

et suite spectral d'Adams : J. James

1. La cohomologie de l'espace QY

& S. Zarati.

1.1. Définitions et notations.

Soient $m \geq 1$ un entier, $E\mathcal{G}_m$ un espace contractile sur lequel le groupe \mathcal{G}_m agit librement et Y un espace connexe. On note $\mathcal{G}_m Y$ le quotient de l'espace $E_+ \mathcal{G}_m \wedge (Y \wedge \dots \wedge Y)$, m -fois, par l'action diagonale de \mathcal{G}_m (si Z est un espace, Z_+ désigne la réunion disjointe de Z et d'un point-base). On note $\varphi_m : QY \rightarrow Q\mathcal{G}_m Y$ la m -ème application de multiplicité, appelée aussi "James-Hopf invariant" dans la terminologie anglo-saxonne, que l'on peut considérer comme une application stable notée r_m de QY dans $\mathcal{G}_m Y$ [B], [V].

On pose $\Gamma Y = \bigoplus_{m \geq 0} \bar{H}^* \mathcal{G}_m Y$ et $\rho = \bigoplus_{m \geq 0} r_m^*$ (on convient que $\mathcal{G}_0 Y = S^0$ et que r_0^* est l'unité de $H^* QY$). On a :

THEOREME 1.1 [B], [V] L'application $\rho : \Gamma Y \rightarrow H^* QY$ est un isomorphisme.

Cet isomorphisme nous permet de définir une filtration naturelle de $H^* QY$ dont l'étude est l'objet du paragraphe suivant.

1.2 Filtration de $H^* QY$.

1.2.1. Définition de la filtration. Rappelons que ΓY est muni d'un coproduit induit par les applications naturelles $\mathcal{G}_p Y \wedge \mathcal{G}_q Y \rightarrow \mathcal{G}_{p+q} Y$. L'image par l'application $\rho : \Gamma Y \rightarrow H^* QY$ de la somme directe $\bigoplus_{0 \leq m < 2^s} \bar{H}^* \mathcal{G}_m Y$, $s \geq 0$, est une sous-

coalgèbre de Hopf de $H^* QY$; nous notons respectivement C'_s la sous-algèbre de Hopf de $H^* QY$ qu'elle engendre et C_s le

quotient $H^*QY//C'_s$. Nous avons donc, pour tout entier s , une suite exacte courte dans la catégorie des algèbres de Hopf (voir 1.2.3):

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow C'_s \rightarrow H^*QY \rightarrow C_s \rightarrow \mathbb{Z}/2 .$$

Avant de donner quelques propriétés de la filtration croissante $\{C'_s\}_{s \geq 0}$ de H^*QY que nous venons de définir, nous avons besoin de rappeler la définition des foncteurs R_s , $s \geq 0$, introduits dans [L.Z] ainsi que des résultats concernant la catégorie des algèbres de Hopf.

1.2.2. Les foncteur R_s . Soit $\Delta_s : B_+(\mathbb{Z}/2)^s \wedge Y \rightarrow \mathcal{G}_{2^s} Y$ une "diagonale de Steenrod" déterminée par une bijection de $(\mathbb{Z}/2)^s$ sur $\{1, 2, 3, \dots, 2^s\}$ ($B(\mathbb{Z}/2)^s$ est un classifiant pour le groupe $(\mathbb{Z}/2)^s$). L'image de $\Delta_s^* : \bar{H}^* \mathcal{G}_{2^s} Y \rightarrow H^*((\mathbb{Z}/2)^s) \otimes \bar{H}^* Y$ peut-être décrite de la façon suivante. L'action du groupe linéaire $GL_s(\mathbb{Z}/2)$ sur $(\mathbb{Z}/2)^s$ induit une action A-linéaire sur $H^*((\mathbb{Z}/2)^s)$, nous notons L_s le sous-A-module de $H^*((\mathbb{Z}/2)^s)$ formé des éléments invariants sous l'action de $GL_s(\mathbb{Z}/2)$. L_s est une algèbre de polynômes sur $\mathbb{Z}/2$ librement engendrée par les classes $w_{2^s-2^k}$, $0 \leq k < s$, w_j désignant la $j^{\text{ème}}$ classe de Stiefel-Whitney de la représentation régulière de $(\mathbb{Z}/2)^s$ [L.Z], [M₁], [D]. Soient y un élément de $\bar{H}^* Y$ et $\Gamma_{2^s} y$ la 2^s -ème puissance externe de Steenrod appartenant à $\bar{H}^* \mathcal{G}_{2^s} Y [S]$. Dans [L.Z] nous avons défini un sous- L_s -module, noté $R_s \bar{H}^* Y$, de $H^*((\mathbb{Z}/2)^s) \otimes \bar{H}^* Y$ engendré par les éléments $\Delta_s^* \Gamma_{2^s} y$ que nous avons noté $St_s y$, y parcourant $\bar{H}^* Y$. On vérifie que l'image de Δ_s^* est égale à $R_s \bar{H}^* Y$. On peut en fait définir $R_s M$ pour

tout A-module instable M , ce foncteur R_S de la catégorie des A-modules instables dans elle même est étudié dans [L.2].

1.2.3. Sur une catégorie d'algèbres de Hopf. Dans ce paragraphe nous rappelons des résultats qui se trouvent essentiellement dans [M₃], [W].

Définition 1.2.3.1 - Nous notons \mathcal{E} la catégorie dont les objets C vérifient:

(E1) C est une algèbre de Hopf graduée $C = \{C^n\}_{n \geq 0}$ sur le corps $\mathbb{Z}/2$ qui est abélienne, c'est à dire, associative, coassociative, commutative, cocommutative.

(E2) C est un A-module instable et le produit et le coproduit sont A-linéaires.

(E3) Le "cup-carré" dans C coïncide avec l'opération Sq_0 (en d'autres termes l'algèbre C est instable).

(E4) $C^0 = \mathbb{Z}/2$ (C est connexe).

Les morphismes de \mathcal{E} sont les applications A-linéaires compatibles avec produits et coproduits. Un objet de \mathcal{E} est appelé une \mathcal{E} -algèbre de Hopf.

On vérifie que la catégorie \mathcal{E} est abélienne et qu'elle est équivalente à sa sous-catégorie pleine \mathcal{E} dont les objets sont les idéaux d'augmentation des objets de \mathcal{E} .

Soit C une \mathcal{E} -algèbre de Hopf. On note $\mathcal{P}C$ le sous-espace de C formé des éléments primitifs de C . $\mathcal{P}C$ est un A-module instable.

Definition - PROPOSITION 1.2.3.2 - Le foncteur $\mathcal{P}: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{U}$ admet un adjoint à gauche $U: \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{E}$. On a donc:

$$\text{Hom}_{\mathcal{U}}(M, \mathcal{P}C) = \text{Hom}_{\mathcal{E}}(UM, C)$$

pour toute \mathcal{E} -algèbre C et tout A -module instable M .

La \mathcal{E} -algèbre de Hopf UM est définie dans [S, p:29] comme étant la A -algèbre libre engendrée par M . Le coproduit est induit par la diagonale $M \rightarrow M \otimes M$.

Rappelons que pour tout A -module instable M on définit le "double de M ", noté $\mathfrak{P}M$, par:

$$(\mathfrak{P}M)^n = \begin{cases} M^{\frac{n}{2}} & \text{si } n \equiv 0(2) \\ 0 & \text{si } n \equiv 1(2) \end{cases} \quad \text{et} \quad \text{Sq}^i(\mathfrak{P}_x) = \begin{cases} \mathfrak{P}(\text{Sq}^{\frac{i}{2}}x) & \text{si } i \equiv 0(2) \\ 0 & \text{si } i \equiv 1(2) \end{cases}$$

\mathfrak{P}_x désignant l'élément de $\mathfrak{P}M$ correspondant à un élément x de M . De la même manière on définit le double $\mathfrak{P}C$ d'une \mathcal{E} -algèbre de Hopf. On définit un \mathcal{E} -morphisme $\lambda: C \rightarrow \mathfrak{P}C$ de la façon suivante: $\mathfrak{P}C$ s'identifie à $\hat{H}^0(\mathcal{S}_2; C \otimes C)$, \mathcal{S}_2 opérant sur $C \otimes C$ par permutation des facteurs, via l'application $\mathfrak{P}_x \mapsto x \otimes x$ ($\hat{H}^0(\mathcal{S}_2; C \otimes C)$ est le sous-groupe des invariants modulo les normes); λ est induit par le coproduit, commutatif de C .

PROPOSITION 1.2.3.3 [M₂] - Soit C une \mathcal{E} -algèbre de Hopf, le morphisme canonique $U\mathcal{P}C \rightarrow C$ est un isomorphisme si et seulement si le morphisme $\lambda: C \rightarrow \mathfrak{P}C$ est trivial.

COROLLAIRE 1.2.3.4 - La suite:

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow U\mathcal{P}C \rightarrow C \xrightarrow{\lambda} \emptyset C$$

est exacte dans \mathcal{C} .

De même que le morphisme $\lambda|_{\text{Ker } \lambda}$ est trivial, de même le morphisme $\lambda|_{\text{Coker } \lambda}$ est trivial; on pose $\hat{\mathcal{P}}C = \mathcal{P} \text{Coker } \lambda$, on a donc $\text{Coker } \lambda = U(\hat{\mathcal{P}}C)$.

PROPOSITION 1.2.3.5 [W] - Pour toute suite exacte courte dans \mathcal{C}

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow C' \rightarrow C \rightarrow C'' \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

il existe un \mathcal{U} -morphisme naturel $\delta : \mathcal{P}C'' \rightarrow \hat{\mathcal{P}}C'$ tel que la suite

$$0 \rightarrow \mathcal{P}C' \rightarrow \mathcal{P}C \rightarrow \mathcal{P}C'' \xrightarrow{\delta} \hat{\mathcal{P}}C' \rightarrow \hat{\mathcal{P}}C \rightarrow \hat{\mathcal{P}}C'' \rightarrow 0$$

est exacte dans \mathcal{U} .

1.3 - Propriétés de la filtration de H^*QY .

Le but de ce paragraphe est de prouver.

PROPOSITION 1.3 - La composition:

$$\bar{H}^* \mathcal{G}_{2^s} Y \xrightarrow{r^*} H^* QY \longrightarrow C_s$$

se factorise par une injection $i_s : R_s \bar{H}^* Y \hookrightarrow \mathcal{P}C_s$ et la suite:

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow U(R_s \bar{H}^* Y) \rightarrow C_s \rightarrow C_{s+1} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

est exacte dans \mathcal{C} .

Début de la démonstration. Par définition même des C_s (voir 1.2.1) nous avons la suite exacte dans \mathcal{C} :

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow C'_{s+1}/C'_s \rightarrow C_s \rightarrow C_{s+1} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

A l'aide de 1.2.3.2 on vérifie que C'_{s+1}/C'_s est primitivement engendré. Nous allons montrer que $C'_{s+1}/C'_s = UR_s \bar{H}^* Y$ et que le morphisme dans $\mathcal{C} : UR_s \bar{H}^* Y \rightarrow C_s$ est induit par une inclusion de $R_s \bar{H}^* Y$ dans $\mathcal{P}C_s$. Pour cela nous avons besoin de calculer les primitifs des C_s .

1.4. Calcul des primitifs des $C_s, s \geq 0$.

Nous procédons par récurrence sur s .

1.4.1. Le cas $s = 0$: Primitifs de $H^* QY$.

Soient $\tau : B_+ \mathbb{Z}/2 \xrightarrow{+} S^0$ le transfert (voir [P], [L]) et $\tau_s : B_+ (\mathbb{Z}/2)^s \xrightarrow{+} S^0$ le "smash-produit" s -fois de τ . Nous notons $\tau_s(Y) = \tau_s \wedge id_Y : B_+ (\mathbb{Z}/2)^s \wedge Y \xrightarrow{+} Y$ (nous convenons que $\tau_0(Y) = id_{S^\infty Y}$) et nous désignons par $\tau_{s,m}(Y)$ la

composition $B_+ (\mathbb{Z}/2)^s \wedge Y \xrightarrow{\tilde{\tau}_s(Y)} QY \xrightarrow{r_m} \mathcal{G}_m Y$ où $\tilde{\tau}_s(Y)$ est l'adjointe de $\tau_s(Y)$.

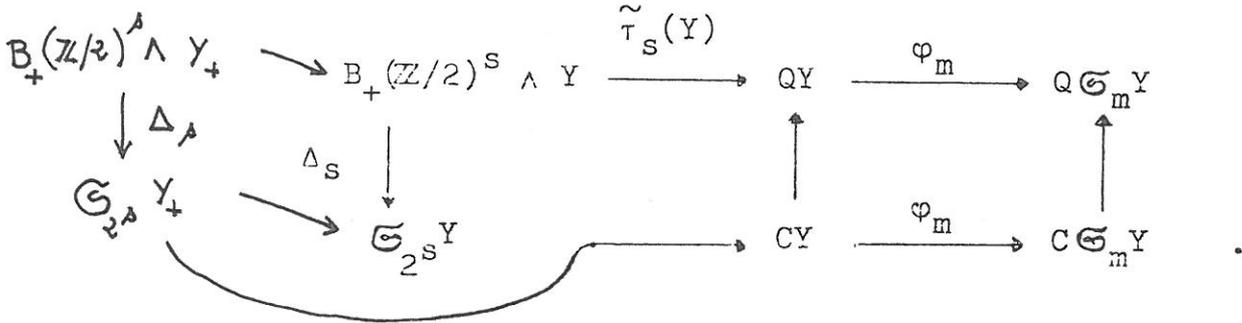
LEMME 1.4.1.1 - Pour tous entiers $s \geq 0$ et $m \geq 1$, l'homomorphisme:

$$\tau_{s,m}^*(Y) : H^* \mathcal{G}_m Y \rightarrow H^* (\mathbb{Z}/2)^s \otimes H^* Y$$

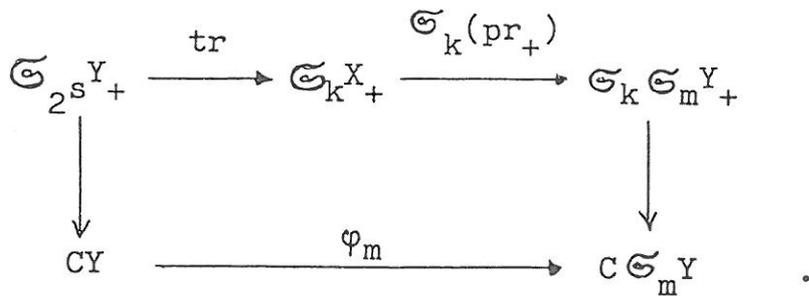
est trivial si $m \neq 2^s$ et se factorise à travers $R_s \bar{H}^* Y$ si $m = 2^s$.

l'espace des configurations de Y

Démonstration. Soit $CY \xrightarrow{\gamma} Y$. D'après [M₃], [B] on a une application naturelle de CY dans QY qui est une équivalence d'homotopie quand Y est connexe. Lorsque $m \geq 2^s$ le résultat est une conséquence de la définition même des applications de multiplicité et de la commutativité du diagramme suivant:



Supposons $m < 2^s$ et désignons par $X = (\mathbb{R}^\infty)^{(2^s)} \times Y^{2^s} / \mathcal{G}_m \times \mathcal{G}_{2^s-m}$ ($(\mathbb{R}^\infty)^{(2^s)}$ désigne le produit $(\mathbb{R}^\infty)^{2^s}$ privé de ses diagonales). Notons $pr : X \rightarrow (\mathbb{R}^\infty)^{(m)} \times Y^m / \mathcal{G}_m$ l'application induite par la projection sur les m -premiers facteurs \mathbb{R}^∞ et Y et $tr : \mathcal{G}_{2^s} Y_+ \rightarrow \mathcal{G}_k X_+$ le transfert associé au revêtement $X \rightarrow (\mathbb{R}^\infty)^{(2^s)} \times Y^{2^s} / \mathcal{G}_{2^s}$ dont le nombre de feuilletts est le coefficient du binôme $\binom{m}{2^s}$ noté k . Dans ce cas le résultat découle de la commutativité du diagramme suivant:



Nous notons $\theta : \bar{H}^* QY \rightarrow \prod_{s=0}^{\infty} H^*(Z/2)^S \otimes \bar{H}^* Y$ l'application induite par $\prod_{s=0}^{\infty} \tilde{\tau}_s^*(Y)$ et $\alpha : \bar{\Gamma}Y = \bigoplus_{m=1}^{\infty} \bar{H}^* \mathcal{G}_m Y \rightarrow \bigoplus_{s=0}^{\infty} R_s \bar{H}^* Y$ l'application induite par $\bigoplus_{s \geq 0, m \geq 1} \tilde{\tau}_{s,m}^*(Y) = \bigoplus_{s \geq 0} \Delta_s^*$ d'après

1.4.1.1. La commutativité du diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{H}^* Q Y & \xrightarrow{\Theta} & \prod_{s=0}^{\infty} H^*(\mathbb{Z}/2)^s \otimes \bar{H}^* Y \\
 \uparrow \rho \wr & & \uparrow \cup \\
 \bar{\Gamma} Y & \xrightarrow{\alpha} & \bigoplus_{s=0}^{\infty} R_s \bar{H}^* Y
 \end{array}$$

montre que $\Theta = \bigoplus_{s \geq 0} \tau_s^*(Y) : \bar{H}^* Q Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} R_s \bar{H}^* Y$.

PROPOSITION 1.4.1.2 - L'application $\Theta : \bar{H}^* Q Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} R_s \bar{H}^* Y$ induit un isomorphisme, noté encore $\Theta : \mathcal{P} \bar{H}^* Q Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} w_{2^s-1} R_s \bar{H}^* Y$.

Il est clair que pour montrer la proposition précédente il suffit de prouver que l'application $\alpha : \bar{\Gamma} Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} R_s \bar{H}^* Y$ induit un isomorphisme, noté encore $\alpha : \mathcal{P} \bar{\Gamma} Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} w_{2^s-1} R_s \bar{H}^* Y$.

Considérons l'application $\rho_s : R_s \bar{H}^* Y \rightarrow \phi R_{s-1} \bar{H}^* Y$ définie dans [LZ prop. 4.4.7]. Cette application est A-linéaire, son noyan est $w_{2^s-1} R_s \bar{H}^* Y$ et elle vérifie en particulier $\rho_1(st_s y) = \phi(st_{s-1} y)$.

LEMME - 1.4.1.3. Le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 \bar{\Gamma} Y & \xrightarrow{\alpha} & \bigoplus_{s \geq 0} R_s \bar{H}^* Y \\
 \downarrow \lambda & & \downarrow \bigoplus_{s \geq 0} \rho_s \\
 \phi(\bar{\Gamma} Y) & \xrightarrow{\phi \alpha} & \bigoplus_{s \geq 1} \phi R_{s-1} \bar{H}^* Y
 \end{array}$$

Démonstration. Il suffit de prouver que le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 \bar{H}^* \mathcal{G}_{2^s} Y & \xrightarrow{\psi_{2^{s-1}, 2^{s-1}}^*} & [\bar{H}^* \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y \otimes \bar{H}^* \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y]^2 & & \\
 \Delta_s^* \downarrow & & \downarrow & \searrow \pi & \\
 R_s \bar{H}^* Y & \xrightarrow{\rho_s} & \phi R_{s-1} \bar{H}^* Y & \xleftarrow{\phi \Delta_{s-1}^*} & \phi \bar{H}^* \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y
 \end{array}$$

où π et $\psi_{p,q} : \mathcal{G}_p Y \times \mathcal{G}_q Y \rightarrow \mathcal{G}_{p+q} Y$ sont les applications naturelles. Par définition même des applications ρ_1 (voir [L2]) et $\psi_{1,1}^*$ le diagramme (*) est commutatif pour $s=1$. Pour $s \geq 2$ considérons les applications naturelles

$$\mathcal{G}_{2^{s-1}} Y \times \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y \xrightarrow{i_{2^{s-1}}} \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y$$

et

$$\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y \xrightarrow{j_{2^{s-1}}} \mathcal{G}_{2^s} Y$$

où $\mathcal{G}_2 \mathcal{G}_{2^{s-1}}$ désigne le produit en couronne ("wreath product") de \mathcal{G}_2 et $\mathcal{G}_{2^{s-1}}$. La commutativité du diagramme (*) découle du cas $s=1$ et des faits suivant $\psi_{2^{s-1}, 2^{s-1}}^* = j_{2^{s-1}} \circ i_{2^{s-1}}$.

Le diagramme suivant est commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
 \mathcal{G}_2 \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y & \xrightarrow{j_{2^{s-1}}} & \mathcal{G}_{2^s} Y \\
 \Delta_s \uparrow & & \uparrow \Delta_s \\
 B_+ \mathbb{Z}/2 \wedge \mathcal{G}_{2^{s-1}} Y & & \\
 1 \wedge \Delta_{s-1} \uparrow & & \\
 B_+ \mathbb{Z}/2 \wedge B_+ (\mathbb{Z}/2)^{s-1} \wedge Y & = & B_+ (\mathbb{Z}/2)^s \wedge Y
 \end{array}$$

Une conséquence de 1.2.3.2, 1.2.3.4 et de la proposition 4.4.7 de [L.Z] est que l'application $\alpha : \bar{\Gamma}Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} R_s \bar{H}^*Y$ induit une application, notée encore $\alpha : \mathcal{P}\bar{\Gamma}Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} w_{2^s-1} R_s \bar{H}^*Y$. Le reste de ce paragraphe est consacré à la démonstration du fait que $\alpha : \mathcal{P}\bar{\Gamma}Y \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} w_{2^s-1} R_s \bar{H}^*Y$ est un isomorphisme.

Rappelons que la structure de coalgèbres sur ΓY est définie par les applications naturelles $\psi_{p,q} : \mathcal{G}_p Y \times \mathcal{G}_q Y \rightarrow \mathcal{G}_{p+q} Y$. Pour tout $m \geq 2$, nous désignons par $K_m = \bigcap_{1 \leq p \leq m-1} \psi_{p,m-p}^*$. Nous avons par définition même des primitifs de ΓY : $\mathcal{P}\Gamma Y = \bigoplus_{m \geq 1} K_m$, K_1 désignant H^*Y .

LEMME [L] - 1.4.1.4. Le sous-espace K_m de ΓY est nul à moins que m ne soit une puissance de deux.

Démonstration. Pour tout $p : 1 \leq p \leq m-1$, la composition:

$$H^* \mathcal{G}_m Y \xrightarrow{\psi_{p,m-p}^*} H^*(\mathcal{G}_p Y \times \mathcal{G}_{m-p} Y) \xrightarrow{\text{tr}} H^* \mathcal{G}_m Y$$

où tr désigne le transfert, est la multiplication par le coefficient du binôme C_m^p modulo 2. Or, le p.g.c.d. des entiers C_m^p , $1 \leq p \leq m-1$, est égal à 1 si m n'est pas une puissance de deux.

Nous avons donc $\mathcal{P}\Gamma Y = \bigoplus_{s \geq 0} K_{2^s}$ (Par définition même des primitifs $\mathcal{P}\bar{\Gamma}Y = \mathcal{P}\Gamma Y$). La proposition 1.4.1.2 est maintenant une conséquence de:

LEMME - 1.4.1.5. Pour tout entier $s \geq 0$, l'application $\Delta_s^* : \bar{H}^* \mathfrak{S}_{2^s} Y \longrightarrow R_s \bar{H}^* Y$ induit un isomorphisme, noté encore $\Delta_s^* : K_{2^s} \xrightarrow{\sim} w_{2^{s-1}} R_s \bar{H}^* Y$.

Démonstration. Pour $s=0$ le lemme est trivial. Pour $s \geq 1$, K_{2^s} est aussi le noyau de l'homomorphisme $\psi_{2^{s-1}, 2^{s-1}}^*$ en effet, l'inclusion de K_{2^s} dans $\ker \psi_{2^{s-1}, 2^{s-1}}^*$ est clair, l'inclusion en sens contraire résulte de ce que l'on peut choisir des 2-sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_p \times \mathfrak{S}_{2^{s-p}}$, $1 \leq p < 2^{s-1}$, qui soient des 2 sous-groupes de Sylow de $\mathfrak{S}_{2^{s-1}} \times \mathfrak{S}_{2^{s-1}}$. La démonstration de 1.4.1.3 et ce qui précède montrent que l'homomorphisme $\Delta_s^* : \bar{H}^* \mathfrak{S}_{2^s} Y \longrightarrow R_s \bar{H}^* Y$ induit un homomorphisme injectif, noté encore $\Delta_s^* : K_{2^s} \xrightarrow{\sim} w_{2^{s-1}} R_s \bar{H}^* Y$. La surjectivité de cet homomorphisme résulte du fait que le sous- $H^* \mathfrak{S}_{2^s}$ -module de $\bar{H}^* \mathfrak{S}_{2^s} Y$ engendré par $w_{2^{s-1}}$ est contenu dans $\ker \psi_{2^{s-1}, 2^{s-1}}^* = K_{2^s}$ (voir [M₁p: 61]).

1.4.2. Le cas $s \geq 1$: Calcul des primitifs des C_s .

L'image de C'_s par l'application $\Theta : \bar{H}^* QY \rightarrow \bigoplus_{s \geq 0} R_s \bar{H}^* Y$ est contenue dans $\bigoplus_{t < s} R_t \bar{H}^* Y$. Il en résulte que l'application Θ induit une application $\Theta_s : \bar{C}_s \longrightarrow \bigoplus_{t \geq s} R_t \bar{H}^* Y$. Pour les mêmes raisons qu'en 1.4.1.3 l'image par Θ_s de $\mathcal{P}C_s = \beta \bar{C}_s$ est contenue dans le sous-espace $R_s \bar{H}^* Y \oplus \bigoplus_{t > s} w_{2^{t-1}} R_t \bar{H}^* Y$ de $\bigoplus_{t \geq s} R_t \bar{H}^* Y$.

PROPOSITION - 1.4.2. L'application $\rho C_s \rightarrow R_s \bar{H}^* Y \oplus \left(\bigoplus_{t>s} w_{2^t-1} R_t \bar{H}^* Y \right)$ induite par θ_s est un isomorphisme.

Démonstration. On procède par récurrence sur s . Quand $s=0$ il s'agit de la proposition 1.4.1.2. Nous posons pour abrégier $R_s = R_s \bar{H}^* Y$ et $\rho_s = R_s \oplus \bigoplus_{t>s} w_{2^t-1} R_t$ nous notons encore $\theta_s : \rho C_s \rightarrow \hat{\rho}_s$ l'application induite par θ_s .

La suite exacte dans \mathcal{C} :

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow C'_{s+1} // C'_s \rightarrow C_s \rightarrow C_{s+1} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

donne "en passant aux primitifs" (voir 1.2.3.5) la suite exacte dans \mathcal{U} :

$$0 \rightarrow \rho(C'_{s+1} // C'_s) \rightarrow \rho C_s \rightarrow \rho C_{s+1} \xrightarrow{\delta} \phi \rho(C'_{s+1} // C'_s)$$

En effet il est clair que $C'_{s+1} // C'_s$ est primitivement engendré ce qui montre que $\hat{\rho}(C'_{s+1} // C'_s) = \phi \rho(C'_{s+1} // C'_s)$. Nous considérons ensuite le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccccc} & \bar{H}^* \mathcal{E}_{2^s} Y & & \bar{H}^* \mathcal{E}_{2^{s+1}} Y & & & \\ & \downarrow & & \downarrow & & & \\ 0 \longrightarrow & \rho(C'_{s+1} // C'_s) & \longrightarrow & \rho C_s & \longrightarrow & \rho C_{s+1} & \xrightarrow{\delta} \phi \rho(C'_{s+1} // C'_s) \\ & \downarrow \theta_s & & \downarrow \theta_s & & \downarrow \theta_{s+1} & \downarrow \phi \theta_s \\ 0 \longrightarrow & R_s & \hookrightarrow & \rho_s & \longrightarrow & \rho_{s+1} & \longrightarrow \phi R_s \longrightarrow 0 \end{array}$$

Dans ce diagramme la ligne du bas où la flèche $\rho_{s+1} \rightarrow \phi R_s$ est la composition de la projection $\rho_{s+1} \rightarrow R_{s+1}$ et de

$\rho_{s+1} : R_{s+1} \rightarrow \phi R_s$ est exacte; la commutativité du carré de droite résulte de la définition même de δ .

Notre hypothèse de récurrence est que $\theta_s : \beta C_s \rightarrow \beta_s$ est un isomorphisme. En utilisant la surjectivité de la composition: $\bar{H}^* \mathcal{C}_{2^s} Y \rightarrow \rho(C'_{s+1} // C'_s) \xrightarrow{\theta_s} R_s$ on en déduit tout d'abord que $\theta_s : \beta(C'_{s+1} // C'_s) \rightarrow R_s$ est un isomorphisme. Ensuite en utilisant de même la surjectivité de la composition:

$$\bar{H}^* \mathcal{C}_{2^{s+1}} Y \rightarrow \beta C_{s+1} \rightarrow \beta_{s+1} \rightarrow \phi R_s$$

on montre que le connectant δ est surjectif. On peut donc enfin en conclure que θ_s est un isomorphisme.

1.4.3 Fin de la démonstration de 1.3

Au cours de la démonstration précédente nous avons montré que le quotient $C'_{s+1} // C'_s$ est isomorphe $U(R_s \bar{H}^* Y)$ et que le morphisme $U(R_s \bar{H}^* Y) \rightarrow C'_s$ est induit par l'inclusion naturelle de $R_s \bar{H}^* Y$ dans βC_s .

Remarque 1.4.4. Soient n un entier et $C'_{\leq n}$ la sous-algèbre de Hopf de $H^* QY$ engendrée par la sous-coalgèbre $\rho(\bigoplus_{m \leq n} \bar{H}^* \mathcal{C}_m Y)$

Lorsque n n'est pas une puissance de 2 nous avons, d'après 1.4.1.4, $C'_{\leq n-1} \hookrightarrow C'_{\leq n}$ est une égalité. Il en résulte que si s est le plus petit entier tel que $n < 2^s$ alors l'inclusion $C'_{\leq n} \hookrightarrow C'_s$ est une égalité.

1.4.5 Calcul de $\hat{\beta} H^* QY$.

Dans ce paragraphe nous montrons

PROPOSITION - 1.4.5. Pour tout entier $s \geq 0$, $\hat{\beta} C_s = 0$.

Démonstration. Considérons la suite exacte dans \mathcal{C} (voir 1.2.1).

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow C'_s \rightarrow C_0 \rightarrow C_s \rightarrow \mathbb{Z}/2, \quad C_0 = H^*QY.$$

Par définition même des C'_s on a : $\varinjlim_s C'_s = C_0$, il en résulte donc : $\varinjlim_s C_s = \mathbb{Z}/2$. Par définition du foncteur $\hat{\rho}$ (voir par exemple 1.2.3) on vérifie qu'il commute à limite inductive donc : $\varinjlim_s \hat{\rho}C_s = 0$. La suite exacte dans \mathcal{C} (voir la démonstration de 1.4.2)

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow U(R_s \bar{H}^*Y) \rightarrow C_s \rightarrow C_{s+1} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

et la surjectivité du connectant $\partial : \hat{\rho}C_{s+1} \rightarrow \Phi_{R_s} \bar{H}^*Y$ (voir la démonstration de 1.4.2) montrent l'isomorphisme $\hat{\rho}C_s \simeq \hat{\rho}C_{s+1}$. D'après ce qui précède nous avons : $\mathcal{P}C_0 \simeq \varinjlim_s \mathcal{P}C_s = 0$ et donc $\hat{\rho}C_s = 0$ pour tout $s \geq 0$.

Remarque 1.4.6. La proposition précédente et la définition des foncteur $\hat{\rho}$ (voir 1.2.3) montrent qu'on a, pour tout $s \geq 0$, une suite exacte dans \mathcal{C} :

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow U(\hat{\rho}C_s) \rightarrow C_s \xrightarrow{\lambda} \Phi C_s \rightarrow \mathbb{Z}/2.$$

2. La théorie des invariants de Hopf d'ordre supérieur.

2.1 Invariants de Hopf "au niveau E_2 " .

Soient X et Y deux espaces et $\{E_r^{s,t} = E_r^{s,t}(S^{\infty}X, S^{\infty}Y)\}_{r \geq 2}$ la suite spectrale d'Adams, relative à la cohomologie modulo 2, convergeant dans les bons cas vers $[S^{\infty}X, S^{\infty}Y]$. On a :

$$\begin{aligned} E_2^{s,s} &\simeq \text{Ext}_A^{s,s}(\bar{H}^*Y, \bar{H}^*X) = \text{Ext}_{\mathcal{M}}^s(\Sigma^{1-s}\bar{H}^*Y, \Sigma\bar{H}^*X) \\ &= H_{-s}(\text{Hom}_{\mathcal{M}}(L_*, \Sigma\bar{H}^*X)) \end{aligned}$$

L_* désignant une \mathcal{M} -résolution libre de $\Sigma^{1-s}\bar{H}^*Y$

$$= H_{-s}(\text{Hom}_{\mathcal{U}}(DL_*, \Sigma\bar{H}^*X))$$

puisque le A -module $\Sigma\bar{H}^*X$ est instable.

On obtient donc une application :

$$E_2^{s,s} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(H_s DL_*, \Sigma\bar{H}^*X) = \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_s \Sigma^{1-s}\bar{H}^*Y, \Sigma\bar{H}^*X) .$$

D_s désignant le s -ème dérivé du foncteur D de déstabilisation.

On a le résultat suivant dont on trouvera un énoncé plus précis dans [LZ] (théorème 2.5)

THEOREME 2.1 - Soit M un A -module instable alors le A -module $D_s \Sigma^{1-s}M$ est naturellement isomorphe à $\Sigma R_s M$.

Par conséquent l'application décrite ci-dessus est une application que nous notons $\mathcal{H}_2^s : E_2^{s,s} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(R_s \bar{H}^*Y, \bar{H}^*X)$.

2.2 Invariants de Hopf "au niveau E_∞ ".

Soient $[S^\infty X, S^\infty Y] = F^0 \supset F^1 \supset \dots \supset F^s \supset \dots$ la filtration d'Adams de $[S^\infty X, S^\infty Y]$ relative à la cohomologie modulo 2 (voir $[A_1]$, $[M.T]$). Avec les notations de 1.1 on a.

PROPOSITION 2.2 - Soient f un élément de $[S^\infty X, S^\infty Y]$ de filtration $\geq s$ et \tilde{f} son adjoint dans $[X, QY]$, alors la composition

$$\bar{H}^*_m Y \xrightarrow{r_m^*} H^* QY \xrightarrow{\tilde{f}^*} H^* X$$

(i) est nulle si $m < 2^s$.

(ii) se factorise à travers $R_s \bar{H}^* Y$ si $m=2^s$.

Il résulte de cette proposition, dont la démonstration sera donnée en 2.6.1 l'application naturelle $\mathcal{H} : [S^\infty X, S^\infty Y] \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{H}}(H^* QY, H^* X)$ induit, pour tout $s \geq 0$, une application notée $\mathcal{H}_\infty^s : E_\infty^{s,s} = F^s/F^{s+1} \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(R_s \bar{H}^* Y, \bar{H}^* X)$.

2.3 Compatibilité des applications \mathcal{H}_∞^s et \mathcal{H}_2^s .

Soit $Z_{2,\infty}^{s,s}$ l'image réciproque de $E_\infty^{s,s}$ dans $E_2^{s,s}$. $Z_{2,\infty}^{s,s}$ est contenu dans le sous-espace noté $\bar{Z}_{2,\infty}^{s,s}$ des cycles permanents et coïncide avec celui-ci si la suite spectrale d'Adams est convergente (voir $[A_1]$, $[C]$, $[L]$).

La compatibilité des applications \mathcal{H}_∞^s et \mathcal{H}_2^s est mise en évidence par le théorème suivant dont la démonstration sera donnée en 2.6.2

THEOREME 2.3 - Les applications \mathcal{H}_2^s et \mathcal{H}_∞^s sont compatibles pour tout $s \geq 0$. Plus précisément le diagramme suivant est commutatif.

$$\begin{array}{ccc}
 Z_{2,\infty}^{s,s} & \longrightarrow & E_\infty^{s,s} & \xrightarrow{\mathcal{H}_\infty^s} & \text{Hom}_{\mathcal{U}}(R_S \bar{H}^* Y, \bar{H}^* X) \\
 \downarrow \cong & & & & \\
 \bar{Z}_{2,\infty}^{s,s} & \hookrightarrow & E_2^{s,s} & \xrightarrow{\mathcal{H}_2^s} &
 \end{array}$$

2.4 Remarques.

(i) Rappelons que si \mathcal{X} est un spectre on désigne par $\Omega^\infty \mathcal{X}$ le 0-ème espace d'un Ω -spectre équivalent à \mathcal{X} (voir $[A_2]$). Soit $\{Y_s\}_{s \geq 0}$ une résolution d'Adams du spectre $Y_0 = S^\infty Y$ relative à la cohomologie modulo 2 $[A_1], [A_3]$. Nous notons $e_s : S^\infty \Omega^\infty Y_s \rightarrow Y_s$ l'application naturelle et $\rho_s : S^\infty \Omega^\infty Y_s \rightarrow Y_0$ la composée de e_s et de la composition $Y_s \rightarrow Y_{s-1} \rightarrow \dots \rightarrow Y_0$. Par définition ρ_s est un élément de $[S^\infty \Omega^\infty Y_s, Y_0]$ de filtration d'Adams s . En fait $\rho_s : S^\infty \Omega^\infty Y_s \rightarrow Y_0$ "joue le rôle" d'une application universelle pour les éléments de $F^s \subset [S^\infty X, S^\infty Y]$ en ce sens que toute application $f : S^\infty X \rightarrow S^\infty Y$ de filtration d'Adams s se factorise à travers $S^\infty \Omega^\infty Y_s : f = \rho_s \circ S^\infty \tilde{f}_s$ où $\tilde{f}_s : X \rightarrow \Omega^\infty Y_s$ est l'adjointe d'un relevé $f_s : S^\infty X \rightarrow Y_s$ de f . Il en résulte que par fonctorialité il suffit de prouver la proposition 2.2 et le théorème 2.3 dans le cas où l'espace X est $\Omega^\infty Y_s$. Nous sommes ainsi amenés à étudier la cohomologie modulo 2 des espaces $\Omega^\infty Y_s$.

(ii) A partir de maintenant nous considérons la résolution "canonique" d'Adams pour le spectre $S^\infty Y$ dont nous rappelons la définition (voir [A₃]). Soit \bar{K} la fibre de l'application canonique $S^\infty S^0 \rightarrow K$ où $K = \{K(\mathbb{Z}/2, n)\}_{n \geq 0}$ désigne le spectre d'Eilenberg-MacLane modulo 2. Le spectre Y_s est alors défini par: $Y_s = \bar{K} \wedge \dots \wedge \bar{K} \wedge Y_0$; \bar{K} s-fois. On a des cofibrations $Y_{s+1} \rightarrow Y_s \rightarrow Y_s/Y_{s+1}$ telles que l'homomorphisme $H^*Y_s \rightarrow H^*Y_{s+1}$ est trivial et Y_s/Y_{s+1} est un spectre d'Eilenberg-MacLane généralisé que notons \mathbb{W}_s .

2.5 Cohomologie des espaces $\Omega^\infty Y_s$.

2.5.1. Relation entre dérivés de la déstabilisation et cohomologie des spectres Y_s . Dans ce paragraphe nous montrons que l'application $\alpha^{\bar{H}^*Y} : D_S \Sigma^{-s} \bar{H}^*Y \rightarrow H^*((\mathbb{Z}/2)^S) \otimes \bar{H}^*Y$ définie "algébriquement" dans [LZ₁p: 5] à une définition "géométrique" faisant intervenir les spectres Y_s . Plus précisément. Soit $\tau_s(Y) : B_+(\mathbb{Z}/2)^S \wedge Y \rightarrow Y$ l'application définie en 1.4.1. Son adjointe $\tilde{\tau}_s(Y) : B_+(\mathbb{Z}/2)^S \wedge Y \rightarrow \Omega^\infty S^\infty Y$ se factorise à travers $\Omega^\infty Y_s$ en effet, l'adjointe $\tilde{\tau} : B_+ \mathbb{Z}/2 \rightarrow QS^0$ du transfert $\tau : B_+ \mathbb{Z}/2 \rightarrow S^0$ (voir 1.4.1) se factorise à travers $\coprod_{i \geq 0} Q_{2i} S^0$, $Q_j S^0$ désignant la composante connexe de QS^0 des lacets de degré j . On vérifie que $\coprod_{i \geq 0} Q_{2i} S^0 = \Omega^\infty \bar{K}$ où \bar{K} est le spectre défini en 2.4 (ii). Ceci prouve que $\tau_s(Y) : B_+(\mathbb{Z}/2)^S \wedge Y \rightarrow Y$ est de filtration d'Adams s et qu'un relevé "canonique", noté $\hat{\tau}_s(Y)$, de $\tau_s(Y)$ à Y_s est donné par la composition suivante:

$$B_+(\mathbb{Z}/2)^S \wedge Y \xrightarrow{\tilde{\tau}_s(Y)} \Omega^\infty Y_s \xrightarrow{e_s} Y_s$$

où e_s est défini en 2.4 (i). Considérons la cofibration

$Y_s \rightarrow Y_{s-1} \rightarrow W_{s-1}$ (voir 2.4 (ii)). D'après la définition même des foncteurs dérivés le noyau de $DH^*Y_s \rightarrow D\Sigma^{-1}H^*W_{s-1}$ s'identifie à $D_S \Sigma^{-s} \bar{H}^*Y$. Nous avons:

LEMME 2.5.1.1. - La restriction à $D_S \Sigma^{-s} \bar{H}^*Y$ de l'application $DH^*Y_s \rightarrow H^*((\mathbb{Z}/2)^S) \otimes \bar{H}^*Y$ induite par $\hat{\tau}_s(Y)$ s'identifie à $\alpha_s \bar{H}^*Y$.

Identifions $H^*(\mathbb{Z}/2)$ à l'algèbre polynômiale $\mathbb{Z}/2[u]$ où u est de degré 1. Il existe un A -module E caractérisé par les propriétés suivantes: E contient $H^*(\mathbb{Z}/2)$ comme sous- A -module, $E/H^*(\mathbb{Z}/2) = \Sigma^{-1} \mathbb{Z}/2$ et $Sq^i u^{-1} = u^{i-1}$, u^{-1} désignant le générateur de E en degré -1 . Nous notons e l'élément de $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^1(\Sigma^{-1} \mathbb{Z}/2, H^*(\mathbb{Z}/2))$ représenté par la suite:

$$0 \rightarrow H^*(\mathbb{Z}/2) \rightarrow E \rightarrow \Sigma^{-1} \mathbb{Z}/2 \rightarrow 0.$$

Le lemme 2.5.1.1 est une conséquence, d'une part, de la définition de l'application $\alpha_s \bar{H}^*Y : D_S \Sigma^{-s} \bar{H}^*Y \rightarrow H^*((\mathbb{Z}/2)^S) \otimes \bar{H}^*Y$ en terme de "cap-produit" par l'élément $e^S(\bar{H}^*Y)$ de $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^S(\Sigma^{-s} \bar{H}^*Y, H^*(\mathbb{Z}/2)^S \otimes \bar{H}^*Y)$ ($e^S(\bar{H}^*Y) = e \otimes \dots \otimes e \otimes 1_{\bar{H}^*Y}$, e s -fois) (voir [LZ p: 3]), et d'autre part du lemme suivant qui "relie" l'élément e de $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^1(\Sigma^{-1} \mathbb{Z}/2, H^*(\mathbb{Z}/2))$ au transfert $\tau : B_+ \mathbb{Z}/2 \rightarrow S^0$

LEMME 2.5.1.2. - Soit T la cofibre du transfert $\tau : B_+ \mathbb{Z}/2 \rightarrow S^0$. Alors, l'extension de A -modules

$$0 \rightarrow \bar{H}^*(B_+ \mathbb{Z}/2) \rightarrow \Sigma^{-1} H^*T \rightarrow \Sigma^{-1} H^*S^0 \rightarrow 0$$

s'identifie à l'extension e .

Démonstration. Soit M un A -module instable, on montre facilement que l'application naturelle: $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^1(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2, M) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2, M)$ est un isomorphisme. En particulier: $\text{Ext}_{\mathcal{M}}^1(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2, \bar{H}^*(B_+\mathbb{Z}/2)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{U}}(D_1\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2, \mathbb{Z}/2[u])$. Or, d'après [LZ], $D_1\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2 \simeq \mathbb{Z}/2[u]$ d'où:

$$\text{Ext}_{\mathcal{M}}^1(\Sigma^{-1}\mathbb{Z}/2, \bar{H}^*(B_+\mathbb{Z}/2)) \simeq \text{Hom}_{\mathcal{U}}(\mathbb{Z}/2[u], \mathbb{Z}/2[u]) \simeq \mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2.$$

Soit ι le générateur de \bar{H}^*S^0 alors l'image de l'extension correspondant au transfert $\tau : B_+\mathbb{Z}/2 \rightarrow S^0$ dans $\mathbb{Z}/2 \oplus \mathbb{Z}/2$ est $(\text{Sq}_{\tau}^1 \iota, \text{Sq}_{\tau}^2 \iota)$, il nous suffit donc de montrer que les classes $\text{Sq}_{\tau}^1 \iota$ et $\text{Sq}_{\tau}^2 \iota$ sont non nulles. Pour cela considérons les compositions:

$$\begin{aligned} \eta_0 : S^0 = \mathbb{R}P_+^0 &\rightarrow \mathbb{R}P_+^{\infty} \xrightarrow{\tau} S^0 \\ \eta_1 : S^1 &\rightarrow S_+^1 = \mathbb{R}P_+^1 \rightarrow \mathbb{R}P_+^{\infty} \xrightarrow{\tau} S^0. \end{aligned}$$

On vérifie que η_0 et η_1 sont respectivement le double du générateur de π_0^S et le générateur du π_1^S . On a donc $\text{Sq}_{\eta_0}^1 \iota \neq 0$ et $\text{Sq}_{\eta_1}^2 \iota \neq 0$, et par functorialité $\text{Sq}_{\tau}^1 \iota \neq 0$ et $\text{Sq}_{\tau}^2 \iota \neq 0$.

2.5.2. Calcul de la cohomologie des espaces $\Omega^{\infty}Y_S$.

Dans [LZ p: 9] nous avons vu que $D_S \Sigma^{-S} \bar{H}^*Y$ contient $\Omega D_S \Sigma^{1-S} \bar{H}^*Y$ qui est canoniquement isomorphe à $R_S \bar{H}^*Y$: ainsi l'algèbre homologique donne t-elle une application: $R_S \bar{H}^*Y \rightarrow H^* \Omega^{\infty}Y_S$. La proposition ci-dessous, qui calcul la cohomologie de $\Omega^{\infty}Y_S$, la relie à l'homomorphisme naturelle: $H^*(QY) \rightarrow H^* \Omega^{\infty}Y_S$.

PROPOSITION - 2.5.2. Soit s un entier ≥ 0 , nous avons:

(i) La factorisation canonique dans \mathcal{C} du morphisme:
 $H^*QY \rightarrow H^*\Omega^\infty Y_s$ est la suivante:

$$H^*QY \longrightarrow C_s \hookrightarrow H^*\Omega^\infty Y_s$$

où C_s est l'algèbre de Hopf quotient définie en 1.2.1.

(ii) Soit $i : R_s \bar{H}^* Y \hookrightarrow D\bar{H}^* Y_s$ l'inclusion donnée par l'algèbre homologique, à savoir la composition:

$$R_s \bar{H}^* Y \hookrightarrow D_s \Sigma^{-s} \bar{H}^* Y \hookrightarrow D\bar{H}^* Y_s,$$

alors la composition

$$R_s \bar{H}^* Y \xrightarrow{i} D\bar{H}^* Y_s \longrightarrow \mathcal{P}H^*\Omega^\infty Y_s$$

se factorise par une application: $R_s \bar{H}^* Y \rightarrow \mathcal{P}C_s$ qui coïncide avec l'inclusion naturelle de $R_s \bar{H}^* Y$ dans $\mathcal{P}C_s$ (voir 1.3).

(iii) L'application naturelle:

$$\begin{array}{c} C_s \otimes U(D\bar{H}^* Y_s) \\ U(R_s \bar{H}^* Y) \end{array} \rightarrow H^*\Omega^\infty Y_s$$

est un isomorphisme; $H^*\Omega^\infty Y_s$ est donc le produit cofibré dans la catégorie \mathcal{C} de C_s et $U(D\bar{H}^* Y_s)$ sur $U(R_s \bar{H}^* Y)$.

(iv) On a dans \mathcal{C} la suite exacte naturelle suivante:

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow U(D\bar{H}^* Y_s) \rightarrow H^*\Omega^\infty Y_s \rightarrow C_{s+1} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

Démonstration. Cette proposition se démontre par récurrence sur s ; le cas $s=0$ est trivial.

Pour passer de s à $s+1$ on applique le foncteur Ω^∞ à la cofibration de spectres: $Y_{s+1} \rightarrow Y_s \rightarrow W_s$. On obtient ainsi une fibration d'espaces: $\Omega^\infty Y_{s+1} \xrightarrow{i} \Omega^\infty Y_s \xrightarrow{f} \Omega^\infty W_s$ qui possède les propriétés suivantes:

- $\Omega^\infty Y_{s+1}$, $\Omega^\infty Y_s$, $\Omega^\infty W_s$ sont des H-espaces, connexes, homotopiquement commutatifs, dont la cohomologie modulo 2 est localement finie.
- i et f sont des H-applications.
- $\pi_1 \Omega^\infty W_s$ n'opère pas sur l'homologie de $\Omega^\infty Y_{s+1}$.
- en tant qu'algèbre $H^* \Omega^\infty W_s$ est isomorphe à une algèbre libre commutative.

Dans ce cas la suite spectrale d'Eilenberg-Moore est particulièrement efficace pour calculer $H^* \Omega^\infty Y_{s+1}$ en fonction du noyau $\text{Ker } f^*$ et du conoyau $\text{Coker } f^*$ de f^* dans la catégorie $\mathcal{C} [L_1], [L_2]$. Avant de continuer la démonstration de cette proposition nous allons rappeler quelques résultats concernant cette suite spectrale.

L'application naturelle: $\text{Coker } f^* \rightarrow H^* \Omega^\infty Y_{s+1}$ est un morphisme injectif de la catégorie \mathcal{C} . Nous désignant par T le quotient $H^* \Omega^\infty Y_{s+1} // \text{Coker } f^*$. L'application $\text{ker } f^* \rightarrow \text{coker } i^*$ définie à l'aide, par exemple, de l'application naturelle $S\Omega^\infty Y_{s+1} \rightarrow \Omega^\infty W_s / \Omega^\infty Y_s$ reliant fibre et cofibre de f , induit un morphisme d'algèbres de Hopf gradués $\nu : U(\Sigma^{-1} \mathcal{Q} \text{Ker } f^*) \rightarrow T^{(*)}$ lorsque $U(\Sigma^{-1} \mathcal{Q} \text{Ker } f^*)$ est muni de sa filtration primitive (voir $[M_2]$) et T est muni de la filtration induite par celle de $H^* \Omega^\infty Y_{s+1}$. On vérifie, d'après $[L_1, \text{thm } 3.2]$, qu'au niveau

(*) \mathcal{Q} désigne les indécomposables.

des gradués

$$E_0(v) : E_0 U(\Sigma^{-1} \mathcal{L} \text{Ker } f^*) = \Lambda(\Sigma^{-1} \mathcal{L} \text{Ker } f^*) \rightarrow E_0 T = \Lambda(\Sigma^{-1} \mathcal{L} \text{Ker } f^*)$$

est un isomorphisme. Nous en déduisons que $v : U(\Sigma^{-1} \mathcal{L} \text{Ker } f^*) \rightarrow T$ est un isomorphisme et que nous avons la suite exacte courte dans \mathcal{C} .

$$(*) \quad \mathbb{Z}/2 \rightarrow \text{Coker } f^* \rightarrow H^* \Omega^\infty Y_{s+1} \rightarrow U(\Sigma^{-1} \mathcal{L} \text{Ker } f^*) \rightarrow \mathbb{Z}/2 .$$

Ceci rappelé voilà la description de l'induction de s à $s+1$ que pour la commodité nous divisons en six étapes.

1^{ere} étape: factorisation canonique de f^* . Puisque \mathcal{W}_s est un spectre d'Eilenberg-MacLane $H^* \Omega^\infty \mathcal{W}_s$ est isomorphe à $\text{UDH}^* \mathcal{W}_s$. On en déduit que la factorisation canonique de f^* est la suivante:

$$\text{UDH}^* \mathcal{W}_s \longrightarrow \text{UDH}^* Y_s \hookrightarrow H^* \Omega^\infty Y_s$$

l'injectivité de la flèche de droite résulte de (iv). Toujours à l'aide de (iv) nous avons $\text{Coker } f^* \simeq C_{s+1}$.

2^{eme} étape: d'après la 1^{ere} étape la factorisation canonique dans \mathcal{C} du morphisme $H^* \Omega^\infty Y_0 \rightarrow H^* \Omega^\infty Y_{s+1}$ est la suivante:

$$\begin{array}{ccc} H^* \Omega^\infty Y_0 & \longrightarrow & H^* \Omega^\infty Y_{s+1} \\ \downarrow & & \uparrow \\ H^* \Omega^\infty Y_s & \longrightarrow & \text{Coker } f^* \simeq C_{s+1} \end{array}$$

d'où le (i) pour $s+1$.

3^{eme} étape: détermination de $\Sigma^{-1}\mathcal{Q}\text{Ker } f^*$. Puisque le foncteur U est exact on a $\text{Ker } f^* \simeq U(N)$, N désignant le noyau de: $DH^*W_s \rightarrow DH^*Y_s$. Or, par définition des foncteurs dérivés on a une suite exacte dans \mathcal{U} :

$$0 \rightarrow D_1H^*Y_s \rightarrow D\mathcal{E}H^*Y_{s+1} \rightarrow DH^*W_s \rightarrow DH^*Y_s \rightarrow 0$$

on encore à cause de l'isomorphisme $D_tH^*Y_s \simeq D_{t+1}\Sigma^{-1}H^*Y_{s-1}$:

$$0 \rightarrow D_{s+1}\Sigma^{-s}\bar{H}^*Y \rightarrow D\Sigma H^*Y_{s+1} \rightarrow DH^*W_s \rightarrow DH^*Y_s \rightarrow 0$$

Il en résulte: $\text{Ker } f^* \simeq U(D\mathcal{E}H^*Y_{s+1}/D_{s+1}\Sigma^{-s}\bar{H}^*Y)$. En utilisant la formula $\Sigma^{-1}\mathcal{Q}U(\) = \Omega(\)$, puis l'exactitude à droite de Ω , et enfin la formule $\Omega D = D\Sigma^{-1}$, il vient :

$$\Sigma^{-1}\mathcal{Q}\text{Ker } f^* \simeq DH^*Y_{s+1}/R'_{s+1} \text{ en posant: } R'_{s+1} = \Omega D_{s+1}\Sigma^{-s}\bar{H}^*Y$$

(nous retardons volontairement l'identification de R'_{s+1} avec $R_{s+1}\bar{H}^*Y$ (voir [LZ p: 6])).

D'après ce qui précède la suite exacte (*) s'écrit:

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow C_{s+1} \rightarrow H^*\Omega^\infty Y_{s+1} \rightarrow U(DH^*Y_{s+1}/R'_{s+1}) \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

Il en résulte que la composition $R'_{s+1} \hookrightarrow DH^*Y_{s+1} \rightarrow \mathcal{P}H^*\Omega^\infty Y_{s+1}$ se factorise par une application: $R'_{s+1} \rightarrow \mathcal{P}C_{s+1}$.

4^{eme} étape: identification de l'application: $R'_{s+1} \rightarrow \mathcal{P}C_{s+1}$. Pour avoir (ii - s+1) il reste à montrer que cette application et la composition de l'isomorphisme $R'_{s+1} \simeq R_{s+1}\bar{H}^*Y$ de [LZ p: 6] et de l'inclusion naturelle de $R_{s+1}\bar{H}^*Y$ dans $\mathcal{P}C_{s+1}$ (voir 1.3). Pour cela on utilise les points suivants:

- L'application: $\mathcal{P}C_{s+1} \rightarrow \bigoplus_{t \geq s+1} \bar{H}^*(B_+(\mathbb{Z}/2)^t \wedge Y)$ induite en cohomologie par les applications: $\tilde{\tau}_t(Y) : B_+(\mathbb{Z})^t \wedge Y \rightarrow \Omega^\infty Y_t \rightarrow \Omega^\infty Y_{s+1} \rightarrow QY$, est injective (voir 1.4.2).
- La composition: $R'_{s+1} \rightarrow \mathcal{P}C_{s+1} \rightarrow \bar{H}^*(B_+(\mathbb{Z}/2)^t \wedge Y)$ est nulle pour $t > s+1$ puisque l'application $H^*Y_{s+1} \rightarrow H^*Y_t$ est nulle.
- D'après le lemme 2.5.1.1 la composition: $R'_{s+1} \rightarrow \mathcal{P}C_{s+1} \rightarrow \bar{H}^*(B_+(\mathbb{Z}/2)^{s+1} \wedge Y)$ s'identifie à la restriction de $\alpha_{s+1}^{\bar{H}^*Y}$ à R'_{s+1} .

5^{ème} étape: démonstration de (iii) pour $s+1$. Nous venons de voir que nous avons un diagramme commutatif dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccc}
 & & U(DH^*Y_{s+1}) \\
 & \nearrow & \searrow \\
 U(R_{s+1}\bar{H}^*Y) & & H^*\Omega^\infty Y_{s+1} \\
 & \searrow & \nearrow \\
 & & C_{s+1}
 \end{array}$$

et par conséquent un morphisme:

$$\begin{array}{ccc}
 C_{s+1} & \otimes & U(DH^*Y_{s+1}) \\
 & & \downarrow \\
 & & U(R_{s+1}\bar{H}^*Y) \\
 & \rightarrow & H^*\Omega^\infty Y_{s+1}
 \end{array}$$

Le morphisme prend place dans le diagramme commutatif ci-dessous où les lignes sont exactes dans \mathcal{C} :

$$\begin{array}{ccccccc}
 \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & C_{s+1} & \rightarrow & C_{s+1} \otimes U(R_{s+1}\bar{H}^*Y) & \rightarrow & U(DH^*Y_{s+1}) \rightarrow U(DH^*Y_{s+1}/R_{s+1}\bar{H}^*Y) \rightarrow \mathbb{Z}/2 \\
 & & \parallel & & \downarrow & & \parallel \\
 \mathbb{Z}/2 & \rightarrow & C_{s+1} & \rightarrow & H^*\Omega^\infty Y_{s+1} & \rightarrow & U(DH^*Y_{s+1}/R_{s+1}\bar{H}^*Y) \rightarrow \mathbb{Z}/2
 \end{array}$$

et est donc un isomorphisme.

6^{eme} étape: démonstration de (iv) pour $s+1$. En échangeant les rôles de C_{s+1} et $U(DH^*Y_{s+1})$ on a aussi la suite exacte:

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow U(DH^*Y_{s+1}) \rightarrow C_{s+1} \otimes U(R_{s+1} \bar{H}^*Y) \rightarrow C_{s+1} // U(R_{s+1} \bar{H}^*Y) \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

on encore:

$$\mathbb{Z}/2 \rightarrow U(DH^*Y_{s+1}) \rightarrow H^* \Omega^\infty Y_{s+1} \rightarrow C_{s+2} \rightarrow \mathbb{Z}/2$$

2.6. Démonstration de la proposition 2.2 et du théorème 2.3.

2.6.1. Démonstration de la proposition 2.2.

Soit $\rho_s : S^\infty \Omega^\infty Y_s \rightarrow S^\infty Y$ l'application définie en 2.4 (i). La composition $\bar{H}^* \mathcal{G}_m Y \xrightarrow{r_m^*} H^* QY \xrightarrow{\tilde{\rho}_s^*} H^* \Omega^\infty Y_s$ est nulle si $m < 2^s$ d'après le (i) de 2.5.2 et la définition des C_s (voir 1.2.1). Pour $m = 2^s$, la composition précédente se factorise à travers $R_s \bar{H}^* Y$ d'après 1.3 et 1.4.2. On achève la preuve de la composition 2.2 par functorialité (voir 2.4 (ii)).

2.6.2. Démonstration du théorème 2.4.

Par functorialité (voir 2.4 (ii)) il suffit de prouver le théorème 2.3 pour $X = \Omega^\infty Y_s$. Dans ce cas le théorème 2.3 résulte du point (ii) de 2.5.2.

Références

- [B] Barratt & Eccles : Π^+ -structures I, II et III, *Topology* 13 (1974)
p: 25-45, 113-126 et 199-207.
- [V] Vogel : *Ann. Sc. Ec. Norm. Sup.* 4^{ème} série, 7, Fasc 3 (74) 317-358.
- [L.Z] Lannes & Zarati : *Sur les foncteurs dérivés de la déstabilisation.*
à paraître.
- [M₁] Madsen & Milgram : The classifying spaces for surgery and cobordism of manifolds. *Ann. of Math. Studies* N° 92 (1979).
- [D] Dickson : A fundamental system of invariants of the general modular linear group. *Trans. AMS* 12 (1911) #5-98.
- [M₂] Milnor - Moore : On the structure of Hopf algebras. *Ann. of Math.* 81 (65) 211-264.
- [S] Steenrod - Epstein : *Cohomologie operations* : *Annals of Math. studies* n° 50 (62).
- [W] Wraith . (je n'ai pas de référence).
- [P] Priddy . Transfer, symmetric group, and stable homotopy theory
Proc. A.M.S.
- [M₃] May . The geometry of iterated loop spaces. *L.N in Math.*
n° 271 (1972).

- [L] Lannes . Homomorphisme d'Hurewicz et immersions , à paraître .
- [C] Cartan - Eilenberg . Homological algebra .
- [A₁] Adams . Stable homotopy theory and generalized homology ;
chicago lectures in mathematics, 1974 .
- [A₂] Adams . Loop space
- [A₃] Adams . Stable homotopy theory . Lect. Notes in Math. 3 (1964).
- [M.T] Mosher & Tongora . Cohomology Operations and applications in
homotopy theory .
- [L₁] Smith . L . Lectures on the EMSS ; n° 134 (1970).
- [L₂] Smith . L . Homological algebra and the EMSS . Trans. AMS
129 (67) 58-93 .