^{k+1})$$

et $2k(k-1) \neq 0$ pour $k \geq 2$. □

7. Démonstration du corollaire. On a vu la dernière fois que $\Omega^{SO}\otimes\mathbb{Q}$ a pour base

$$X, Y, Y_1 \dots Y_n \dots$$

où $Y_i \in I$, $X = \mathbb{C}P^2$, $Y = H_{3,2}$. D'autre part, si φ est elliptique de paramètres δ, ε, on a

$$\begin{cases} \delta = -\frac{1}{2}\varphi(\mathbb{C}P^2) \\ \varepsilon = \varphi(H_{3,2}) \end{cases}$$

revoir

Si $[M] = aX^{k-2i}Y^i \mod I$, on a

$$\varphi(M) = a(-2\delta)^{k-2i}\varepsilon^i.$$

Pour φ construit ici, on a

$$0 = \varphi(M) = a\left(-\frac{1}{2}+12t\right)^{k-2i}(-t)^i =$$

$$= \pm\frac{a}{2^{k-2i}}t^i + o(t^i) \iff a = 0 \quad □$$

IV. Résultats de D&G Chudnovsky
(28 janvier)

1. L'objet de notre sollicitude – les S^1-variétés spinorielles de type impair. J'en rappelle brièvement la définition : soit V une variété riemannienne et $Q \to V$ le SO_n-fibré principal (de ~~fibrés~~ repères orthonormés orientés). Une Spin-structure sur V est un diagramme

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "u"] \arrow[dr] & Q \arrow[d] \\ & V \end{tikzcd}$$

où $P \to V$ est un $Spin_n$-fibré principal et $u : P \to Q$ est un morphisme de fibrés qui coïncide sur chaque fibre avec le revêtement universel canonique de SO_n.

Une action de S^1 définit canoniquement une action de S^1 sur Q et une action de $\mathbb{R}$ sur P. L'action est paire ou impaire selon que $1 \in \mathbb{R}$ agit trivialement ou non sur Q.

2. On note $I \subset \Omega^{SO} \otimes \mathbb{Q}$ l'idéal engendré par les classes de variétés spinorielles qui admettent une action de S^1 de type impair. Nous avons décrit explicitement des générateurs de cet idéal. Le travail de Stong et Landweber dont j'ai parlé la dernière fois consistait à décrire I à l'aide de nombres caractéristiques dans la K-théorie réelle.

Rappelons qu'un fibré orienté ξ a des classes $\pi_i \in KO(\text{base})$ tels que

1) la classe $1 + \pi_1 + \cdots$ est multiplicative
2) $\pi_i(\xi + \underset{\text{trivial}}{\varepsilon}) = \pi_i(\xi)$
3) $\pi_i(\xi^2) = 0 \quad (i > 1)$, $\pi_1(\xi\ \cancel{+1}) = \xi - 2$
4) plus généralement, $\pi_1(\xi) = \xi - \dim_{\mathbb{R}} \xi \ldots$

On peut définir π_i explicitement par

$$\boxed{\begin{gathered} \pi_u = 1 + \pi_1 u + \cdots = \lambda_t(\xi - \dim \xi) \\ u = t/(1+t)^2 \end{gathered}}$$

Les résultats de Stong sont dans le théorème suivant

Théorème. Il existe des classes

$$\rho_k = \pi_k + \sum_{0 < |\omega| < k} a_\omega^k \pi_\omega \qquad a_\omega^k \in \mathbb{Q}$$

telles que

(i) $\rho_0 = 1$, $\rho_1 = \pi_1$ et la classe ...

$$\rho_t = \sum \rho_k t^k$$

est multiplicative, i.e.

$$\rho_t(\xi \oplus \eta) = \rho_t(\xi)\rho_t(\eta).$$

(ii) le genre $\varphi : \Omega^{SO} \to \Lambda = \mathbb{Q}[[t]]$

$$\varphi(M) = \sum \operatorname{ch} \rho_k \cdot \hat{\mathfrak{a}}(M)[M]\, t^k$$

s'annule sur I.

Rappelons que $\mathrm{ch}\, p_k$ signifie le char. de Chern de la <u>complexification</u> de p_k.

Les classes π_ω sont définis de la manière habituelle à partir de π_i de telle sorte qu'on ait $\pi_{\underbrace{(1,\dots,1)}_{i}} = \pi_i$. On a $\pi_\omega(\xi^2)=0$ $\omega \neq (i)$

et $\pi_{(i)}(\xi^2) = (\xi-2)^i$.

Pour calculer le logarithme

$$g(u) = \sum \frac{\varphi(CP_{2i})}{2i+1} u^{2i+1}$$

on procède comme suit. Soit $\eta \to CP^\infty$ le fibré canonique. On calcule ($y = \eta - 2$)

$$p_t(\eta) = f_t(y) = 1 + yt + \sum_{k=2}^{\infty} p_k(y) t^k$$

car $$p_k(\eta) = \pi_k(\eta) + \sum_{0<|\omega|<k} a^k_\omega \pi_\omega(\eta)$$

$$= \begin{cases} y, & k=1 \\ \sum_{i=1}^{k-1} a^k_{(i)} y^i & k>1 \end{cases}$$

donc $\deg p_k(y) \leq k-1$. On a alors

$$\boxed{\frac{x}{g^{-1}(x)} = \frac{x/2}{\sinh x/2} \cdot f_t(e^x + e^{-x} - 2)}$$

On sait que la condition (ii) du théorème est équivalente à

$$g(u) = \int_0^u \frac{du}{\sqrt{R(u)}}$$

$$R(u) = 1 + \delta(t)u^2 + \varepsilon(t)u^4 \quad , \delta(t), \varepsilon(t) \in \Lambda.$$

Il est assez facile de voir que cette condition se réduit à l'équation

$$\left\{ \frac{1}{2} f_t(y) - y \frac{\partial f_t(y)}{\partial y} \right\}^2 (y+4) = f_t(y)^4 + \delta y f_t(y)^2 + \varepsilon y^2,$$

et on cherche à la fois $f_t, \delta(t), \varepsilon(t)$ de telle sorte que l'on ait

$$f_t(y) = 1 + yt + \sum_{k=2}^{\infty} p_k(y) t^k$$

et $\deg p_k(y) \leq k-1$.

~~Stong a résolu ce problème en imposant des sortes de normalisations. On remarque d'abord que si l'on a trouvé une solution, on obtient d'autres solutions en remplaçant t par $t + o(t)$ - série sur $\mathbb{Q}$. Si par $t \mapsto t + \sum a^k_{(1)} t^k$ on obtient un problème dans lequel $a^k_{(1)} = 0$ dans les polynômes $p_k(y)$ $(k \geq 2)$.~~

les premiers termes de $\delta(t)$, $\varepsilon(t)$.

$$\begin{cases} \delta(t) = \frac{1}{4} - 6t + o(t) \\ \varepsilon(t) = -t + o(t) \end{cases}$$

Stoy a trouvé une solution particulière à ce problème en imposant à $f_t(y)$ de sortes de normalisations. Le fait impressionnant était que les coefficients de $f_t(y)$ qu'il a pu calculer, étaient tous entiers.

Ce que je vais raconter aujourd'hui, va expliquer ce phénomène.

II Partie. fonctions thêta et fonctions jacobiennes.

Parmi les fonctions elliptiques définies à l'aide d'intégrales ci-dessus, certaines sont particulièrement bien connues. Ce sont les fonctions $sn(u|k^2)$ où $k^2 \in \mathbb{C}$ est un paramètre $\neq 0, 1$. Elles correspondent au cas de $R(u) = (1-u^2)(1-k^2u^2)$. N'étant pas sûr que vous êtes tous familiers avec ces fonctions, je vais introduire, le plus brièvement possible quelques résultats les concernant. Plusieurs approches sont possibles. On peut par exemple étudier $sn(u|k^2)$ en partant de l'intégrale elliptique qui le définit. Mais c'est assez difficile. Une voie plus simple consiste à définir $sn(u|k^2)$ à l'aide de fonctions thêta et en déduire l'équation différentielle correspondant à l'intégrale. De cette manière on obtient aussi des expressions pour k^2 et les périodes de la fonction et il est plus facile d'étudier le caractère automorphe de ces objets. ...

① Fonctions thêta. Soit H le demi-plan supérieur de $\mathbb{C}$ et $\tau \in H$, on pose $q = e^{\pi i \tau}$, q est tel que $0 < |q| < 1$. Les fonctions qu'on va introduire maintenant seront fonction du paramètre q.

ϑ pour la fonction
Θ pour les constantes

Considérons la série

$$\vartheta(z,q) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n q^{n^2} e^{2niz}$$

On voit tout de suite que cette série converge absolument et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. Donc $\vartheta(z,q)$ est une fonction entière dans $\mathbb{C}$. De plus

$$\vartheta(z+\pi, q) = \vartheta(z,q)$$

et

$$\vartheta(z+\pi\tau, q) = -q^{-1} e^{-2iz}\,\vartheta(z,q) = -N\cdot\vartheta(z,q)$$

où $N = q^{-1}e^{2iz}$. On dit que π et $\pi\tau$ sont les quasi-périodes de ϑ et que 1 et $-N$ sont les multiplicateurs correspondants. A côté de $\vartheta(z,q)$ on considère trois autres fonctions entières obtenues par translation. On pose

$$\vartheta_4(z,q) = \vartheta(z,q)$$
$$\vartheta_3(z,q) = \vartheta_4(z+\tfrac{\pi}{2}, q)$$
$$\vartheta_1(z,q) = -i\,q^{1/4} e^{iz}\,\vartheta_4(z+\tfrac{\pi\tau}{2}, q)$$
$$\vartheta_2(z,q) = \vartheta_1(z+\tfrac{\pi}{2}, q)$$

Comme $\vartheta(z,q)$, ces fonctions sont quasi-périodiques avec quasi-périodes π et $\pi\tau$. Les multiplicateurs correspondants sont donnés par

	ϑ_1	ϑ_2	ϑ_3	ϑ_4
π	-1	-1	1	1
$\pi\tau$	$-N$	N	N	$-N$

Il est facile d'exprimer ces quatre fonctions en termes de fonctions trigonométriques. Par exemple on a :

$$\vartheta_1(z,q) = 2\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n q^{(n+\frac{1}{2})^2} \sin(2n+1)z$$

D'où l'on tire immédiatement que ϑ_1 est une fonction impaire. Les formules pour $\vartheta_2, \vartheta_3, \vartheta_4$ ne font intervenir que des cosinus. Ce sont donc des fonctions paires. La valeur des fonctions ϑ_i à l'origine a un rôle important. On lui réserve une notation spéciale : $\Theta_i = \vartheta_i(0)$. Bien sûr ce sont des fonctions de q. On a $\Theta_1 = 0$ puisque ϑ_1 est impaire. Par contre, $\vartheta_1'(z)$ est paire et on pose $\Theta_1' = \vartheta_1'(0)$. Ces quatre constantes sont liées par une relation remarquable :

$$\boxed{\Theta_1' = \Theta_2\,\Theta_3\,\Theta_4}$$

due à Jacobi bien sûr.

② Zéros de ϑ_i. A l'aide des fonctions $\vartheta_i(z,q)$ on peut construire facilement des fonctions elliptiques : c'est leur principale raison d'être. Par exemple, il est clair que pour toute paire i, j, ϑ_i/ϑ_j est une fonction $(2\pi, 2\pi\tau)$-périodique.

Une autre façon est de prendre la deuxième dérivée logarithmique de ϑ_i :

$$\frac{d^2}{dz^2} \log \vartheta_i = \left(\frac{\vartheta_i'}{\vartheta_i}\right)'$$

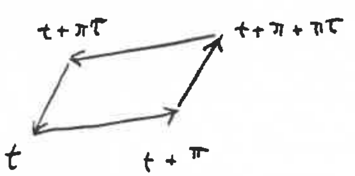
De manière plus précise, on a (on omet q)

$$\frac{\vartheta_i'(z+\pi)}{\vartheta_i(z+\pi)} = \frac{\vartheta_i'(z)}{\vartheta_i(z)}$$

et

$$\frac{\vartheta_i'(z+\pi\tau)}{\vartheta_i(z+\pi\tau)} = \frac{\vartheta_i'(z)}{\vartheta_i(z)} - 2i .$$

Prenons un parallélogramme fondamental P, i.e un parallélogramme de la forme. Alors, on a tout de suite



$$\frac{1}{2\pi i}\int \frac{\vartheta_i'(z)\,dz}{\vartheta_i(z)} = 1$$

donc : ϑ_i n'a qu'un zéro simple dans tout parallélogramme fondamental. Il est facile de le localiser ; on a $\vartheta_1(0) = \vartheta_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \vartheta_3\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi\tau}{2}\right)$
$= \vartheta_4\left(\frac{\pi\tau}{2}\right) = 0$.

les autres zéros sont obtenus par adjonction de quasi-périodes. En particulier, on voit que $\Theta_2, \Theta_3, \Theta_4 \neq 0$ (pour $q \neq 0$, i.e $\tau \neq i\infty$).

③ Introduction de la fonction $sn(u|k^2)$. Considérons maintenant la fonction $\vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$. Il est facile de voir que les multiplicateurs sont -1 et $+1$. Donc la dérivée

$$\left(\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right)' = \frac{\vartheta_1'(z)\vartheta_4(z) - \vartheta_1(z)\vartheta_4'(z)}{\vartheta_4(z)^2}$$

a les mêmes multiplicateurs ; d'autre part

$$\frac{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)^2}$$

a encore les multiplicateurs -1 et $+1$. Donc on peut écrire

$$\left(\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right)' = \varphi(z)\,\frac{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)^2}$$

où $\varphi(z)$ est elliptique de périodes π et $\pi\tau$. En fait, on vérifie que l'on a également

$$\varphi\left(z+\frac{\pi\tau}{2}\right) = \varphi(z).$$

Les pôles possibles de de φ sont les zéros de ϑ_2 et ϑ_3

Ce sont donc

$$\frac{\pi}{2} + m\pi + n\frac{\pi\tau}{2}$$

et il sont simples. Donc la fonction $\varphi(z)$ est d'ordre 1 ce qui n'est possible que si c'est une constante. Pour trouver la constante, on a

$$\varphi(0) = \frac{\Theta_1'\Theta_4}{\Theta_2\Theta_3} = \Theta_4^2$$

en vertu de la formule $\Theta_1' = \Theta_2\Theta_3\Theta_4$. Donc

$$\boxed{\left(\frac{\vartheta_1(z)}{\vartheta_4(z)}\right)' = \Theta_4^2 \cdot \frac{\vartheta_2(z)\vartheta_3(z)}{\vartheta_4(z)^2}}$$

Posons $\xi(z) = \vartheta_1(z)/\vartheta_4(z)$. On a

$$(\xi')^2 = \frac{\vartheta_2^2(z)\Theta_4^2}{\vartheta_4(z)^2} \cdot \frac{\vartheta_3^2(z)\Theta_4^2}{\vartheta_4(z)^2}$$

les deux produits à droite peuvent être facilement exprimés en termes de ξ^2. Pour comprendre comment cela se passe considérons l'expression

$$\frac{a\vartheta_1^2(z) + b\vartheta_4^2(z)}{\vartheta_2^2(z)}$$

Il est facile de voir que c'est une fonction elliptique

de périodes π et $\pi\tau$. Elle a un pôle d'ordre au plus 2 en $\pi/2$. En ajustant a, b on peut s'arranger pour que ce pôle soit d'ordre ≤ 1. Alors le quotient devient une constante. Donc $\vartheta_2^2(z)$ est une combinaison linéaire de $\vartheta_1^2(z)$ et $\vartheta_4^2(z)$. Il est aisé de trouver les coefficients exacts. On obtient

$$\vartheta_2^2(z)\Theta_4^2 = \vartheta_4(z)^2\Theta_2^2 - \vartheta_1(z)^2\Theta_3^2$$

et de même

$$\vartheta_3^2(z)\Theta_4^2 = \vartheta_4(z)^2\Theta_3^2 - \vartheta_1(z)^2\Theta_2^2.$$

Finalement,

$$\boxed{(\xi')^2 = (\Theta_2^2 - \xi^2\Theta_3^2)(\Theta_3^2 - \xi^2\Theta_2^2)}$$

Une dernière transformation :

$$\begin{cases} y = \xi\dfrac{\Theta_3}{\Theta_2} \\ u = z\,\Theta_3^2 \\ k^{1/2} = \dfrac{\Theta_2}{\Theta_3} \end{cases}$$

et on obtient : $\quad (y')^2 = (1-y^2)(1-k^2y^2)$

et

$$\boxed{y(u) = \frac{\Theta_3}{\Theta_2} \cdot \frac{\vartheta_1(u/\Theta_3^2)}{\vartheta_4(u/\Theta_3^2)}}$$

est l'unique solution telle que $y(0)=0$.
On note cette fonction $sn(u\,|\,k^2)$. C'est une fonction elliptique dont les quasi-périodes

$$\boxed{2K = \pi\,\Theta_3^2 \quad , \; 2iK' = \pi\tau\,\Theta_3^3}$$

correspondent aux multiplicateurs $-1, 1$.

④ <u>Caractère modulaire de k^2 et de $sn(u|k^2)$.</u>

A priori, la formule qui définit $sn(u|k^2)$ dépend de q donc de τ. L'équation différentielle ne comporte que $k^2 = k^2(q)$. Donc en fait c'est une fonction de k^2.

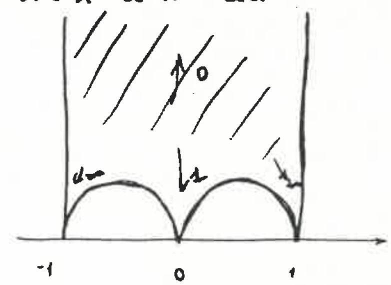
En fait, comme $q = e^{\pi i \tau}$, comme fonction de τ, $k^2(\tau)$ est invariante par $\tau \longrightarrow \tau + 2$. On peut démontrer que k^2 est également invariante par $\tau \longmapsto \dfrac{\tau}{2\tau+1}$. Le groupe des transformations de H engendré par ces transformations est le groupe $\Gamma(2)$. C'est aussi le groupe des transformations

$$\tau \longmapsto \frac{a\tau + b}{c\tau + d}$$

où $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ et $b, c \equiv 0\,(2)$, $a, d \equiv 1\,(2)$

On dit alors que $k^2(\tau)$ est une forme modulaire de niveau 2.

Le domaine fondamental F_2 de $\Gamma(2)$ peut être choisi comme ceci :



On démontre que $k^2 : H/\Gamma(2) \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} - \{0,1\}$ <u>isomorphisme</u>. On
Il est possible d'en l'inverse à l'aide de fonctions hypergéométriques...

On a

$$k^2(\tau) \to \begin{cases} 0 , & \tau \to i\infty . \\ 1 , & \tau \to 0 \\ \infty , & \tau \to \pm 1 \end{cases}$$

Comme fonction de q, $k^2 \to 0$ pour $q \to 0$.
En fait, on peut écrire

$$k^2(q) = 16\,q \prod_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1+q^{2m}}{1+q^{2m-1}} \right)^8 .$$

$$= 16\,q + o(q) .$$

Voyons ce qui se passe avec K et K'. On a $2K = \pi\,\Theta_3^2(q)$, $2iK' = \pi\tau\,\Theta_3^2(q)$.

Pour $q \to 0$ (i.e $\tau \to i\infty$) on a $K \to \dfrac{\pi}{2}$ et $K' \to \infty$.

<u>Réduction de $s(x)$ à $sn(u|k^2)$.</u> Nous considérons maintenant notre problème initial : trouver $\delta(t), \varepsilon(t), f_t(y)$ tels que

$$\frac{x}{s(x)} = \frac{x}{2\sinh x/2} \cdot f_t(e^x + e^{-x} - 2) \qquad (F)$$

$$\int_0^{s(x)} \frac{du}{\sqrt{R(u)}} \quad , \quad R(u) = 1 + \delta(t)u^2 + \varepsilon(t)u^4$$

et

$$f_t(y) = 1 + yt + \sum_{k=2}^{\infty} p_k(y)t^k \quad ,$$

où

$$p_k(y) = \sum_{i=1}^{k-1} a^k_{(i)} y^i .$$

Nous allons aussi supposer que $a^k_{(1)} = 0$ $(k \geq 2)$ (première normalisation). Nous cherchons une solution pour laquelle $\delta(t)$ et $\varepsilon(t)$ sont convergentes pour $|t| < \alpha$. Notons que la normalisation I entraîne que $\delta(t) = \frac{1}{4} - 6t$ est automatiquement de ce type. C'est donc $\varepsilon(t)$ qui est concerné par cette hypothèse. On cherche à écrire

$$s(u) = a\, sn\left(\frac{u}{a} \,|\, k^2\right)$$

avec a, k^2 séries en t (à priori, séries de Laurent). Donc on veut que

$$\begin{cases} a^2\delta = -(1+k^2) \\ a^4\varepsilon = k^2 \end{cases} \qquad (*)$$

En éliminant a^2 on obtient pour $\lambda = k^2$:

$$\lambda^2 + \gamma\lambda + 1 = 0$$

où

$$\gamma = 2 - \frac{\delta^2}{\varepsilon} .$$

Or, on a les premiers termes de δ et ε, d'où :

$$\gamma = \frac{1}{16t} - \frac{9}{16} + \cdots$$

et pour λ :

$$\lambda_\pm = \frac{1}{2}\left(-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - 4}\right)$$

$$\lambda_+ = -16t + \cdots$$

$$\lambda_- = -\frac{1}{16}t + \cdots$$

Nous prendrons $\lambda_+ = \lambda = -16t + \cdots$. C'est une fonction de t holomorphe au voisinage de $t=0$. Donc

$$a^2 = -\frac{1+\lambda_+}{\delta} = -4 + \cdots$$

est une fonction régulière en $t=0$, et on peut la racine carrée

$$a_\pm = \pm 2i + \cdots$$

encore régulière près de l'origine.

Considérons maintenant dans F/π, la translation $x \longmapsto x + 2\pi i$. Le terme de droite change de signe. Comme $sn(u+2K \mid k^2) = -\,sn(u \mid k^2)$, on voit que

$$\frac{2\pi i}{a} = 2K + 4mK + 2ni K',$$

où $m, n \in \mathbb{Z}$ sont indépendants de t. Quand $t \to 0$ $k^2 = a^4 t \to 0$, $\tau \to i\infty$ (on prend $\tau \in F_2$ - fonction holomorphe de $\lambda = k^2$), et $K \to \pi/2$, $K' \to \infty$. Il en découle que $n = 0$, donc

$$\boxed{\frac{\pi i}{a} = c \cdot K}$$

et on a $c = 1$, pour $a = 2i + \cdots$. En conclusion, nous avons trouvé des fonctions $a(t)$, $k^2(t)$ régulières au voisinage de $t = 0$ telles que l'on ait $(*)$, de plus

$$\boxed{\begin{array}{l} a = 2i + \cdots \\ k^2(t) = -16t + \cdots \end{array}}$$

et, comme $k^2(q) = 16q + \cdots$, on a

$$\boxed{q = -t + o(t)}$$

L'équation $\pi i/a = K$ est fondamentale. On a $2K = \pi\Theta_3^2$, donc

$$a = \cancel{\frac{\Theta_3^2}{2i}}\ \frac{2i}{\Theta_3^2}$$

$$a\,sn\left(\frac{u}{a} \,\middle|\, k^2\right) = \frac{\cancel{\Theta_3^2}\,2i\,\cancel{\Theta_3}}{\cancel{2i}\,\Theta_3^2\,\Theta_2}\ \frac{\vartheta_1(-\frac{iu}{2})}{\vartheta_4(-\frac{iu}{2})}$$

$$a\,sn\left(\frac{u}{a} \,\middle|\, k^2\right) = 2i\,\frac{\Theta_4}{\Theta_1'}\ \frac{\vartheta_1(-\frac{iu}{2})}{\vartheta_4(-\frac{iu}{2})}$$

Nous allons maintenant développer

$$f_t(e^x + e^{-x} - 2) = \frac{2\,sh\, x/2}{s(x)}$$

en produit infini.

Pour cela, il nous faut écrire $\vartheta_4(z)$ comme produit infini.

Considérons le produit

$$f(z) = \prod(1 - q^{2n-1}e^{2iz})\prod(1 - q^{2n-1}e^{-2iz}).$$

On vérifie aisément qu'il converge normalement et uniformément sur tout compact de $\mathbb{C}$. C'est donc une fonction entière. On a $f(z+\pi) = f(z)$ et

$$f(z + \pi\tau) = -q^{-1}e^{-2iz}f(z)$$

Donc $\vartheta_4(t)/f(z)$ est elliptique. De plus, $\vartheta_4(z)$ et $f(z)$ ont pour zéros, des zéros simples

$$\frac{\pi\tau}{2} + m\pi + n\tau\pi .$$

Donc

$$\vartheta_4(z) = G_4 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n-1}\cos 2z + q^{4n-2})$$

De la même manière, on démontre

$$\vartheta_1(z) = G_1 \prod_{n=1}^{\infty} (1 - 2q^{2n}\cos 2z + q^{4n}) \cdot \sin z$$

Alors ~~$\frac{2\sinh x/2}{s(x)} = \frac{1}{2i}$~~

$$\vartheta_1'(0) = \Theta_1' =$$

$$\Theta_4 = G_4 \prod (1-q^{2n-1})^2$$

$$\Theta_1' = G_1 \prod (1-q^{2n})^2$$

$$\frac{2\sinh x/2}{s(x)} = \frac{2\sinh x/2}{2i\sin(-\frac{ix}{2})}$$

$$\times \prod \left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2 \prod \left(\frac{1-2q^{2n-1}\cos\frac{ix}{2} + q^{4n-2}}{1-2q^{2n}\cos\frac{ix}{2} + q^{4n}}\right).$$

$$\cos ix = \frac{1}{2}y + 1 \qquad y = e^x + e^{-x} - 2$$

$$f_t(y) = \prod \left(\frac{1-q^{2n}}{1-q^{2n-1}}\right)^2 \left(\frac{(1-q^{2n-1})^2 - yq^{2n-1}}{(1-q^{2n})^2 - yq^{2n}}\right)$$

$$\boxed{f_t(y) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1 - yq^{2n-1}/(1-q^{2n-1})^2}{1 - yq^{2n}/(1-q^{2n})^2}\right)} \qquad (**)$$

Ici $q = -t + \cdots$ est une série en t régulière en $t=0$

Donc : si une solution $f_t(y)$ existe, elle est de la forme indiquée.

Il nous faut vérifier que c'est bien une solution. autrement dit que

$$f_t(y) = 1 + yt + \sum_{k=2}^{\infty} p_k(y)t^k$$

$\deg p_k(y) \le k-1$. Dans la formule $(**)$

$$f_t(y) = 1 - qy + o(q) = 1 + yt + o(t)$$

de plus, le coefficient de y^i est divisible par q^{i+1} sauf pour $i=1$, donc $p_k(y)$ est de degré $\le k-1$.

De plus, maintenant on voit que dans cette formule, on peut poser

$$q = -t + o(t)$$

– n'importe quelle série formelle.

On peut par exemple poser $q = -t$. Notons que les coefficients de $f_t(y)$ alors sont entiers, et la classe caractéristique correspondante aussi. C'est encore vrai si q est une série en t à coefficients entiers. Maintenant nous voudrions voir que c'est le cas pour la solution construite par Stong.

Rappelons que

$$f_t(y) = 1 + yt + \sum_{k=2}^{\infty} p_k(y)\, t^k$$

$$p_k(y) = \sum_{i\geq 1} a^k_{(i)} y^i .$$

Stong démontre l'existence d'une solution et son unicité avec les conditions supplémentaires suivantes

I. $\quad a^k_{(1)} = 0 \quad , \quad k \geq 2$

II. $\quad a^k_{(i)} = 0 \quad , \quad i > \left[\frac{k+1}{2}\right]$.

Notons que la condition II est equivalente à l'existence d'une serie h telle que

$$t\, f_t(y) = h(t, yt^2).$$

Deuxième remarque : Si II est satisfaite, elle est encore satisfaite pour toute substitution

$$t' = t + o(t)$$

Posons $q = -t$, alors il est facile de voir que

$$t f_t(t) = t \prod \left(\frac{1 + y\, q t^{2n-1}/(1+t^{2n-1})^2}{1 - y t^n/(1-t^n)^2} \right)$$

$$= \left(t + y t^2/(1+t)^2\right) \frac{\prod_{n\geq 2} (1 + y t^{2n-1}/(1+t^{2n-1})^2)}{\prod_{n\geq 1} \cdots}$$

donc II est satisfaite.

Maintenant on cherche une substitution dans ce $f_t(y)$ pour satisfaire I. C'est facile :

$$f_t(y) = 1 + ty + \sum a^k_{(i)} y^i t^k$$

et on pose $\quad t' = t + \sum a^k_{(1)} t^k$.

Par unicité, le $f_t(y)$ obtenu coïncide avec celle de Stong. Il reste à constater que $a^k_{(i)} \in \mathbb{Z}$ ce qui est évident.

La formule explicite pour t en fonction de q c'est

$$t = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{q^n}{(1-q^n)^2}$$

$$= -\sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \frac{q^{2n-1}}{1-q^{2n-1}}$$