

# Kalkil 1A

## *diferansyasyon*



## Pwofesè yo



### David Jerison

David Jerison te resevwa doktora li nan Princeton University an 1980, epi li te antre kòm manm fakilte matematik nan MIT an 1981. An 1985, li te resevwa yon bous A.P. Sloan Foundation Fellowship ak yon rekonpans Presidential Young Investigator Award. An 1999, li te eli manm American Academy of Arts and Sciences. An 2004, li te chwazi kòm Margaret MacVicar Faculty Fellow pou rekonèt bon jan ansèyman li. An 2012, American Mathematical Society te bay li ak kolaboratè li Jack Lee Bergman Prize nan domèn analiz konplèks.

Rechèch Pwofesè Jerison konsantre sou ekwasyon derive pasyèl (PDE) ak analiz Fourier. Li anseye kalkil yon sèl varyab, kalkil plizyè varyab, ak ekwasyon diferansyèl plizyè fwa nan MIT.



### Gigliola Staffilani

Gigliola Staffilani se Pwofesè Matematik Abby Rockefeller Mauzé depi 2007. Li te resevwa doktora li nan University of Chicago an 1995. Apre sa, li te gen pòs ansèyman nan Stanford, Princeton, ak Brown, epi li te rantre nan MIT an 2002 kòm manm fakilte matematik. Li te resevwa yon pri pou ansèyman ak yon bous rechèch pandan li te nan Stanford. An 2000, li te resevwa yon Sloan Foundation Fellowship, epi an 2014 li te eli nan American Academy of Arts and Sciences.

Pwofesè Staffilani se yon analis, epi li konsantre sou PDE non-lineyè ak dispèsif. Li te anseye kalkil plizyè varyab ak ekwasyon diferansyèl plizyè fwa nan MIT.

## Enstriktè yo



### Jen French

Jen French te resevwa doktora li nan matematik nan MIT an 2010, kote li te espesyalize nan topoloji aljebrik. Apre sa, li te travay pou 10 ane pou devlope kontni edikatif matematik sou entènèt avèk Depatman Matematik MIT. Pandan peryòd sa a, li te devlope 10 kou sou entènèt (MOOCs), plizyè vizyalizasyon entèaktif, ak yon zouti evalyasyon sou entènèt ki pèmèt pwofesè yo korije eskis matematik elèv yo otomatikman. Li ap anseye kounye a nan yon pwogram pou premye ane etidyan MIT ki rele Concourse.



### Stephen Wang

Stephen Wang te resevwa doktora li nan matematik nan University of Chicago an 2006, kote li te espesyalize nan jewometri. Li te resevwa pri pou ansèyman nan Chicago ak Harvard University. Li te tou manm fakilte nan Haverford College ak Bucknell University anvan li te vin mete ansanm ak ekip kalkil MIT a. Nan sezon otòn 2015, li te rantre nan fakilte matematik Rice University.

## **Remèsiman Espesyal**

Gwo remèsiman pou Pwofesè Arthur Mattuck ki te lanse tout bagay yo. Gwo mèsì tou pou Timothy Hall ki te poze David Jerison kesyon an: Kijan tiwolyèn yo konpòte yo matematikman? Nou remèsye tou David Custer ak Susan Ruff ki te ede ak tiwolyèn yo nan lavi reyèl e ki te pataje eksperyans li ak elèv MIT yo sou tiwolyèn.

### **Tradiksyon Kou a**

Charlot Leonard De Gracia

### **Imaj Kouvèti Devan an**

*Sitadèl Laferyè*

*Foto pa: Alan B. Photography*

*Lisans: CC BY-NC-SA 2.0*

### **Etidyan MIT yo**

Phillip Ai  
Emanuele Ceccarelli  
Peter Haine  
Peter Kleinhenz  
Mohammed Kane

### **Etidyan Doktora MIT yo**

Tudor Cristea-Platon  
Kristin Kurianski  
Lucas Tambasco

### **Ekip Videyo MITx**

Brittany Bellamy  
Chris Boebel  
Kenny Caudill  
Tsinu Heramo  
Jess Kloss  
Douglass McLean  
Lana Scott  
Catilin Stier

### **Pèsonèl Sipò MITx**

Kyle Boots  
Brad K. Goodman  
Shelly Upton

### **Devlopè Teknoloji Edikatif yo**

J.M. Claus  
Brian French  
Eric Heubel  
Haynes Miller  
Martin Segado  
Derek Rhodes

## **Kou sa a te finanse an pati pa**

Fon Pwomosyonèl Klas 1960

Gran Pri Klas Alumni 2014–2015

Fon Wertheimer

# Tablo Kontni

---

<b>Inite 0: Limit</b>	<b>1</b>
1. Entwodiksyon sou limit yo .....	2
2. Kontinite .....	21
3. Limit kosyan yo .....	42
4. Devwa 0 Pati A .....	60
<b>Inite 1: Derive a</b>	<b>65</b>
1. Ki sa ki derive a? .....	66
2. Entèpretasyon jeyometrik derive a .....	78
3. Derive a kòm yon fonksyon .....	100
4. Kalkil Derive yo .....	123
5. Notasyon Leibniz .....	143
6. Dezyèm Derive ak pi wo .....	151
7. Fonksyon trigonometrik: sinis ak kosinis .....	173
8. Devwa 1 Pati A .....	187
9. Devwa 1 Pati B .....	200
<b>Inite 2: Derivasyon</b>	<b>211</b>
1. Apwoksimasyon Lineyè .....	212
2. Règ Pwodwi .....	225
3. Règ Kosyan .....	236
4. Règ Chèn .....	249
5. Diferansyasyon enplisit .....	265
6. Fonksyon envès .....	277
7. Fonksyon eksponansyèl .....	300
8. Logaritm .....	311
9. Devwa 2 Pati A .....	328
10. Devwa 2 Pati B .....	338
<b>Inite 3: Apwoksimasyon</b>	<b>345</b>
1. Apwoksimasyon lineyè ak Erè nan Mezi .....	346
2. Apwoksimasyon kwadratik .....	368
3. Metòd Newton .....	383
4. Devwa 3 Pati A .....	397
5. Devwa 3 Pati B .....	407
<b>Inite 4: Aplikasyon</b>	<b>425</b>

1. Pwen kritik: Tès Premye ak Dezyèm Derive .....	426
2. Sa an antye: limit ak asentotik .....	452
3. Optimizasyon: pwoblèm maksimòm/minimòm .....	483
4. Rapò Relatif .....	506
5. Devwa 4 Pati A .....	520
6. Devwa 4 Pati B .....	535

# Inite 0: Limit

---

# Entwodiksyon sou limit yo

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Introdiksyon sou Limit

### Objektif

Nan fen sekans sa a, aprè kèk ti antrènman, ou ta sipoze kapab:

- Itilize yon kalkilatris pou detèmine limit a-dwat ak limit a-goch yo.
- Idantifye limit a-dwat ak limit a-goch alèd de graf yo.
- Detèmine si yon limit egziste alèd de valè limit a-dwat ak limit a-goch yo.
- Konprann ke limit lan pa depann de valè yon fonksyon nan pwen ki enterese nou an.

### 3. Pandan n ap pwoche pi pre

 Videyo



$x \mapsto f(x) = \frac{\sqrt{3-5x+x^2+x^3}}{x-1}$   
 As  $x$  moves closer to 1 from the left,  
 does  $f(x)$  move close to something?

$x$	$f(x)$
0	$-\sqrt{3} \approx -1.73$
.5	

$x \rightarrow 1$   
 $x \neq 1$   
 $x$  near 1



**Pwoblèm 1: Yon lòt bò**

Detèmine ki sa k ap pase  $f(x) = \frac{\sqrt{3-5x+x^2+x^3}}{x-1}$  pandan  $x$  ap  
 pwoche 1 sou bò dwat. An n pran valè  $x$  ki pi gwo pase 1, men k ap toujou vin  
 pi prè 1. Pa egzanp, ou ta ka eseye  $x = 1.1, 1.01, 1.001$ , elatriye.

Ki sa k ap pase  $f(x)$  pandan  $x$  ap pwoche 1 sou bò dwat?

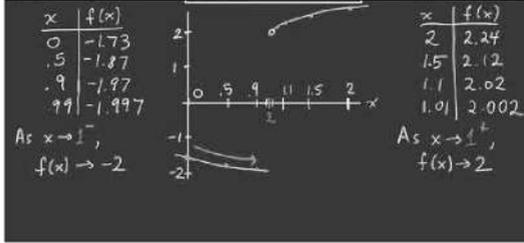
- A  $f(x)$  Ap rapwoche 1 de plizanpli de yon nonb patikilye
- B  $f(x)$  ap vin de plizanpli gwo nan sans pozitif la san limit
- C  $f(x)$  ap vin de plizanpli gwo nan sans negatif la san limit
- D Pyès nan repons anlè yo

Ki valè  $f(x)$  la ap vin pi prè 1? antre nonb lan anba a.

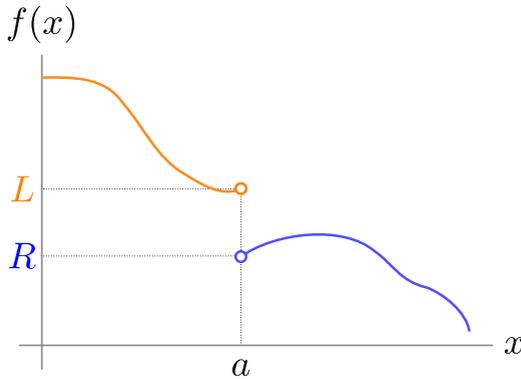


### 4. Limit sou yon bò

Videyo



### 5. Definisyon limit a-dwat ak limit a-goch



Sipoze ke  $f(x)$  vin trè pwòch  $R$  pou valè  $x$  ki vin vrèman pwòch ak (men ki pa egal ak)  $a$  a-dwat. Lè sa a nou di  $R$  se **limit a-dwat** fonksyon  $f(x)$  la pandan  $x$  ap pwoche  $a$  sou bò dwat.

Nou ekri

$$f(x) \rightarrow R \text{ pandan } x \rightarrow a^+$$

oswa

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = R.$$

Si  $f(x)$  vin vrèman pwòch  $L$  pou valè  $x$  ki vin vrèman pwòch ak (men ki pa egal a)  $a$  sou bò goch, nou di ke  $L$  se **limit a-goch** fonksyon  $f(x)$  la pandan  $x$  ap pwoche  $a$  sou bò goch.

Nou ekri

$$f(x) \rightarrow L \text{ pandan } x \rightarrow a^-$$

oswa

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

## 6. Kèk limit adisyonèl

### Pwoblèm 2: Yon lòt fonksyon

An n eksplòre limit a-dwat ak limit bò gòch pou kèk fonksyon adisyonèl. Nan pwoblèm nan, nou pral egzamine fonksyon

$$g(x) = \frac{x}{\tan(2x)} \quad \text{as } x \rightarrow 0^\pm.$$

Men yon tablo ki gen valè  $g(x)$  pandan  $x$  ap pwoche sou bò dwat:

$x$	$g(x)$
1.0	-0.458
0.5	0.321
0.1	0.493
0.05	0.498
0.01	0.4999

Done sa yo sijere ke  $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = 0.5$ .

Itilize bouton kalkilatris ki anba a pou jwenn limit **a-goch**. **Kalkilatris sa a an radyan!**

- Pwiske  $x \rightarrow 0^-$ ,  $g(x)$  ap rapwoche ofiramezi yon nonb patikilye  $L$  ( $g(x) \rightarrow L$ )
- Pwiske  $x \rightarrow 0^-$ ,  $g(x)$  ap vin pi gwo ofiramezi san limit ( $g(x) \rightarrow +\infty$ )
- Pwiske  $x \rightarrow 0^-$ ,  $g(x)$  ap vin de plizanpli gwo nan sans negatif san limit ( $g(x) \rightarrow -\infty$ )
- Pwiske  $x \rightarrow 0^-$ ,  $g(x)$  p ap pwoche ni yon nonb fini  $L$ , ni  $+\infty$ , ni  $-\infty$

Ki valè  $g(x)$  ap vin pi prè pandan  $x \rightarrow 0^-$ ?

(Si l ap pwoche yon nonb fini, antre nonb sa a)



**Pwoblèm 3: Yon lòt fonksyon ankò**

Nan pwoblèm sa a, nou pral egzamine fonksyon,

$$h(x) = \frac{|x| + \sin x}{x^2}$$

la pandan  $x \rightarrow 0^\pm$ .

Men yon tablo valè  $h(x)$  pou valè  $x$  ki tou prè zewo a-goch:

$x$	$h(x)$
-1.0	0.159
-0.5	0.082
-0.1	0.017
-0.01	0.002
-0.001	0.0002

Done sa yo sijere ke  $\lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0$ .

Itilize yon kalkilatris pou w kapab jwenn limit a-goch la. **Asire w ke kalkilatris ou a an radyan!**

- A Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $h(x)$  ap vin de plizanpli pwòch yon nonb patikilye  $L$  ( $h(x) \rightarrow L$ )
- B Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $h(x)$  ap vin de plizanpli gwo san limit ( $h(x) \rightarrow +\infty$ )
- C Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $h(x)$  ap vin de plizanpli gwo nan sans negatif la san limit ( $h(x) \rightarrow -\infty$ )
- D Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $h(x)$  p ap pwoche ni yon nonb fini  $L$ , ni  $+\infty$ , ni  $-\infty$

Ki valè  $h(x)$  ap pwoche pandan  $x \rightarrow 0^+$ ?

(Si l ap pwoche yon nonb fini, antre nonb sa a.)



### Pwoblèm 4: Yon dènje fonksyon

Nan pwoblèm sa a, nou pral egzamine fonksyon  $j(x) = \sin(13/x)$ , pandan  $x$  ap pwoche 0 a-dwat. Itilize yon kalkilatris pou detèmine ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0^+} j(x)$  ta

ka ye. **Asire w ke kalkilatris ou a an radyan!**

- A Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $j(x)$  ap rapwoche de plizanpli yon nonb patikilye  $L$  ( $j(x) \rightarrow L$ )
- B Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $j(x)$  ap vin de plizanpli gwo san limit ( $j(x) \rightarrow +\infty$ )
- C Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $j(x)$  ap vin de plizanpli gwo nan sans negatif la san limit ( $j(x) \rightarrow -\infty$ )
- D Pwiske  $x \rightarrow 0^+$ ,  $j(x)$  p ap pwoche ni yon nonb fini  $L$ , ni  $+\infty$ , ni  $-\infty$

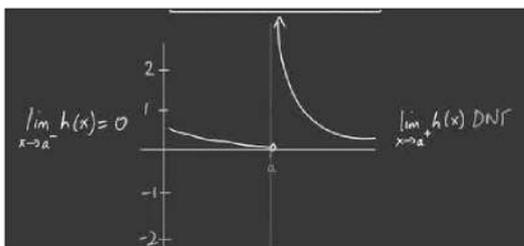
Ki valè  $j(x)$  pral vin pi prè pandan  $x \rightarrow 0^+$ ?

(Si l ap pwoche yon nonb fini, antre nonb sa a.)



## 7. Konpòtman limit posib

### Videyo



Genyen plizyè konpòtman limit posib.

- limit a-dwat ak limit a-goch tou de ka egziste epi yo egal.
- limit a-dwat ak limit a-goch tou de ka egziste, epi yo pa koresponn youn ak lòt.
- Yon limit a-dwat e/oubyen yon limit a-goch ka pa egziste akòz li file monte nan  $\pm\infty$ . (Egzanp: Konsidere fonksyon  $1/x$  tou pre  $x = 0$ .) Nan ka sa a, se

swa nou di limit la file monte nan lenfni. Nou di tou limit lan pa egziste paske  $\infty$  pa yon nonb reyèl!

- Yon limit a-dwat e/oubyen yon limit a-goch ka pa egziste paske l ap fè monte desann ant plizyè valè epi li pa janm fikse sou youn. Nan ka sa a nou di limit lan pa egziste.

## 8. Kesyon rapid sou limit yo

### Pwoblèm 5: A-goch anfas a-dwat

Sipoze ke  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  egziste epi li egal ak  $R$ . Èske  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ta ka egziste?

- (A) Wi     (B) Non

### Pwoblèm 6: Kote ki matche yo

Sipoze ke  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = R$  epi  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$ . Èske  $R = L$ ?

- (A) Wi     (B) Non

### Pwoblèm 7: Limit anfas fonksyon

Sipoze ke  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  se kèk nonb  $R$ . Èske  $f(a) = R$ ?

- (A) Wi     (B) Non

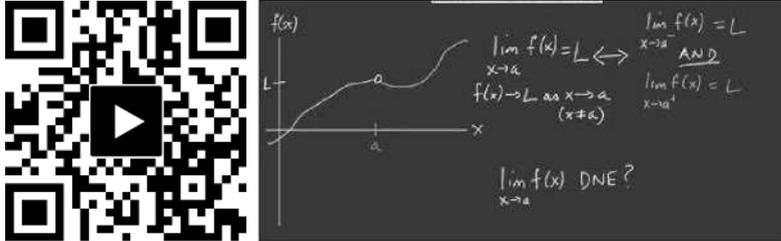
### Pwoblèm 8: Fonksyon anfas limit

Sipoze ke  $f(a) = K$ . Èske  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = K$ ?

- (A) Wi     (B) Non

## 9. Limit global

 Videyo



## 10. Definisyon limit

**Limit la an bon kreyòl**

Si yon fonksyon  $f(x)$  ap pwoche yon valè  $L$  pandan  $x$  ap pwoche  $a$  soti nan tou de bò  $a$ -dwat ak  $a$ -goch, alò **limit**  $f(x)$  la egziste epi li egal ak  $L$ .

**Limit la an senbòl**

Si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

alò

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Altènativman,

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{pandan} \quad x \rightarrow a.$$

Raple w ke  $x$  ap pwoche  $a$  men, li pa egal  $a$ .

### Definisyon fòmèl limit la

Fòmèlman, afimasyon  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  defini kòm:

Pou tout  $\varepsilon > 0$ , genyen yon  $\delta > 0$  ki egziste tèlke si  $0 < |x - a| < \delta$ , alò  $|f(x) - L| < \varepsilon$ .

Jan tradisyon an mande sa, nou itilize lèt grèk  $\epsilon$  ak  $\delta$ .

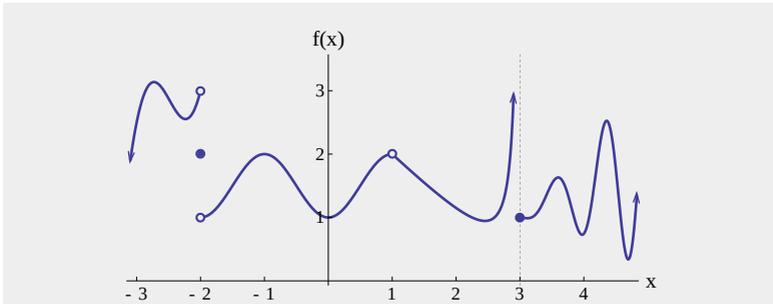
Men ki jan yon moun ka konprann afimasyon sa a. Distans ki genyen ant de nonb  $y$  ak  $z$  kalkile alèd  $|y - z|$ . Se konsa, dènye pati definisyon an di ke distans ki soti nan  $f(x)$  a  $L$  pi piti pase  $\epsilon$ ; Nou dwe konsidere ke  $\epsilon$  reprezante yon ti distans.

Ti distans trè pwòch sa a ap rive si  $0 < |x - a| < \delta$ ; sa vle di, si  $x$  a yon sèten distans  $\delta$  pa rapò ak  $a$ , men, li pa nesèsèman si distans sa se 0 (Nou p ap menm okipe  $x = a$  li menm).

Paragraf yo "pou tout" ak "li egziste" gen rapò ak rediksyon distans sa yo. Nou vle  $f(x)$  la pwoche abitrèman  $L$ , ki donk afimasyon sa dwe satisfè kèlkeswa fason  $\epsilon$  ta vin piti. Kèlkeswa chwa  $\epsilon$  lan, nou kapab satisfè kondisyon  $|f(x) - L| < \epsilon$  ofiramezi  $x$  ap pwoche sifizamman de  $a$ ; pwoksimite ki nesèsè a mezire ak  $\delta$ .

## 11. Limit a pati graf yo

### Pwoblèm 9: Limit estimasyon



Detèmine sa ki annapre yo.

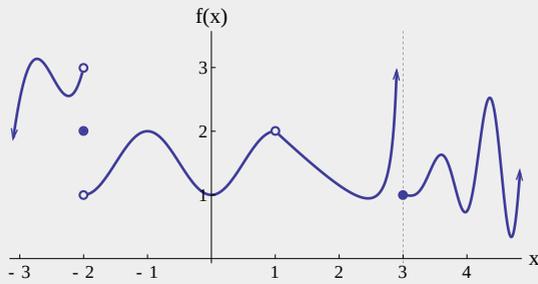
$$\lim_{x \rightarrow (-2)^-} f(x) = \text{[input box with calculator icon]}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)^+} f(x) = \text{[input box with calculator icon]}$$

$$\lim_{x \rightarrow (-2)} f(x) = \text{[input box with calculator icon]}$$

$$f(-2) = \text{[input box with calculator icon]}$$

### Problèm 10: Limit estimasyon 2



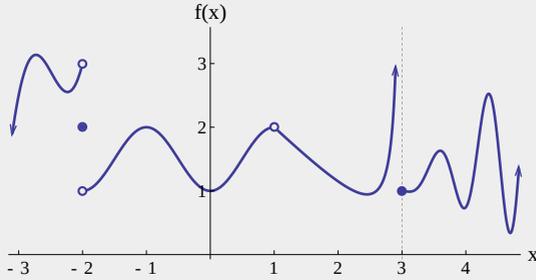
Detèmine sa ki annapre yo.

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

$$f(1) =$$

**Pwoblèm 11: Limit estimasyon 3**

Detèmine sa ki annapre yo.

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 3} f(x) =$$

$$f(3) =$$

**12. Pwoblèm revizyon****Pwoblèm 12: Fonksyon anfas limit 2**

Vrè ou fo: Si nou konnen ke  $f(a)$  egziste, sa vle di ke  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  egziste.

- (A) Vrè  (B) Fo

**Pwoblèm 13: Limit doub-bò**

Sipoze ke  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = 3$ . Kilès nan sa ki annapre yo ki ta dwe vrè?

(A)  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 3$   (B)  $f(a) = 3$   (C) Tou de ta dwe vrè

(D) Youn nan yo pa nesèsèman vrè

### Problèm 14: Fonksyon etaj

Fonksyon etaj  $\lfloor x \rfloor$  la defini kòm pi gwo nonb antye ki pi piti pase oswa egal ak  $x$ .

(Kalkile valè ki annapre yo.)

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \lfloor x \rfloor =$$

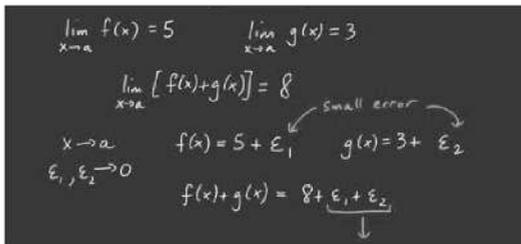
$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \lfloor x \rfloor =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \lfloor x \rfloor =$$

$$\lfloor 2 \rfloor =$$

## 13. Règ kalkil yo

 Videyo



## 14. Limit Laws Règ kalkil yo

Sipoz ke  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ .

Lè sa a, nou jwenn lwa pou w kalkile limit sa yo:

Règ pou w kalkile limit pou adisyon:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$

Règ pou w kalkile limit pou soustraksyon:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$

Règ pou w kalkile limit pou multiplikasyon:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ .

Nou gen tou yon pati nan Lwa pou w kalkile Limit pou Divizyon:

Lwa pou w kalkile limit pou divizyon, Pati 1:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}.$$

Si  $M \neq 0$ , lè sa

Nou pral diskite sou sa k ap pase lè  $M=0$  nan yon seksyon pita!

### Jistifikasyon Lwa pou w kalkile Limit pou Miltiplikasyon an

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  epi  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , lè sa nou ka ekri

$$\begin{aligned} f(x) &= L + \varepsilon_1 \\ g(x) &= M + \varepsilon_2, \end{aligned}$$

kote  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \rightarrow 0$  pandan  $x \rightarrow a$ . Lè sa

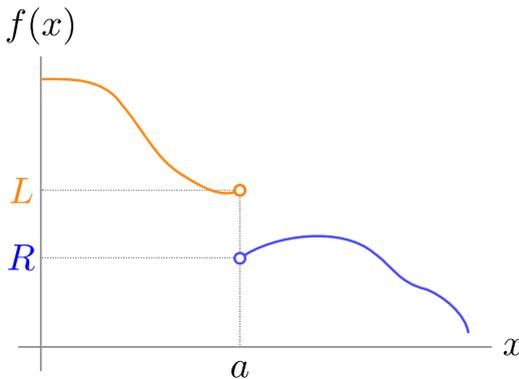
$$f(x)g(x) = LM + \varepsilon_1M + \varepsilon_2L + \varepsilon_1\varepsilon_2.$$

Pwiske  $L$  ak  $M$  yo se konstant epi  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$  ap apwoche zewo, tout twa tèm erè sa yo  $\varepsilon_1M, \varepsilon_2L, \varepsilon_1\varepsilon_2$  pral apwoche zewo pandan  $x$  ap pwoche  $a$ . Pakonsekan

$$\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M.$$

## 15. Rezime

Definisyon limit a-dwat ak limit a-gocho



Sipoze ke  $f(x)$  vin trè pwòch  $R$  pou valè  $x$  ki vin vrèman pwòch ak (men, ki pa egal ak)  $a$  sou bò dwat la. Lè sa a, nou di  $R$  se **limit a-dwat** fonksyon  $f(x)$  pandan  $x$  ap pwoche  $a$  soti sou bò dwat.

Nou ekri

$$f(x) \rightarrow R \text{ pandan } x \rightarrow a^+$$

oswa

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = R.$$

Si  $f(x)$  vin trè pwòch  $L$  pou valè  $x$  ki vin vrèman pwòch ak (men, ki pa egal ak)  $a$  sou bò goch, nou di ke  $L$  se **limit a-goch** fonksyon  $f(x)$  pandan  $x$  ap pwoche  $a$  soti sou bò goch.

Nou ekri

$$f(x) \rightarrow L \text{ pandan } x \rightarrow a^-$$

oswa

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L.$$

### Konpòtman limit posib

Genyen anpil konpòtman limit posib.

- Limit a-dwat ak limit a-goch tou de ka egziste epi yo egal.
- Limit a-dwat ak limit a-goch tou de ka egziste, men yo ka pa egal.
- Yon limit a-dwat e/oswa yon limit a-goch ta ka pa egziste akòz l ap file monte jis nan  $\pm\infty$ . (Egzanp: konsidere fonksyon  $1/x$  tou pre  $x = 0$ .) Nan ka sa, swa nou di ke limit la file monte nan lenfini. Nou di tou ke limit la pa egziste paske  $\infty$  pa yon nonb reyèl!
- Yon limit a-dwat e/oswa yon limit a-goch ta ka pa egziste paske l ap fè monte desann ant plizyè valè epi li pa janm fikse sou youn. Nan ka sa nou di limit la pa egziste.

### Definisyon limit lan

#### Limit lan an bon kreyòl

Si yon fonksyon  $f(x)$  ap pwoche yon valè  $L$  pandan  $x$  ap pwoche  $a$  soti nan tou de bò a-dwat ak a-goch, alò **limit**  $f(x)$  la egziste epi li egal ak  $L$ .

#### Limit la an senbòl

Si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = L$$

alò

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L.$$

Altènativman,

$$f(x) \rightarrow L \quad \text{as} \quad x \rightarrow a.$$

Raple w ke  $x$  ap pwoche  $a$  men li pa egal ak  $a$ .

**Règ pou w kalkile limit yo:**

Sipoze ke  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$ ,  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ .

Aprè sa, nou jwenn lwa pou w kalkile limit sa yo:

Règ pou w kalkile limit pou Adisyon:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) + g(x)] = L + M$

Règ pou w kalkile limit pou soustraksyon:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) - g(x)] = L - M$

Règ pou w kalkile limit pou multiplikasyon:  $\lim_{x \rightarrow a} [f(x) \cdot g(x)] = L \cdot M$ .

Nou gen tou yon pati nan lwa pou w kalkile limit pou Divizyon:

Lwa pou w kalkile limit pou Divizyon, Pati 1:  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ .  
Si  $M \neq 0$ , alò

Nou pral diskite sou sa k ap pase lè  $M = 0$  nan yon seksyon pita!

## Solisyon yo

### Pwoblèm 1: Yon lòt bò

Nou kapab gade valè tankou  $f(2)$ ,  $f(1.5)$ ,  $f(1.1)$ ,  $f(1.01)$ , elatriye. Lè n itilize yon kalkilatris nou ka jwenn sa a

$$f(2) \approx 2.24$$

$$f(1.5) \approx 2.12$$

$$f(1.1) \approx 2.02$$

$$f(1.01) \approx 2.003.$$

Ta sanble valè  $f(x)$  la ap pwoche 2 pandan  $x$  ap pwoche 1 sou bò dwat.

A

2

### Pwoblèm 2: Yon lòt fonksyon

Lè n ranpli yon tablo ak valè pandan  $x$  ap vin pi prè 0 soti nan bò gòch la, nou jwenn sa n wè anba a la:

$x$	$g(x)$
-1.0	-0.458
-0.5	0.321
-0.1	0.493
-0.05	0.498
-0.01	0.4999

Tablo sa a sijere ke  $g(x) \rightarrow 0.5$  pandan  $x \rightarrow 0^-$ .

**Pwoblèm 3: Yon lòt fonksyon ankò**

Men yon tablo plizyè valè ke nou kapab pran an konsiderasyon.

$x$	$h(x)$
1.0	1.84
0.5	3.92
0.1	19.98
0.01	200.0
0.001	2000.0

Tablo valè sa yo sijere ke  $h(x)$  ap pwoche vè lenfini pandan  $x$  ap pwoche 0 a-dwat; i.e.,  $h(x) \rightarrow +\infty$  pandan  $x \rightarrow 0^+$ . Pwiske lenfini an pa yon nonb, limit a-dwat la pa egziste.

**B**

*DNE*

**Pwoblèm 4: Yon dènye fonksyon**

Nou kapab teste kèk valè lòske  $x$  ap pwoche zewo, men toujou sou bò dwat la:

$x$	$j(x)$
1.0	0.42
0.5	0.76
0.1	-0.93
0.01	-0.58
0.001	0.09
0.0001	0.78

Valè yo pa vin patikilyèman gwo, men yo sote yon kote ale yon lòt kote epi yo pa fikse sou yon sèl valè. Limit la pa egziste.

Remake byen li posib pou chwazi yon seri pwen echantiyon ki ka pwodui done ki ka twonpe n! Pa egzanp,  $j(0.9)$ ,  $j(0.049)$ , ak  $j(0.0049)$  yo tout trè prè 1.

*DNE*

**Pwoblèm 5: A-goch anfas a-dwat**

Non. Nou te travay sou limit a-dwat ak limit a-goch fonksyon an

$$h(x) = \frac{|x| + \sin x}{x^2}.$$

Limit a-goch lan se 0, men, limit a-dwat la pa egziste.

Ⓐ Non

**Pwoblèm 6: Kote ki matche yo**

Non. Premye egzanp  $f(x) = \frac{\sqrt{3-5x+x^2+x^3}}{x-1}$  nou an te gen diferan limit pandan  $x$  ap pwoche 1 soti nan chak bò.

Ⓐ Non

**Pwoblèm 7: Limit anfas fonksyon**

Non! Gen anpil egzanp kote limit pandan  $x \rightarrow a^+$  egziste, men, valè aktyèl fonksyon an ta ka diferan, oswa ta ka pa egziste nan tout!

Ⓐ Non

**Pwoblèm 8: Fonksyon anfas limit**

Non; limit lan pa okipe sa k ap pase nan  $x = a$ , sèlman sa k ap pase lè  $x$  la tou pre  $a$ .

Ⓐ Non

**Pwoblèm 9: Limit estimasyon**

Limit global la pa egziste paske limit a-goch ak limit a-dwat la pa koresponn. Sepandan,  $f(-2)$  egal ak 2, paske pwen  $(-2, 2)$  la sou graf la.

3, 1, *DNE*, 2

**Pwoblèm 10: Limit estimasyon 2**

Limit a-dwat ak limit a-goch tou de bay 2, ki donk limit global la egziste epi li egal ak 2 tou. Sepandan,  $f(1)$  pa egziste, pwiske pa gen pwen avèk kowòdone  $x$  1 sou graf la.

2, 2, 2, *DNE*

**Pwoblèm 11: Limit estimasyon 3**

Pandan  $x$  ap pwoche 3 soti a-goch, fonksyon an ap file monte nan lenfini. Ebyen, limit a-goch la ak limit global la pa egziste. Sepandan, limit a-dwat la egal ak 1, menm jan ak  $f(3)$ .

$DNE, 1, DNE, 1$

**Pwoblèm 12: Fonksyon anfas limit 2**

Fo. Limit pandan  $x \rightarrow a$  entèrese sèlman ak sa k ap pase lè  $x$  tou prè  $a$ , men, se pa sa ki egal ak  $a$ . Valè  $f(a)$  ak  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  ka pa gen rapò; nou te wè yon egzanzp kote youn egziste san lòt.

ⓑ Fo

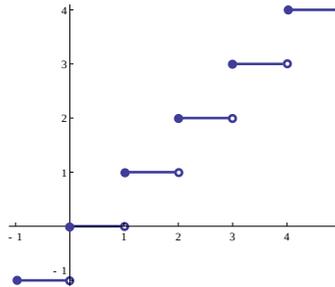
**Pwoblèm 13: Limit doub-bò**

Si limit a-dwat ak limit a-goch tou de bay 3, lè sa limit la egziste e li egal a 3, ak definisyon an. Sepandan, valè  $f(a)$  a pa dwe egal 3.

Ⓐ

**Pwoblèm 14: Fonksyon etaj**

Men graf pi gwo fonksyon nonb antye relatif la. Nou pral sèvi ak fonksyon sa a ankò, ki donk ou ta dwe asire w ke ou abitye avèk li!



Pou tout valè  $x$  ki pwòch 2 a-dwat ( $x = 2.1, 2.01$ , elatriye.),  $g(x) = 2$ . Se kon sa, limit a-dwat la se 2. Pou tout valè  $x$  pwòch 2 men, a-goch ( $x = 1.9, 1.99$ , elatriye.),  $g(x) = 1$ . Se kon sa, limit a-goch la se 1. Pwiske limit a-dwat ak limit a-goch yo pa egal, limit global la pa egziste. Finalman,  $g(2) = 2$ .

1, 2,  $DNE, 2$

---

# Kontinite

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Kòman nou kapab kalkile limit yo?

Objektif

Nan fen sekans sa a, aprè kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Idantifye pwen **diskontinite yo**.
- Rekonèt fonksyon **kontini ak fonksyon diskontini** grafikman epi a pati de fòmil yo.
- Itilize **lwa pou kalkile limit yo** pou detèmine limit sòm ak pwodui fonksyon ki kontini yo.
- Aplike **Teyorèm Valè Entèmedyè a (TVE)**.

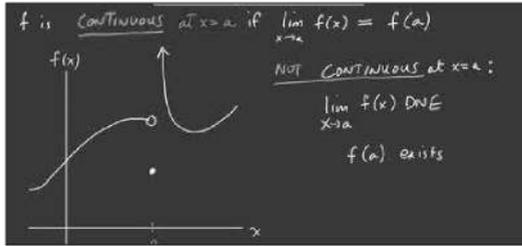
### 3. Kontinite

#### Pwoblèm 15: Limit anfas fonksyon

Sipoze ke  $f(a) = 3$ . Ki sa nou kapab di sou  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ?

- (A) Li dwe egal 3
- (B) Li pa ka egal 3
- (C) Li ta ka egal 3, oswa li ta ka pa

#### Videyo



Nou di ke yon fonksyon  $f$  **kontini nan yon pwen**  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

An patikilye, si  $f(a)$  oswa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  pa egziste, ebyen  $f$  diskontini nan  $a$ .

Nou di ke yon fonksyon  $f$  **kontini a-dwat nan yon pwen**  $x = a$  si

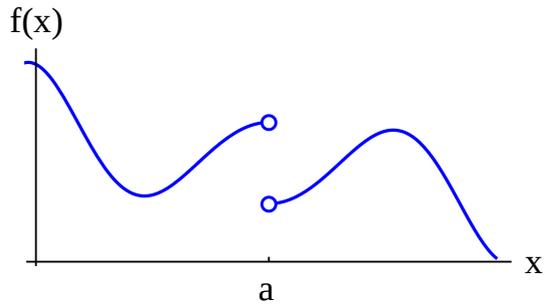
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

Nou di ke yon fonksyon  $f$  **kontini a-goch nan yon pwen**  $x = a$  si

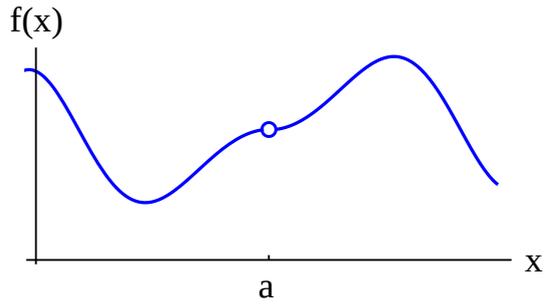
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

Kèk fwa li vrèman itil pou n klase kèk tip de diskontinite.

Si limit a-goch  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ak limit a-dwat  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  tou de egziste nan yon pwen  $x = a$ , men yo pa egal, lè sa nou di  $f$  gen yon **diskontinite de so** nan  $x = a$ .



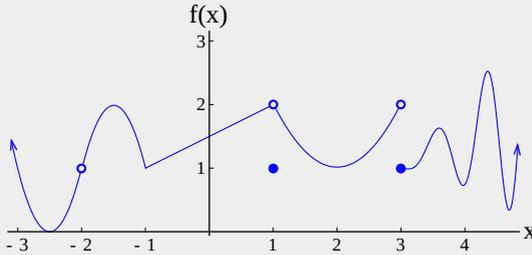
Si limit global la  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  egziste (i.e., limit a-goch ak limit a-dwat yo egal), men limit global la pa egal ak valè fonksyon  $f(a)$ , lè sa nou di  $f$  gen yon **diskontinite removab (detachab)** nan  $x = a$ .



## 4. Kesyon sou kontinite

### Pwoblèm 16: Kesyon sou kontinite

Sa a se graf yon fonksyon  $f$ .



Pou chak valè  $a$ , detèmine si  $f$  kontini, kontini a-dwat, oswa kontini a-goch nan  $x = a$ .

Nan  $x = -2$

- (A)  $f$  kontini
- (B)  $f$  kontini a-dwat men li pa kontini a-goch
- (C)  $f$  kontini a-goch men li pa kontini a-dwat
- (D)  $f$  pa ni kontini a-dwat ni kontini a-goch

Nan  $x = -1$

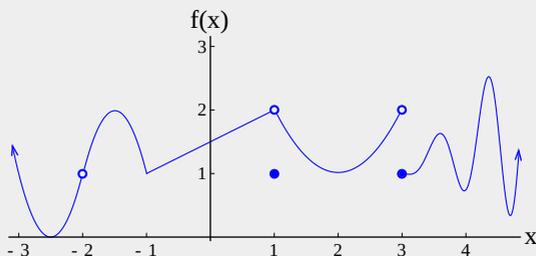
- (A)  $f$  kontini
- (B)  $f$  kontini a-dwat men li pa kontini a-goch
- (C)  $f$  kontini a-goch men li pa kontini a-dwat
- (D)  $f$  pa ni kontini a-dwat ni kontini a-goch

Nan  $x = 1$

- (A)  $f$  kontini
- (B)  $f$  kontini a-dwat men li pa kontini a-goch
- (C)  $f$  kontini a-goch men li pa kontini a-dwat
- (D)  $f$  pa ni kontini a-dwat ni kontini a-goch

Nan  $x = 3$

- (A)  $f$  kontini
- (B)  $f$  kontini a-dwat men li pa kontini a-goch
- (C)  $f$  kontini a-goch men li pa kontini a-dwat
- (D)  $f$  pa ni kontini a-dwat ni kontini a-goch

**Pwoblèm 17: Tip de diskontinite**

Liste tout valè  $x$  kote ki gen yon diskontinite removab (detachab).



Liste tout valè  $x$  kote ki gen yon diskontinite de so.

**5. Plis kesyon sou kontinite an****Pwoblèm 18: Fonksyon konstant**

Konsidere fonksyon konstant  $f(x) = 3$ . Nan ki valè  $x$  fonksyon sa a kontini? Li posib ke w ta swete reprezante fonksyon an sou fòm grafik.

A) Tout pwen  $x$     B) Tout pwen eksepte  $x = 0$

C) Tout pwen eksepte  $x = 17$     D) Okenn kote

E) Pyès nan repons ki anlè yo

**Pwoblèm 19: Fonksyon rasyonèl 1**

(Remake ke yon fonksyon rasyonèl se divizyon de fonksyon polinom.)

Konsidere fonksyon  $g(x) = \frac{1}{x-17}$ . Nan ki valè  $x$  fonksyon sa a kontini? Bon, li posib ou ta swete reprezante fonksyon an sou fòm grafik.

- A) Tout pwen eksepte  $x$     B) Tout pwen eksepte  $x = 0$
- C) Tout pwen eksepte  $x = 17$     D) Okenn kote
- E) Pyès nan repons ki anlè yo

**Pwoblèm 20: Fonksyon rasyonèl 2**

Konsidere fonksyon  $h(x) = \frac{1}{x^2+1}$ . Nan ki valè  $x$  fonksyon sa a kontini? Bon, li posib ou ta swete reprezante fonksyon an sou fòm grafik.

- A) Tout pwen  $x$     B) Tout pwen eksepte  $x = 0$
- C) Tout pwen eksepte  $x = 17$     D) Okenn kote
- E) Pyès nan repons ki anlè yo

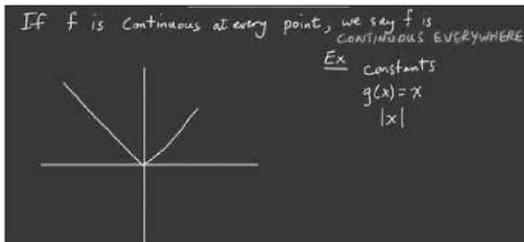
**Pwoblèm 21: Valè Absoli**

Konsidere fonksyon  $j(x) = |x|$ . Nan ki valè  $x$  fonksyon sa a kontini? Bon, li posib ou ta swete reprezante fonksyon an sou fòm grafik.

- A) Tout pwen  $x$     B) Tout pwen eksepte  $x = 0$
- C) Tout pwen eksepte  $x = 17$     D) Okenn kote    E) Pyès nan repons anlè yo

## 6. Kontinite global

 Videyo



Yon fonksyon  $f(x)$  **kontini** si pou chak pwen  $c$  nan domèn  $f(x)$  la, fonksyon  $f$  la kontini nan pwen  $x = c$ .

## 7. Kontinite swit

**Pwoblèm 22: Fonksyon sinis**

Vrè ou Fo:  $\lim_{x \rightarrow \pi/5} \sin(x) = \sin(\pi/5)$ .

(A) Vrè  (B) Fo

**Pwoblèm 23: Fonksyon etaj**

Vrè ou Fo:  $\lim_{x \rightarrow 3} \lfloor x \rfloor = \lfloor 3 \rfloor$ .

(Raple nou ke  $\lfloor x \rfloor$  deziyen pi gran antye ki enferyè oswa egal ak  $x$ .)

(A) Vrè  (B) Fo

**Pwoblèm 24: Fonksyon respwòk**

Vrè ou Fo: Fonksyon  $f(x) = 1/x$  kontini pou tout reyèl  $x$ .

(A) Vrè  (B) Fo

## 8. Lwa pou w kalkile limit yo ak kontinite

### Pwoblèm 25: Sòm fonksyon kontini yo

Poze  $f(x) = x^2 + x$ . Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 3} f(x)$  egal? (Antre LPE (DNE) si limit la pa egziste.)



Èske  $f$  kontini nan  $x = 3$ ?

- (A) Wi  (B) Non

Èske  $f$  kontini nan  $x = 1776$ ?

- (A) Wi  (B) Non

Èske  $f$  kontini pou tout valè  $x$ ?

- (A) Wi  (B) Non

### Pwoblèm 26: Kosyan fonksyon kontini yo

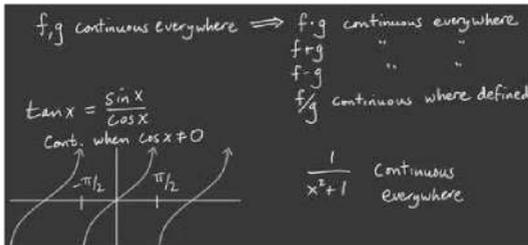
Poze  $g(x) = \frac{x}{\cos x}$ . Èske  $g$  kontini nan  $x = 0$ ?

- (A) Wi  (B) Non

Èske  $g$  kontini pou tout valè  $x$ ?

- (A) Wi  (B) Non

### Videyo



## 9. Revizyon sou kontinite

### Pwoblèm 27: Idantifye fonksyon kontini yo

Kiyès nan tout fonksyon kontini nou pral wè la yo ki kontini nan tout  $x$ ?

(Seleksyone otan d opsyon ki posib.)

A  $f(x) = x^{30} - 2x$     B  $g(x) = (x^2 + 1) \sin x$     C  $h(x) = \frac{3}{x} - 2x^2$

D  $j(x) = 0$     E  $k(x) = \lfloor x \rfloor$

### Pwoblèm 28: Vrè ou Fo 1

Si  $p(x)$  se yon polinom, ebyen  $\lim_{x \rightarrow a} p(x) = p(a)$  pou tout valè  $a$ .

A Vrè    B Fo

### Pwoblèm 29: Vrè ou Fo 2

Si  $q(x) = 17x - 3 \sin x$ , ebyen  $\lim_{x \rightarrow a} q(x) = q(a)$  pou tout valè  $a$ .

A Vrè    B Fo

### Pwoblèm 30: Vrè ou Fo 3

Si  $r(x) = x^2 \lfloor x \rfloor + 3$ , ebyen  $\lim_{x \rightarrow a} r(x) = r(a)$  pou tout valè  $a$ .

A Vrè    B Fo

### Pwoblèm 31: Vrè ou Fo 4

Si  $f$  gen yon diskontinite nan  $x = 3$ , epi  $g$  genyen tou yon diskontinite nan  $x = 3$ , alò fonksyon  $h(x) = f(x) + g(x)$  la dwe genyen tou yon diskontinite nan  $x = 3$ .

A Vrè    B Fo

## 10. Katalòg fonksyon kontini yo

Note: nou pa t pwouve tout reyalite sa yo nou pral wè la, men ou lib pou w itilize yo.

Fonksyon sa yo ki pi ba a yo kontini nan *tout nonb reyèl*:

- tout polinom
- $\sqrt[3]{x}$
- $|x|$
- $\cos x$  ak  $\sin x$
- fonksyon eksponansyèl  $a^x$  avèk baz  $a > 0$

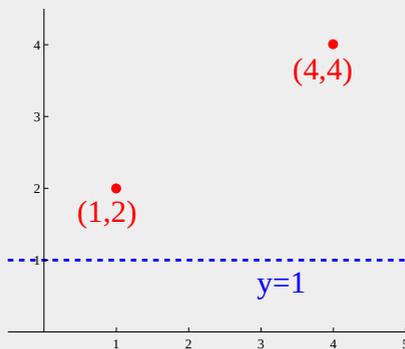
Fonksyon sa yo nou pral wè pi ba a yo kontini (oswa yo kontini a-dwat) *nan valè espesifye (endike) sa yo pou  $x$* :

- $\sqrt{x}$ , pou  $x \geq 0$
- $\tan x$ , nan tout  $x$  kote li defini
- fonksyon logaritm  $\log_a x$  avèk baz  $a > 0$ , pou  $x > 0$

## 11. Entwo TVE

### Pwoblèm 32: Èske li entèsekte?

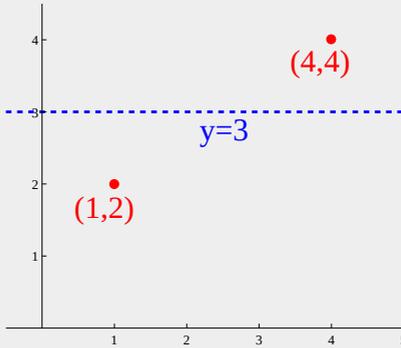
An n kòmanse ak yon ti kesyon. An n sipoze ke  $f(1) = 2$  epi  $f(4) = 4$ . Èske graf  $f$  la dwe entèsekte liy  $y = 1$ ?



- Ⓐ Wi   Ⓑ Non

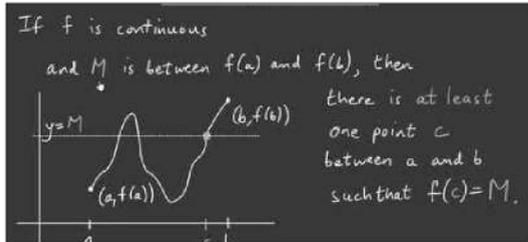
**Problèm 33: Èske li entèsekte? 2**

Sipoze ke  $f(1) = 2$  ak  $f(4) = 4$ . Èske graf  $f$  la dwe entèsekte liy  $y = 3$ ?



- Ⓐ Wi   Ⓑ Non

**Videyo**



**12. Teyorèm Valè Entèmedyè**

Si  $f$  se yon fonksyon ki kontini sou yon entèval fèmen  $[a, b]$ , epi  $M$  sitiye l ant valè  $f(a)$  ak  $f(b)$ , ebyen li egziste o mwen yon pwen  $c$  sitiye ant  $a$  epi  $b$  tèlke  $f(c) = M$ .

(Yon fonksyon  $f$  **kontini sou yon entèval fèmen**  $[a, b]$  si li kontini a-dwat nan  $a$ , epi kontini a-goch nan  $b$ , epi li kontini nan tout pwen ant  $a$  epi  $b$ .)

**Ki sa ki fè Teyorèm Valè Entèmedyè a yon rezilta pwofon?**

Teyorèm Valè Entèmedyè a pwofon paske li pran enfòmasyon ki natirèlman lokal epi li pèmèt ou konkli yon rezilta global. Kontinite nan yon pwen se yon enfòmasyon lokal, paske li sèlman bezwen gen konesans sou konpòtman fonksyon an nan vwazinaj pwen sa a. Men, nan yon sans oubyen nan yon lòt,

si nou konnen reyalyite sa nan chak pwen sou yon entèval lè sa a, Teyorèm Valè Entèmedyè a ap di nou yon bagay sou konpòtman global, oswa jeneral fonksyon an, sètadi fonksyon an dwe pran yon valè patikilye, oswa graf li dwe kwaze yon sèten liy.

Sa a entimman lye ak pwopriyete sistèm nonb reyèl yo. Nou ta sipoze gen menm definisyon kontinite fonksyon si  $n$  t ap travay avèk li sèlman, an  $n$  di, nonm rasyonèl yo (nonm ki kapab ekri tankou fraksyon nonm antye), Teyorèm Valè Entèmedyè a pa pral fonksyone si te ka sa. se sèlman lè  $n$  pase nan nonb reyèl ke Teyorèm Valè Entèmedyè a verifye..

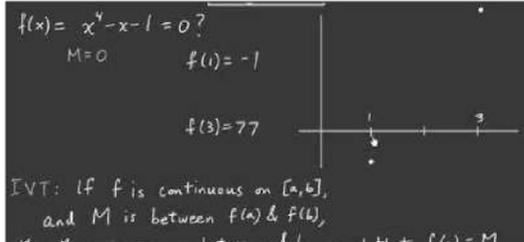
## 13. Prensip de baz

### Pwoblèm 34: TVE 0

1ye jen, Trixie te gen 2 lapen. 31 dawou, li te yon pwopriyètè erez de 4 lapen. Èske gen yon moman li te posede egzakteman 3.3 lapen?

- || (A) Wi (B) Non

### Videyo



### Pwoblèm 35: TVE 1

Poze  $f(x) = \sqrt{x} - \cos x$ . Daprè Teyorèm Valè Entèmedyè a, ta dwe gen yon  $c$  ant  $x = 0$  ak  $x = 9$  kote  $f(c) = 0$ ?

- || (A) Wi (B) Non

**Pwoblèm 36: TVE 2**

Poze  $g(x) = 4x^{-3} - x - \sin(\pi x)$ . Èske Teyorèm Valè Entèmedyè a enplike ke dwe gen yon  $c$  ant  $x = -1$  e  $x = 1$  kote  $g(c) = 0$ ?

- (A) Wi     (B) Non

**14. Rasin yo****Pwoblèm 37: TVE 3**

Yon polinom  $p(x)$  pran valè sa yo

$$\begin{aligned} p(-2) &= 6 \\ p(-1) &= -2 \\ p(0) &= -3 \\ p(1) &= 1 \\ p(2) &= 6. \end{aligned}$$

Nou konnen egalman ke  $p(x) > 6$  si  $x > 2$  oswa si  $x < -2$ . Ki afimasyon ki pi fò ou ka fè a pati done sa yo?

Kantite rasin polinòm lan se

- (A) egzakteman     (B) o mwen     (C) pi plis

**15. Rezime****Definisyon kontinite nan yon pwen**

Nou di ke yon fonksyon  $f$  **kontini nan yon pwen**  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a).$$

An patikilye, si  $f(a)$  oubyen  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  pa egziste, alò  $f$  diskontini nan  $a$ .

Nou di ke yon fonksyon  $f$  **kontini a-dwat nan yon pwen**  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a).$$

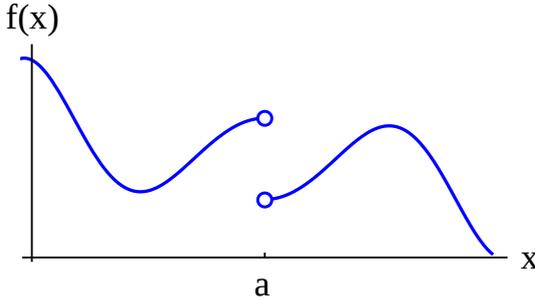
Nou di ke yon fonksyon  $f$  **kontini a-goch nan yon pwen**  $x = a$  si

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(a).$$

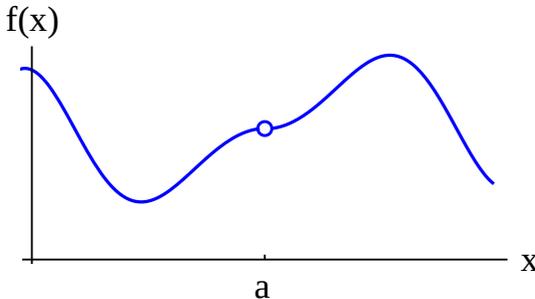
**Tip de diskontinite yo**

Pafwa li trè itil pou n klase kèk tip de diskontinite.

Si limit a-goch  $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$  ak limit a-dwat  $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$  tou de egziste nan yon pwen  $x = a$ , men yo pa egal, lè sa a nou di ke  $f$  gen yon **diskontinite ki sote** nan  $x = a$ .



Si limit global la  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$  egziste (i.e., limit a-goch ak limit a-dwat yo koresponn), men limit global la pa egal ak  $f(a)$ , lè sa nou di ke  $f$  gen yon **diskontinite remouvab ou byen detachab** nan  $x = a$ .



### Definisyon fonksyon kontini yo

Yon fonksyon  $f(x)$  **kontini** si pou chak pwen  $c$  nan domèn  $f(x)$  la, fonksyon  $f$  la kontini nan pwen  $x = c$ .

### Fonksyon kontini bazik yo

Note: Nou pa t pwouve tout reyaltite (enonse) sa yo, men ou ta sipoze lib pou w itilize yo.

Fonksyon nou pral wè anba la yo kontini nan *tout nonb reyèl*:

- tout polinom
- $\sqrt[3]{x}$
- $|x|$
- $\cos x$  ak  $\sin x$
- fonksyon eksponansyèl  $a^x$  avèk baz  $a > 0$

Fonksyon nou pral wè la yo kontini nan valè nou espesifye yo pou  $x$ :

- $\sqrt{x}$ , pou  $x > 0$
- $\tan x$ , nan tout  $x$  kote li defini
- fonksyon logaritm yo  $\log_a x$  avèk baz  $a > 0$ , pou  $x > 0$

### Lwa pou w kalkile limit yo ak kontinite

Si fonksyon  $f$  ak  $g$  kontini toupatou, lè sa:

- $f + g$  kontini toupatou.
- $f - g$  kontini toupatou.
- $f \cdot g$  kontini toupatou.
- $\frac{f}{g}$  kontini kote li defini an.

### Teyorèm Valè Entèmedyè

Si  $f$  se yon fonksyon ki kontini sou entèval  $[a, b]$ , epi  $M$  sitiye l (trouve l) ant valè  $f(a)$  ak  $f(b)$  yo, ebyen genyen o mwens yon pwen  $c$  ant  $a$  ak  $b$  tèlke  $f(c) = M$ .

(Yon fonksyon  $f$  **kontini sou yon entèval fèmen**  $[a, b]$  si li kontini a-dwat nan  $a$ , kontini a-goch nan  $b$ , epi li kontini nan tout pwen ant  $a$  ak  $b$ .)

## Solisyon yo

### Pwoblèm 15: Limit anfas fonksyon

Raple w ke limit  $f$  pandan  $x$  ap pwoche  $a$  konsène valè  $f(x)$  yo lè  $x$  tou pre  $a$  men li pa egal ak  $a$  li menm. Li ta kapab egal ak valè fonksyon an nan pwen sa a, men li pa obligatwa.

- Ⓒ Li ta ka egal 3, oswa li ta ka pa

### Pwoblèm 16: Kesyon sou kontinite

Sa a se yon egzèsis pou n detèmine limit a-dwat ak limit a-goch  $f$ , epi gade si yo egal ak valè fonksyon an nan pwen yo te ba nou an.

Nou wè  $f(-2)$  pa egziste, ebyen  $f$  pa ka kontini la a.

Nan  $x = -1$ , limit a-dwat ak limit a-goch  $f$  egziste epi li egal ak valè  $f(-1)$ , ki donk  $f$  kontini la a.

Nan  $x = 1$ , limit a-dwat ak limit a-goch  $f$  tou de egal ak 2, men  $f(1) = 1$ , ki donk  $f$  pa ni kontini a-dwat ni kontini a-goch.

Nan  $x = 3$ , limit a-dwat la egal 1, ki koresponn ak  $f(3)$ . Sepandan, limit a-goch la egal 2. Se pou sa nou sèlman gen kontinite a-dwat.

- Ⓓ  $f$  pa ni kontini a-dwat ni kontini a-goch  
 Ⓐ  $f$  kontini  
 Ⓓ  $f$  pa ni kontini a-dwat ni kontini a-goch  
 Ⓑ  $f$  kontini a-dwat men li pa kontini a-goch

### Pwoblèm 17: Tip de diskontinite

Gen yon diskontinite de so nan  $x = 3$ , epi gen yon diskontinite remouvab nan  $x = -2$  ak  $x = 1$ .

### Pwoblèm 18: Fonksyon konstant

Li kontini nan tout pwen.

- Ⓐ

### Pwoblèm 19: Fonksyon rasyonèl 1

Fonksyon sa a pa defini nan pwen  $x = 17$ , ki donk li pa kontini la a. Sepandan, li kontini tout lòt kote andeyò pwen sa.

- Ⓒ

### Pwoblèm 20: Fonksyon rasyonèl 2

Fonksyon sa a defini toupatou, epi tou li kontini tout kote tou.

- Ⓐ

**Pwoblèm 21: Valè Absoli**

Grafik fonksyon sa a gen yon ang (koube) nan  $x = 0$ , men, li toujou kontini nan andwa sa a, epi tout lòt kote andeyò sa.

A

**Pwoblèm 22: Fonksyon sinis**

Fonksyon sinis la, li kontini nan tout pwen. An konsekans, limit fonksyon sinis lan pandan  $x$  ap pwoche  $\pi/5$  li egal ak valè sinis fonksyon an nan  $\pi/5$ .

A Vrè

**Pwoblèm 23: Fonksyon etaj**

Sa t ap vrè si fonksyon etaj la te kontini nan  $x = 3$ , men li pa kontini. Limit agoch ( $x < 3$ ) egal 2, epi limit adwat egal 3. Ki donk, fonksyon etaj la kontini adwat nan  $x = 3$ , men li pa kontini agoch: li gen yon diskontinite so.

B Fo

**Pwoblèm 24: Fonksyon respwòk**

Li pa defini nan 0, ki donk, li pa kapab kontini nan pwen sa a. Sa ka rive li kontini nan lòt pwen yo, men pou yon fonksyon kapab kontini globalman, l ap bezwen kontini nan tout pwen.

B Fo

**Pwoblèm 25: Sòm fonksyon kontini yo**

Lwa pou w kalkile limit pou adisyon an di, pou nenpòt  $a$ , nou gen

$$\lim_{x \rightarrow a} (x^2 + x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 + \lim_{x \rightarrow a} x.$$

Pwiske  $x^2$  ak  $x$  yo kontini, sa a egal ak  $a^2 + a$ , oswa  $f(a)$ . Pa konsekan  $f$  kontini nan tout pwen.

A Wi

A Wi

A Wi

12

**Pwoblèm 26: Kosyan fonksyon kontini yo**

Ak kontinite fonksyon kosinis la, nou gen

$$\lim_{x \rightarrow 0} \cos x = \cos 0 = 1.$$

Pwiske sa a pa egal ak zewo, lwa pou w kalkile limit divizyon an di nou ke

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\cos x} = \frac{\lim_{x \rightarrow 0} x}{\lim_{x \rightarrow 0} \cos x} = \frac{0}{1} = g(0).$$

Pa konsekan  $g$  kontini nan  $x = 0$ .

Sepandan,  $g$  pa defini lè  $\cos x = 0$ , ki donk li pa kontini toupatou.

- (A) Wi  
(B) Non

**Pwoblèm 27: Idantifye fonksyon kontini yo**

Fonksyon  $h(x) = \frac{3}{x} - 2x^2$  pa defini nan zewo, ebyen li pa kontini nan zewo.

Note ke li pa yon polinom, pwiske fonksyon polinom yo genyen sèlman pwisans pozitif pou  $x$ , se pa  $x^{-1}$ . Pi gran fonksyon antye  $k(x)$  la pa kontini nan pwen antye yo. Tout lòt fonksyon yo kontini nan tout pwen, pwiske yo konstwi a pati fonksyon ki kontini ak adisyon, soustraksyon, ak miltiplikasyon, se sa k konsève kontinite a.

**Pwoblèm 28: Vrè ou Fo 1**

Vrè. Tout fonksyon polinom kontini, pwiske yo kapab konstwi a pati konstant epi fonksyon  $f(x) = x$  la, ki yo menm, tout kontini lè n itilize adisyon, soustraksyon, ak miltiplikasyon. Pwopriyete fondamantal fonksyon kontini yo sèke limit pandan  $x$  ap pwoche  $a$  egal ak valè fonksyon an nan  $a$ .

- (A) Vrè

**Pwoblèm 29: Vrè ou Fo 2**

Vrè. Nou rekonèt ke  $g$  kontini, pwiske li konstwi a pati fonksyon kontini a travè adisyon, soustraksyon, ak miltiplikasyon. Pwopriyete fondamantal fonksyon kontini yo sèke limit pandan  $x$  ap pwoche  $a$  egal ak valè fonksyon an nan  $a$ .

- (A) Vrè

**Pwoblèm 30: Vrè ou Fo 3**

Fo. Fonksyon etaj la pa kontini nan tout pwen, ki donk nou pa ka konkli ke  $r$  kontini. Dayè, si ou pran limit  $r(x)$  pandan  $x$  ap pwoche 1 a-goch, ou pral jwenn 3, ki diferan lè n pran  $r(1)$ , ki donk  $r$  la pa kontini nan 1.

ⓑ Fo

**Pwoblèm 31: Vrè ou Fo 4**

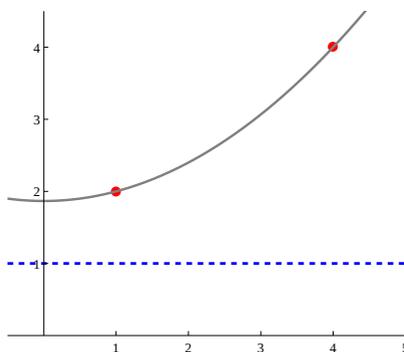
Fo. Se kapab yon ka kote  $f$  gen yon diskontinite de so nan  $x = 3$ , epi  $g$  gen yon diskontinite de so nan  $x = 3$ , men lè ou adisyon de fonksyon yo, tou de so yo anile (elimine), epi nou rete ak yon sòm kontini.

Pa egzanp, si  $f(x) = \lfloor x \rfloor$  ak  $g(x) = -\lfloor x \rfloor$ , ebyen tou de fonksyon yo gen yon diskontinite de so nan  $x = 3$  men sòm yo se fonksyon konstant 0, ki kontini toupatou.

ⓑ Fo

**Pwoblèm 32: Èske li entèsekte?**

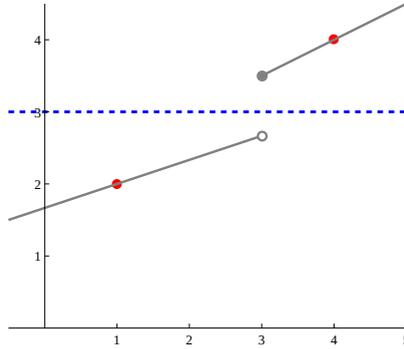
Pa gen pyès rezon pou graf  $f$  la ta bezwen entèsekte liy lan. Pa egzanp, li ta kapab sanble ak yon bagay tankou sa a:



ⓑ Non

**Pwoblèm 33: Èske li entèsekte? 2**

Nou pa t di ke  $f$  te sipoze kontini, ki donk graf  $f$  la kapab sote liy lan byen fasil! Pa egzanp, li ta kapab sanble ak yon bagay tankou sa a:



(B) Non

**Pwoblèm 34: TVE 0**

Nonb de lapen Trixie posede a pa yon fonksyon kontini - li kapab sote youn (1) ou plizyè lapen alafwa – ki donk Teyorèm Valè Entèmedyè a pa ka aplike. Anfèt, li enposib pou yon moun gen 3.3 lapen!

(B) Non

**Pwoblèm 35: TVE 1**

Nou remake ke  $f(0) = -1$ , ki negatif, epi  $f(9) = 3 - \cos 9 > 0$ , ki pozitif. Pwiske  $f$  kontini sou entèval  $[0, 9]$ , Teyorèm Valè Entèmedyè a di n gen yon kote kèlkont ant  $x = 0$  e  $x = 9$ , nou pral jwenn yon pwen kote  $f(c) = 0$ .

(A) Wi

**Pwoblèm 36: TVE 2**

Non. Remake ke  $g(x)$  pa kontini sou entèval  $[-1, 1]$ , pwiske li pa defini nan zewo. Pakonsekan Teyorèm Valè Entèmedyè a p ap aplike nan ka sa a.

(B) Non

**Pwoblèm 37: TVE 3**

Fòk nou note ke tout polinom yo kontini nan tout pwen, kidonk Teyorèm Valè Entèmedyè a pral aplike sou tout entèval.

Nou konnen ke  $p(-2)$  pozitif e  $p(-1)$  negatif, ki donk genyen o mwen yon pwen ant  $x = -2$  ak  $x = -1$  kote  $p$  egal zewo. Se menm jan an tou gen o mwen yon pwen ant  $x = 0$  ak  $x = 1$  kote  $p$  egal zewo. An total, nou konnen gen o mwen 2 rasin.

Ⓔ o mwen

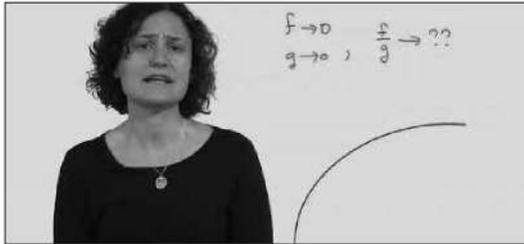
---

# Limit kosyan yo

---

## 1. Limit kosyan yo

 Videyo




---

## 2. Kòman nou kapab kalkile limit kosyan yo?

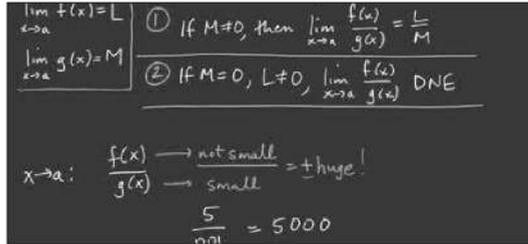
Objektif

Nan fen sekans sa a, apre kèk ti antrènman, ou ta sipoze kapab:

- Distenge twa ka ki egziste pou lwa divizyon limit lan.
- Detèmine limit pou kosyan fonksyon.
- Detèmine lè yon limit se  $\pm\infty$ .

### 3. Limit ak divizyon

 Videyo



#### Pwoblèm 38: Ki sa k ap pase?

Nan videyo a nou te founi je gade  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{x}$ , lè ni nimeratè ak ni denominatè tou de t ap pwoche zewo. Kijan yon kosyan tankou sa n ap gade la ka gen yon limit ki egziste? An n al gade sa ansanm.

Lè nou pran yon limit pandan  $x \rightarrow 0$ , èske nou dwe gade (konsidere) sa k ap pase lè  $x = 0$ ?

(A) Wi  (B) Non

Pandan  $x \rightarrow 0$ , èske nimeratè  $2x$  la pral bay egzakteman zewo?

(A) Wi  (B) Non

Pandan  $x \rightarrow 0$ , èske denominatè  $x$  la pral bay egzakteman zewo?

(A) Wi  (B) Non

### 4. Kosyan ti nonb tou piti yo

An n konsidere ka jeneral yon limit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  kote tou de nimeratè ak denominatè a ap pwoche 0.

Lè  $x$  pwòch  $a$ , tou de  $f(x)$  ak  $g(x)$  yo pwòch zewo men – esansyèlman – li pa nesèsèman egal ak zewo. Ki donk, pou n evalye  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ , n ap bezwen detèmine sa k pase lè nou divize yon ti nonb tou piti ak yon lòt. Nou pral mande w pou divize yon ti nonb tou piti ak yon lòt ti nonb tou piti pou w kapab gade sa k pase ak pwòp tèt ou!

**Pwoblèm 39: An n eseye devine!**

Anvan nou al fè prèv nimerik la, nou ta renmen w devine ki sa repons la ye. Si tout sa n konnen se  $f(x)$  piti (di, ant zewo ak 0.01) epi  $g(x)$  sa a piti (yon fwa ankò, ant zewo ak 0.01), Ki sa w panse, selon ou menm, ki pral sètènman vrè pou kosyan  $\frac{f(x)}{g(x)}$  la? Piga w enkyete w si w twonpe nan repons ou an - tout repons yo ap aksepte. Nou te senpleman vle ou fòmile yon ipotèz!

- A Mwen panse li pral vrèman pwòch zewo     B Mwen panse l pral trè gwo
- C Mwen panse li pral yon nonb ki pa ni gwo ni piti
- D Mwen panse l ta ka nenpòt nan sa yo; sa depan!

**Pwoblèm 40: Kosyan ti nonb piti**

Nan pwoblèm sa a, nou pral chèche konnen ki sa  $\frac{f(x)}{g(x)}$  ta ka ye apeprè si nimeratè a vrèman piti epi denominatè a vrèman piti. Ou ta ka bezwen yon kalkilatris!

(Nan kad kesyon sa a, "trè gwo" sinifi pi gran pase 100, epi "trè pwòch zewo" sinifi pi piti pase 0.01.)

Si  $f(x) = 0.00000013$  ak  $g(x) = 0.0025$ , lè sa  $\frac{f(x)}{g(x)}$  se...

- (A) Vrèman pwòch zewo
- (B) Trè gwo
- (C) Pa gwo men li pa pwòch zewo
- (D) Pa defini

Si  $f(x) = 0.000033$  ak  $g(x) = 0.000029$ , lè sa  $\frac{f(x)}{g(x)}$  se...

- (A) Vrèman pwòch zewo
- (B) Trè gwo
- (C) Pa gwo men pa pwòch zewo
- (D) Pa defini

Si  $f(x) = 0.0094$  ak  $g(x) = 0.00000023$ , lè sa  $\frac{f(x)}{g(x)}$  se...

- (A) Vrèman pwòch zewo
- (B) Vrèman gwo
- (C) Pa gwo men li pa pwòch zewo
- (D) Pa defini

Si  $f(x) = 0.00023$  ak  $g(x) = 0.000081$ , lè sa  $\frac{f(x)}{g(x)}$  se...

- (A) Vrèman pwòch zewo
- (B) Vrèman gwo
- (C) Pa twò gwo men pwòch zewo
- (D) Pa defini

**Pwoblèm 41: Kosyan ti nonb tou piti yo**

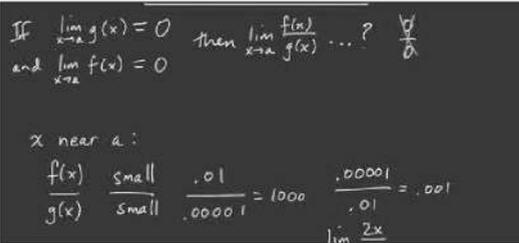
Ki donk, koulye a nou gen kèk prèv, an n reponn kesyon tout bon koulye a.

Si tout sa nou konnen se ke  $f(x)$  tou piti (an n di, ant zewo ak 0.01) epi  $g(x)$  sa a tou piti (yon fwa ankò, ant zewo ak 0.01), definitivman ki sa nou kapab di sou kosyan  $\frac{f(x)}{g(x)}$  la?

- A Li pral vrèman pwòch zewo
- B Li pral vrèman gwo
- C Li pral yon nonb ki pa ni gwo ni piti
- D Li ta kapab nenpòt nan sa yo - sa depan!

**5. Ti piti divize pa ti piti**

 Videyo



**6. Règ pou w kalkile limit pou divizyon**

Si  $\lim_{x \to a} f(x) = L$  epi  $\lim_{x \to a} g(x) = M$ , alò:

- Si  $M \neq 0$ , alò  $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ .
- Si  $M = 0$  men  $L \neq 0$ , alò  $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$  pa egziste.
- Si tou de  $M = 0$  ak  $L = 0$ , alò  $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$  ta ka egziste, oswa li ta ka pa egziste. Yon ti travay siplemantè (an plis) nesèsè pou n detèmine si dènye tip limit sa a egziste, epi ki sa li ye si li egziste.

## 7. Règ limit yo

### Pwoblèm 42: Règ limit yo

Sipoze ke  $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 0$ ,  $\lim_{x \rightarrow -1} g(x) = 17$ , epi  $\lim_{x \rightarrow -1} h(x) = 0$ .

Evalye limit sa yo.

$$\lim_{x \rightarrow -1} g(x)h(x)$$

A 0    B 1    C 17    D Kèk lòt bagay    E Pa egziste

F Pa ka detèmine alèd de enfòmasyon sa yo ba n yo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{g(x)}{f(x)}$$

A 0    B 1    C 17    D Kèk lòt bagay    E Li pa egziste

F Pa ka detèmine alèd de enfòmasyon sa yo ba n yo

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) + g(x) + h(x)$$

A 0    B 1    C 17    D Kèk lòt bagay    E Li pa egziste

F Pa ka detèmine alèd de enfòmasyon sa yo ba n yo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x)}{h(x)}$$

A 0    B 1    C 17    D Kèk lòt bagay    E Li pa egziste

F Pa ka detèmine alèd de enfòmasyon sa yo ba n yo

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{f(x) + h(x)}{g(x)}$$

A 0    B 1    C 17    D Kèk lòt bagay    E Li pa egziste

F Pa ka detèmine alèd de enfòmasyon sa yo ba n yo

## 8. Itilizasyon règ pou w kalkile limit pou divizyon

 Videyo



1) If  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  and  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M \neq 0$ , then  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ .

2) If  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  and  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) \neq 0$ , then  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  DNE.

3) If  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$  and  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0$ , must do more work to determine  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x^2 - 3x + 2} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x-1)(x+3)}{(x-1)(x-2)}$$

## 9. Limit divizyon kesyon

Pwoblèm 43: Limit kosyan 1

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos x + 1}{x^2 + x}$ .

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)



Pwoblèm 44: Limit kosyan 2

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1/x + x^2}{x - 3}$ .

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)



Pwoblèm 45: Limit kosyan 3

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{12/x - 3x}{2 - 3x + x^2}$  ye?

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)



**Pwoblèm 46: Limit kosyan 4**

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^3 - 6x^2 + 9x}$  ye?

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)

**Pwoblèm 47: Limit kosyan 5**

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^3 + x^2}{x^3 + x^2 + x}$  ye?

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)

**10. Pwoblèm revizyon****Pwoblèm 48: Limit bazik yo**

Vrè oswa Fo: An jeneral, si  $f$  se yon fonksyon, alò  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ .

|| (A) Vrè (B) Fo

**Pwoblèm 49: Limit bazik 2**

Vrè oswa Fo: Si  $f(x) = \sin(x^3)$ , alò  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$  pou tout  $a$ .

|| (A) Vrè (B) Fo

**Pwoblèm 50: Plis limit 1**

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0} \sqrt{\cos x + 3}$  ye?

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)



**Pwoblèm 51: Plis limit 2**

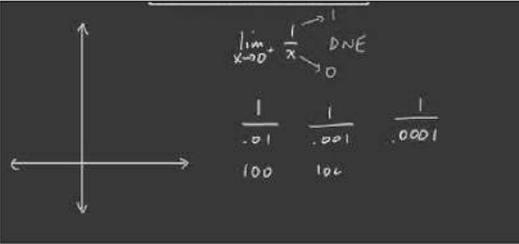
Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{4 - x^2}{2^x - 3}$  ye?

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)

**Pwoblèm 52: Plis limit 3**

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 7x + 5}{x + 1}$  ye?

(Antre DNE si limit lan pa egziste.)

**11. Limit ki pa egziste yo****Videyo**

Nan videyo a, nou te ekri ke yon limit se te  $+\infty$ .  $+\infty$  an bèl, paske l souliye diferans ant  $+\infty$  ak  $-\infty$ , men kèk fwa ou pral wè moun yo ekri yon limit se  $\infty$  epi yo pa itilize siy plis lan. jeneralman li vle di menm bagay ak  $+\infty$ .

**Pwoblèm 53: Lòt bò a**

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$  bay?

- A Li se  $+\infty$     B Li se  $-\infty$     C Limit la pa egziste, epi li pa ni  $+\infty$  ni  $-\infty$
- D Li egziste

**Pwoblèm 54: Limit global**

Etandone nou gen rezilta pou  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x}$  ak  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x}$ , ki sa nou ta dwe di sou

$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x}$ ?

- A Li se  $+\infty$     B Li se  $-\infty$     C Limit la pa egziste, e li pa ni  $+\infty$  ni  $-\infty$
- D Li egziste

---

**12. Yon lòt fonksyon****Pwoblèm 55: Yon lòt fonksyon**

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$  bay?

- A Li se  $+\infty$     B Li se  $-\infty$     C Limit lan pa egziste, e li pa ni  $+\infty$  ni  $-\infty$
- D Li egziste

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$  bay?

- A Li se  $+\infty$     B Li se  $-\infty$     C Limit lan pa egziste, e li pa ni  $+\infty$  ni  $-\infty$
- D Li egziste

**Pwoblèm 56: Global 2**

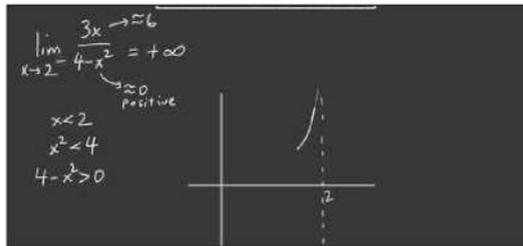
Etandone nou gen rezilta pou  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2}$  ak  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2}$ , ki sa nou ta ka di sou

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2}?$$

- A Li se  $+\infty$     B Li se  $-\infty$     C Limit lan pa egziste, e li pa ni  $+\infty$  ni  $-\infty$
- D Li egziste

**13. Limit lenfini 2**

 Videyo



## 14. Ki limit la?

### Pwoblèm 57: Ki limit la?

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x - 1}{1 - \cos x}$  bay?

A Li se  $+\infty$     B Li se  $-\infty$     C Limit lan pa egziste, e li pa ni  $+\infty$  ni  $-\infty$

D Li egziste

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x - 1}{1 - \cos x}$  bay?

A Li se  $+\infty$     B Li se  $-\infty$     C Limit lan pa egziste, e li pa ni  $+\infty$  ni  $-\infty$

D Li egziste

## 15. Divizyon ki enplike limit enfini

### Pwoblèm 58: Divizyon ki enplike limit enfini

Sipoze ke  $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -2$  epi  $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = +\infty$ .

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)}{g(x)}$  bay?

A 0    B -2    C  $+\infty$     D  $-\infty$     E Li pa egziste e li pa  $\pm\infty$

F Kèk lòt bagay

G Nou paka detèmine l alèd de enfòmasyon yo ba nou yo

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{g(x)}{f(x)}$  bay?

A 0    B -2    C  $+\infty$     D  $-\infty$     E Pa egziste e li pa  $\pm\infty$

F Kèk lòt bagay

G Nou paka detèmine l alèd de enfòmasyon yo ba nou yo

---

## 16. Rezime

### Lwa pou w kalkile limit divizyon

Si  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = L$  epi  $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = M$ , alò:

- Si  $M \neq 0$ , alò  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$ .
- Si  $M = 0$  men  $L \neq 0$ , alò  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  pa egziste.
- Si tou de  $M = 0$  ak  $L = 0$ , alò  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$  ta ka egziste, oswa li ta ka pa egziste. Yon ti travay siplemantè nesèsè pou n ka detèmine si dènye tip limit la egziste, epi ki sa l ye si li egziste.

## Solisyon yo

### Pwoblèm 38: Ki sa k ap pase?

Raple w ke limit pandan  $x \rightarrow 0$  entèrese sèlman ak valè  $x$  ki pwòch 0 yo, men se pa valè ki egal ak 0. Pou jan de valè sa yo, nimeratè a ak denominatè a, yo pral pwòch zewo, men yo p ap egal avèk li.

- (B) Non
- (B) Non
- (B) Non

### Pwoblèm 39: An n eseye devine!

Èske ou te eseye devine? Nou pral detèmine kilès ki kòrèk pita

A  B  C  D

### Pwoblèm 40: Kosyan ti nonb piti

Èske w te kalkile sa yo?

- (A) Vrèman pwòch zewo
- (C) Pa gwo men pa pwòch zewo
- (B) Vrèman gwo
- (C) Pa twò gwo men pwòch zewo

### Pwoblèm 41: Kosyan ti nonb tou piti yo

Gade repons yo nan kesyon anvan: kosyan an ka petèt gwo, piti oswa ant yo de a (entèmedyè)!

**Pwoblèm 42: Règ limit yo**

Règ pou w kalkile limit pou multiplikasyon an pa gen eksepsyon, ki donk premye limit la se pral  $17 \cdot 0$ , oswa 0.

Se menm jan an, règle pou w kalkile limit pou adisyon di nou ke twazyèm limit la se pral  $0 + 17 + 0$ , oubyen 17.

Pou limit  $\frac{g(x)}{f(x)}$  la, nimeratè a pral pwoche 17 tandiske denominatè a pral pwoche 0. Sa vle di limit kosyan an pa egziste.

Pou limit  $\frac{f(x) + h(x)}{g(x)}$  la, nimeratè a pral pwoche  $0 + 0$  pandan ke denominatè a pral bay 17. Sa vle di limit kosyan an se  $0/17$ , oswa 0.

Pou limit  $\frac{f(x)}{h(x)}$  la, tou de, nimeratè ak denominatè a pral pwoche 0. Nou paka fè pyès dediksyon a pati enfòmasyon sa yo; Nou dwe fè yon ti travay siplemantè pou n ka detèmine ki sa limit la ye.

A

E

C

F

A

**Pwoblèm 43: Limit kosyan 1**

Pandan  $x$  ap pwoche 0 a-dwat, nimeratè a ap pwoche 3 (li kontini, ki donk nou ka entwodui 0 pou  $x$ ) epi denominatè a ap pwoche 0. Pwiske denominatè a ap pwoche 0 men nimeratè a p ap pwoche 0, règle pou w kalkile limit pou divizyon an di n limit lan pa egziste.

*DNE***Pwoblèm 44: Limit kosyan 2**

Pandan  $x$  ap pwoche 2, nimeratè a ap pwoche 4.5 (li kontini, ki donk nou kapab entwodui 2 pou  $x$ ) epi denominatè a ap pwoche -1. Lwa pou w kalkile limit divizyon yo di nou ke kosyan an ap pwoche  $4.5 / -1$ , oubyen  $-4.5$ .

**Pwoblèm 45: Limit kosyan 3**

Pandan  $x$  ap pwoche 2, nimeratè  $12/x - 3x$  pral pwoche 0, epi denominatè  $2 - 3x + x^2$  la, li menm tou pral pwoche 0. Nou dwe fè yon ti travay an plis pou n kapab kalkile limit kosyan an. Nou kapab ekri

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{12/x - 3x}{2 - 3x + x^2} = \lim_{x \rightarrow 2} \frac{12 - 3x^2}{x(2 - 3x + x^2)} \quad (3.1)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(2 - x)(2 + x)}{x(2 - x)(1 - x)} \quad (3.2)$$

$$= \lim_{x \rightarrow 2} \frac{3(2 + x)}{x(1 - x)}. \quad (3.3)$$

Limit nimeratè a nan dènye fraksyon an se pral 12, tandiske limit denominatè a pral egal ak  $-2$ . Ebyen, règ pou w kalkile limit pou divizyon an di nou ke limit kosyan an se pral  $12/ - 2$ , oubyen  $-6$ .

**Pwoblèm 46: Limit kosyan 4**

Tou de, nimeratè ak denominatè pral pwoche zewo, ki donk n ap bezwen fè yon ti travay an plis anvan nou kapab di. Nou kapab faktorize:

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2x^2 - 10x + 12}{x^3 - 6x^2 + 9x} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 2)(x - 3)}{x(x - 3)^2} = \lim_{x \rightarrow 3} \frac{2(x - 2)}{x(x - 3)}.$$

Nan dènye limit lan, denominatè a toujou ap pwoche 0 men nimeratè a p ap pwoche 0. Ebyen, limit la pa egziste.

**Pwoblèm 47: Limit kosyan 5**

Tou de, nimeratè a ak denominatè a ap pwoche zewo, ki donk nou oblije travay pi di. Nan ka sa a nou kapab elimine yon faktè  $x$  nan tou de anlè ak anba a pou

n ka jwenn  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x^2 + x}{x^2 + x + 1}$ . Koulye a nimeratè a ap pwoche zewo, tandiske denominatè a ap pwoche 1. Ebyen, limit kosyan an se zewo.

**Pwoblèm 48: Limit bazik yo**

Sa a pa verite an jeneral! Ou ka konsilte seksyon sou entwodiksyon limit lan.

(B) Fo

**Pwoblèm 49: Limit bazik 2**

Pwiske  $f$  se konpozisyon de fonksyon kontini,  $f$  pral kontini nan tout pwen.

(A) Vrè

**Pwoblèm 50: Plis limit 1**

Fonksyon  $\cos x + 3$  a kontini nan tout pwen, ki donk pwiske  $x$  ap pwoche 0,  $\cos x + 3$  ap pwoche  $\cos 0 + 3$ , oswa 4. Pwiske  $\sqrt{x}$  kontini nan 4, nou remake ke limit global la pral pwoche  $\sqrt{4}$ , oswa 2.

**Pwoblèm 51: Plis limit 2**

Nimeratè ak denominatè a tou de kontini, ki donk pou detèmine ki sa limit yo ye nou kapab jis entwodui ladan  $|x - 2|$ . Nimeratè a ap pwoche 0, epi denominatè a ap pwoche 1, ki donk lwa pou w kalkile limit kosyan di nou limit global la se  $0/1$ , oubyen 0.

**Pwoblèm 52: Plis limit 3**

Ni nimeratè a ni denominatè a, tou de kontini, ki donk pou n kapab detèmine ki sa limit yo ye nou ka jis entwodui ladan  $|x + 1|$ . Nou wè ke tou de ap pwoche 0, ki donk n ap bezwen f on ti travay an plis pou n jwenn limit sa a.

Nou kapab faktorize nimeratè a tankou  $(x + 1)(2x + 5)$ , ebyen nou jwenn

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x^2 + 7x + 5}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} \frac{(x + 1)(2x + 5)}{x + 1} = \lim_{x \rightarrow -1} 2x + 5 = 3.$$

**Pwoblèm 53: Lòt bò a**

Pandan  $x \rightarrow 0^-$ ,  $1/x$  pral negatif epi li pral vin trè gran abitèman. Limit la pral egal ak  $-\infty$ .

B

**Pwoblèm 54: Limit global**

Pwiske limit la se  $+\infty$  pandan  $x \rightarrow 0^+$ , men  $-\infty$  pandan  $x \rightarrow 0^-$ , nou pa ka di si limit global la se  $+\infty$  oswa  $-\infty$ .

C

**Pwoblèm 55: Yon lòt fonksyon**

Lè  $x$  ap pwoche 0 sou chak bò,  $x^2$  pral tou piti epi pozitif. Pa konsekan  $\frac{1}{x^2}$  pral pwoche  $+\infty$  sou tou de bò.

A

A

**Pwoblèm 56: Global 2**

Pwiske limit tou de bò yo se  $+\infty$ , nou kapab di limit global la se  $+\infty$ .

A

**Pwoblèm 57: Ki limit la?**

Lè  $x$  tou pre 0 sou tou de bò yo,  $2x - 1$  pral pwoche  $-1$ . Nan denominatè a,  $\cos x$  pral pwoche 1, men pi piti pase 1, ki donk  $1 - \cos x$  pral tou piti epi pozitif, pandan l ap pwoche zewo. Se kon sa, sou tou de bò yo, nou pral jwenn yon nonb ki tou pre  $-1$  divize pa yon ti nonb pozitif vrèman piti. Limit lan se pral  $-\infty$  nan tou de bò yo.

B

B

**Pwoblèm 58: Divizyon ki enlike limit enfini**

Pandan  $x \rightarrow 1^+$ , nimeratè  $\frac{f(x)}{g(x)}$  la ap pwoche  $-2$  men denominatè a ap vin trè trè gwo. Kosyan sa a pral pwoche zewo.

Pandan  $x \rightarrow 1^+$ , nimeratè  $\frac{g(x)}{f(x)}$  la ap pozitif epi l ap vin trè trè gwo, men denominatè a negatif, tou pre  $-2$ . Lè n divize kèk nonb pozitif ki trè trè gwo ak  $-2$  n ap jwenn kèk nonb negatif ki trè trè gwo, ki donk limit kosyan sa a se pral  $-\infty$ .

A

D

---

# Devwa 0 Pati A

---

## 1. Pati A Pwoblèm yo

### Konsènan Pwoblèm Pati A

Pwoblèm Pati A ede ou pratike mekanik kalkil la. Gen anpil pwoblèm ki kontinye ide yo ki te prezante nan sekans aprantisaj pi wo a. Chak pwoblèm make ak sijè ki gen rapò a, epi nou eseye asire ke chak pwoblèm teste sèlman yon sèl konsèp.

Okontrè, pwoblèm Pati B mande ou aplike konsèp sa yo nan nouvo fason. Yo pi difisil, men yo egzije yon bon konpreyansyon sou mekanik ak konsèp ki kouvri nan pwoblèm Pati A yo.

---

## 2. Devwa Pati A

### Pwoblèm 59: 0A (1)

Klike sou nenpòt fonksyon ki kontini pou *tout nonb reyèl*  $x$ .

A  $\sin(2^x + 1)$     B  $\tan(3x + 5)$     C  $\sqrt{x^2 + 4}$     D  $x^{3/2} + 4x$     E  $\frac{\cos x}{3x+1}$

**Pwoblèm 60: 0A (2)**

Rasin  $a$  yon fonksyon polinòm,  $p(x)$  gen multiplikasyon  $m$  si  $(x - a)^m$  se pi gwo puisans  $x - a$  ki se yon faktè de  $p$ . Nan yon lòt fason,  $p(x) = (x - a)^m s(x)$ , kote  $s(x)$  se yon fonksyon polinòm pou ke  $a$  pa yon rasin.

(a) Si  $a$  se yon rasin ak multiplikasyon 5 pou polinòm  $p$ , epi ak multiplikasyon 7 pou polinòm  $q$ , ki valè limit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$  ka genyen? Klike sou tout opsyon ki posib.

A 0  B 1  C -1  D 3  E Li pa egziste.

(b) Si  $a$  se yon rasin miltip de 8 pou polinòm  $p$  a, epi se yon rasin miltip de 4 pou polinòm  $q$  a, ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$  la bay? Klike sou tout opsyon ki posib.

A 0  B 1  C -1  D 3  E Li pa egziste

(c) Si  $a$  se yon rasin miltip de 6 pou polinòm  $p$ , epi se yon rasin miltip de 6 pou polinòm  $q$  a, ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)}$  la bay? Klike sou tout opsyon ki posib.

A 0  B 1  C -1  D 3  E Li pa egziste

**Pwoblèm 61: 0A (3)**

Ki sa limit  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - 4}{x^2 - 3x - 4}$  ye? Antre DNE si ou panse limit la pa egziste.



**Pwoblèm 62: 0A (4)**

An n konsidere fonksyon  $f(x) = \frac{x - \sqrt[3]{x} + \cos x}{x^2 - 4}$ . Nou kalkile valè sa yo pou  $f$ :

$$f(-3) = -.51$$

$$f(-2.25) = -1.48$$

$$f(-1.5) = .16$$

$$f(-.75) = -.26$$

$$f(0) = -.25$$

$$f(.75) = -.17$$

$$f(1.5) = -.24$$

$$f(2.25) = .29$$

$$f(3) = .11$$

Sèlman ak enfòmasyon sa yo (i.e., san nou pa rezoud  $f(x) = 0$ , aljebrikman), ki sa nou ka di sou kantite rasin fonksyon  $f$  la genyen?

Kantite rasin fonksyon  $f$  la genyen se  (A) egzakteman  (B) pi piti  (C) plis pase



## Solisyon yo

### Pwoblèm 59: 0A (1)

Fonksyon  $\sin(2^x + 1)$  la kontini pou tout  $x$ .

Fonksyon  $\tan(3x + 5)$  diskontini, li ale nan lenfini ak mwens lenfini lè  $\cos(3x + 5) = 0$ .

Paske  $x^2 + 4 > 0$  pou tout  $x$ , fonksyon  $\sqrt{x^2 + 4}$  la kontini toupatou .

Fonksyon  $x^{3/2} + 4x$  pa defini okenn kote ke  $x < 0$ , ki donk, an patikilye li pa kontini la.

Fonksyon  $\frac{\cos x}{3x+1}$  pa kontini kote li pa defini, nan pwen  $x = -1/3$ .

Remake byen ke tout fonksyon sa yo kontini sou domèn definisyon yo.

### Pwoblèm 60: 0A (2)

(a) Denominatè a ale pi vit nan 0, ki donk limit la pa egziste..

(b) Nimeratè a ale pi vit nan 0, ki donk limit la vin 0.

(c) Yo toudè ap kouri pou rive nan 0 ansanm, kidonk limit la ta ka yon valè ki pa menm zewo, ni enfini!

Nan ka(c)a,  $p(x) = (x - a)^6 \cdot s_p(x)$ , ak  $q(x) = (x - a)^6 \cdot s_q(x)$  ki donk,

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{p(x)}{q(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{(x - a)^6 \cdot s_p(x)}{(x - a)^6 \cdot s_q(x)}.$$

Après nou fin anile tèm yo, kosyan an vin redwi a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{s_p(x)}{s_q(x)}.$$

Daprè enstriksyon yo te bay nan pwoblèm nan, nou ka konklui ke tou de  $\lim_{x \rightarrow a} s_p(x) \neq 0$ , ak  $\lim_{x \rightarrow a} s_q(x) \neq 0$ . Sinon,  $a$  ta dwe yon rasin pou  $s_p$  oswa  $s_q$ . Ki donk, nan limit la, kosyan an pral gen yon nimeratè ak yon denominatè fini ki gen yon valè ki pa zewo.

### Pwoblèm 61: 0A (3)

Lè  $x$  ap pwoche 2, nimeratè a ap pwoche 0 epi denominatè a ap pwoche -6. Ki donk, limit kosyan an se  $0/ - 6$ , sa vle di 0.

**Pwoblèm 62: 0A (4)**

Nou konnen fonksyon sa a pa kontini nan  $x = \pm 2$ . Ki donk, nou analize kijan valè  $f$  chanje siy sou twa entèval yo  $(-\infty, -2)$ ,  $(-2, 2)$ , ak  $(2, \infty)$ . Dapre done nou yo,  $f$  pa chanje siy pou  $-\infty < x < -2$ ;  $f$  chanje siy pou  $-2 < x < 2$ ;  $f$  pa chanje siy pou  $2 < x < \infty$ . Ki donk, Teyorèm Valè Entèmedyè di nou gen omwen yon rasin, ki sitiye nan entèval  $-2 < x < 2$ .

© plis pase

1

# Inite 1: Derive a

---

# Ki sa ki derive a?

---

## 1. Ki sa ki derive a?

 Videyo



Ozetazini, li pa posib pou w pran yon kontravansyon pou eksè vitès nan fason sa a. Lejislasyon te adopte yon lwa pou anpeche lapolis itilize done kabin peyaj pou drese kontravansyon pou eksè vitès avèk efè retwoaktif. Sinon, pèsonn pa t ap achte kat peyaj otomatik!

---

## 2. Objektif

- [To varyasyon enstantane](#)

### Objektif

- Dekri ki sa yon **to de varyasyon mwayèn** vle di, epi kalkile yo ak **inite** ki apwopriye.
- Dekri diferans epi relasyon ki egziste ant to de varyasyon mwayen an epi yon **to de varyasyon enstantane** .
- Itilize yon **limit** pou w kapab jwenn to de varyasyon enstantane a, ke yo rele tou **derive** nan yon pwen.
- Intèprete **siy yon derive** - pozitif, negatif, oswa zewo - tankou li gen yon sinifikasyon nan mond reyèl la.

### 3. To varyasyon

Pwodi derive yo se yon kesyon de To varyasyon. Ki sa nou vle di lè n pale de To varyasyon? An n pran yon egzanp.

Sèvi ak lefèt ke ou te pase kabin peyaj la nan limit 50 mayz sou Turnpike a a 8 è, epi ou te pase yon dezyèm kabin peyaj nan limit 220 mayz la a 10 è.

#### Pwoblèm 1: To mwayen

An mwayèn, a ki vitès ou kondui ant 8 ak 10 a.m.?

(Antre yon nonb an mayz pa è (mayz/è).)



#### Pwoblèm 2: Verifikasyon inite yo

Oke, ou te antre yon nonb epi espere ke ou te jwenn bon repons lan. Men, li mande pou mezire yon bagay reyèl - yon vitès, pa sèlman yon nonb. Nan ki inite nou te jis mezire vitès nou an?

- (A) kilomèt
- (B) mayz
- (C) è
- (D) kilomèt pa è
- (E) mayz pa è
- (F) è pa kilomèt
- (G) è pa mayz
- (H) yon lòt bagay

### 4. Mwayèn vs. Enstantane

#### Pwoblèm 3: Mwayèn

Nou te kalkile yon vitès 85 mayz pa èdtan, kidonk sa vle di nou te definitivman fè eksè vitès. Èske sa vle di ke nan moman egzak la 8 AM, vitès machin nan te egzakteman 85 mph?

- (A) Wi
- (B) Non

**Problèm 4: Apwoksimasyon enstantane**

Kiyès nan sa ki ann apre yo ki ta ba nou yon pi bon lide sou vitès la a 8 am?

- A Fè menm kalkil la, men ant 8am ak 12pm olye de ant 8am ak 10am.
- B Fè menm kalkil la, men ant 8am ak 8:01am olye de ant 8am ak 10am.

 **Videoyo**



Between 8:00 + 10:00 :  
 Avg velocity = 85 mph

Between 8:00 + 8:01 : ?

time  $t$   $\longleftrightarrow$  position  $f(t)$   
 $f(8) = 50$  mi  
 $f(10) = 220$  mi

**Problèm 5: Vitès mwayèn 2**

Etdandone ke a 8:00 a.m. pozisyon nou an se te 50 mayz epi a 8:01 a.m. pozisyon nou an te 51 mayz, ki sa vitès mwayèn nou an te ye nan minit ant 8:00 a.m. ak 8:01 a.m.? Ekspriye repons ou an mayz pa èdtan.



**5. Apwoksimasyon Enstantane Swit**

 **Videoyo**



Average Velocity  
 between 8:00, 8:01  $= \frac{\Delta f}{\Delta t} = \frac{51-50 \text{ mi}}{8:01-8:00} = 1 \frac{\text{mi}}{\text{min}} \cdot \frac{60 \text{ mins}}{\text{hr}} = 60 \frac{\text{mi}}{\text{hr}}$

position at 8:00  $f(8) = 50$  mi  $\left( f(8 + \frac{1}{60}) - f(8) \right)$   
 position at 8:01  $f(8 + \frac{1}{60}) = 51$  mi  $\frac{8 + \frac{1}{60} - 8}{\text{temp. } \rightarrow} = \frac{1 \text{ mi}}{\frac{1}{60} \text{ hr}} = 60 \frac{\text{mi}}{\text{hr}}$

**Pwoblèm 6: Chanjman presyon**

Presyon yon volim gaz varye an fonksyon tanperati a. Si nou mezire presyon an nan inite paskal, epi tanperati a an degre sèlsiyis, nan ki inite nou ta dwe mezire to varyasyon presyon an pa rapò ak tanperati a?

A paskal    B degre sèlsiyis    C degre sèlsiyis pa paskal

D paskal pa degre sèlsiyis    E Okenn nan sa k anlè yo

**Pwoblèm 7: To varyasyon presyon**

Si presyon an se 210000 paskal a 30 degre sèlsiyis, epi 220000 paskal a 32 degre sèlsiyis, ki sa to mwayen varyasyon presyon an ye sou entèval tanperati sa a?

(Eksprime repons lan kòm yon nonb nan inite ou te jwenn nan pwoblèm anvan an.)

**6. Vin pi pre imedyatman****Pwoblèm 8: Vin pi pre imedyatman**

Nou te kalkile vitès mwayèn machin nou an ant 8:00 ak 8:01. Jenyal! Men yon fwa ankò nou gen pwoblèm nan - sa a se jis vitès mwayèn sou yon peryòd de yon minit. Nou toujou poko jwenn vitès la nan moman egzak 8 am lan.

Kiyès nan ekspresyon sa yo ki ta ba nou vitès egzak la nan **egzakteman** 8am?

A  $\frac{f(10) - f(8)}{10 - 8}$     B  $\frac{f(8 + 1/60) - f(8)}{8 + 1/60 - 8}$

C  $\frac{f(8 + 1/3600) - f(8)}{8 + 1/3600 - 8}$     D Okenn ladan yo

## 7. Jwenn yon fòmil

### Pwoblèm 9: Jwenn yon fòmil

Tout chwa yo te nan fòm  $\frac{f(b) - f(8)}{b - 8}$ . Lè  $b$  se te 10, nou konnen ke sa a ba nou vitès mwayèn nan sou peryòd tan soti 8:00 pou rive 10:00, men sa a pa pral nesèsèman koresponn ak vitès enstantane a nan 8:00. Lè nou chwazi  $b$  pou yon minit aprè 8,  $8 + 1/60$ , pwobableman nou jwenn yon mezi ki pi egzak, men li toujou yon vitès mwayèn sou yon minit, se pa vitès enstantane a. Lè  $b$  se sèlman yon segond distans,  $8 + 1/3600$ , menm plis presi, men ankò, li pa egzak.

Èske repons lan tou senpleman se entwodui 8 pou  $b$  nan ekwasyon vitès mwayèn nan?

A Wi  B Non

## 8. Derive nan yon pwen

 Videyo



Average velocity between 8:00 and time  $b = \frac{f(b) - f(8)}{b - 8}$

Instantaneous Velocity at 8:00 exactly?  $b = 8.01$   $b = 8.00.01$

SOLUTION: Take LIMIT as  $b \rightarrow 8:00$

Instantaneous Velocity =  $\lim_{b \rightarrow 8:00}$

## 9. Definisyon derive a

**derive** yon fonksyon  $f(x)$  nan yon pwen  $x = a$  defini tankou

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

### Definisyon altènatif

Definisyon altènatif sa a komen tou.

**Derive** yon fonksyon  $f(x)$  nan yon pwen  $x = a$  defini tankou

$$f'(a) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

### Pwoblèm 10: Kesyon revizyon

Kiyès nan bagay sa yo  $f'(a)$ ?  $f'(a)$  mezire?

(Kroche otan de kaz ki nesèsè.)

- A Gwosè  $f$     B Yon to varyasyon mwayèn pou  $f$
- C Yon to varyasyon enstantane pou  $f$

### Pwoblèm 11: Inite derive a

Si  $x$  se tanperati, mezire an degre, epi  $f(x)$  se presyon, mezire an paskal, nan ki inite  $f'(30)$  ta dwe mezire?

- A Paskal    B Degre    C Degre pa Paskal    D Paskal pa degre
- E Okenn ladan yo

## 10. Jete yon joumou

 Videyo



Height at time  $t$  seconds =  $f(t) = 100 + 20t - 5t^2$  meters

Average velocity between  $t=0$  and  $t=1$  =  $\frac{f(1) - f(0)}{1 - 0}$

$= \frac{115 - 100 \text{ m}}{1 \text{ s}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Instantaneous Velocity at  $t=1$  =  $f'(1) = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{f(b) - f(1)}{b - 1}$

$= \frac{f(b) - f(1)}{b - 1} = \frac{(100 + 20b - 5b^2) - 115}{b - 1}$

$= \frac{-5b^2 + 20b - 15}{b - 1} = \frac{-5(b^2 - 4b + 3)}{b - 1} = \frac{-5(b-1)(b-3)}{b-1}$

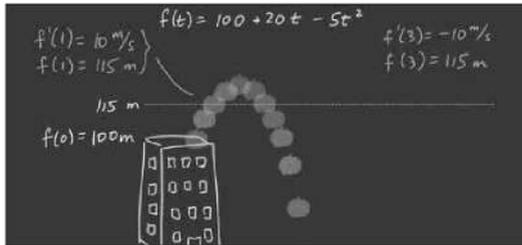
## 11. Yon derive negatif?

### Pwoblèm 12: Konprann repons lan

Wotè joumou an nan moman  $t$  se  $f(t) = 100 + 20t - 5t^2$ . Nou jwenn yon nonb negatif pou  $f'(3)$ . Èske sa fè sans?

- A Wi, paske nan  $t = 3$  joumou an pi ba pase wotè orijinal bilding lan.
- B Wi, paske nan  $t = 3$  joumou an te kòmanse desann.
- C Non, paske vitès pa ka negatif.  D Non, paske wotè pa ka negatif.

### Videyo



### Pwoblèm 13: Kalkil derive

Koulye a ou kalkile  $f'(2)$ . Itilize menm definisyon limit lan jan nou te fè pi wo a!

$f'(2) =$

**Eleman pou refleksyon:** Ki sa yon vitès enstantane 0 vle di isit la?

## 12. Derive zewo

 Videyo



## 13. Inite derive yo

### Pwoblèm 14: Keson sou inite derive yo

Yon kamyon pral fè yon vwayaj 500 km. Si li chaje ak  $x$  liv kago (machandiz), efikasite gaz li nan vwayaj la pral  $f(x)$  mayl pa galon. Nan ki inite  $f'(5000)$  ap mezire?



### Pwoblèm 15: Siy

Èske w espere  $f'(5000)$  ta ka pozitif, negatif oswa zewo?

A) pozitif    B) negatif    C) zewo

Asire w ke ou ka eksplike pwosesis panse ou lè w ap rezoud pwoblèm sa a. N ap teste ou sou kalite rezònman sa yo nan egzamen AP!

## 14. Rezime

definisyon to varyasyon mwayèn

To varyasyon mwayèn yon fonksyon  $f(x)$  sou yon entèval  $a \leq x \leq b$  defini kòm

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

**Definisyon derive a**

**Derive** yon fonksyon  $f(x)$  nan yon pwen  $x = a$  defini kòm

$$f'(a) = \lim_{b \rightarrow a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 1: To mwayen

Nou te kouvri 170 mayz nan 2 zèd tan, ki donk vitès mwayèn nou an te  $170/2 = 85$ .

### Pwoblèm 2: Verifikasyon inite yo

Nonb 85 lan te kalkile avèk

$$\frac{220 - 50 \text{ miles}}{10 - 8 \text{ hours}} = 85 \frac{\text{miles}}{\text{hour}} \text{ (or 85 mph).}$$

Ⓔ mayz pa è

### Pwoblèm 3: Mwayèn

Non! 85 mph se te yon vitès mwayèn sou tout peryòd tan an, men machin nan te kapab ale pi vit pandan yon tan nan vwayaj la epi pi dousman pandan lòt tan.

Ⓑ

### Pwoblèm 4: Apwoksimasyon enstantane

Si nou vle vitès egzak la a 8 am, fè menm kalkil la sou yon peryòd tan ki pi kout ta ba nou plis asirans nan repons nou an.

Ⓑ

### Pwoblèm 5: Vitès mwayèn 2

Gade pwochen videyo a!

60

### Pwoblèm 6: Chanjman presyon

To varyasyon presyon an parapò ak tanperati a di nou konbyen de paskal presyon an varye pa pou chak degre Sèlisyis nan chanjman tanperati a, ki donk nou ta mezire to varyasyon an paskal pou chak degre Sèlisyis.

Ⓓ

**Pwoblèm 7: To varyasyon presyon**

Sou yon ogmantasyon pou de degre, presyon an chanje an 10000 paskal. Kidonk to varyasyon mwayèn nan se

$$\frac{220000 - 210000}{32 - 30} = \frac{10000}{2} = 5000 \text{ pascals per degree.}$$

**Pwoblèm 8: Vin pi pre imedyatman**

Gade pwochen pwoblèm nan!

D

**Pwoblèm 9: Jwenn yon fòmil**

Gade pwochen videyo a!

B

**Pwoblèm 10: Kesyon revizyon**

Derive  $f$  nan pwen  $x = a$  mezire to varyasyon enstantane pou  $f$  nan pwen sa a. Sa a se lide prensipal la nan seksyon sa a!

**Pwoblèm 11: Inite derive a**

Derive yon fonksyon toujou mezire yon to varyasyon enstantane rezilta yon fonksyon pa rapò ak kòmman (entran) fonksyon an, ki donk, menm jan ak yon to varyasyon mwayèn, li ta dwe mezire nan inite rezilta pa inite komann (entran). Nan ka sa a, nou ta jwenn paskal pa degre.

D

**Pwoblèm 12: Konprann repons lan**

Gade pwochen videyo a!

B

**Pwoblèm 13: Kalkil derive**

Pou pran derive nan 2, nou itilize definisyon limit pou  $f'(2)$ .

$$\begin{aligned}
 f'(2) &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{f(t) - f(2)}{t - 2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{(100 + 20t - 5t^2) - 120}{t - 2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 2} \frac{-20 + 20t - 5t^2}{t - 2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 2} -5 \frac{4 - 4t + t^2}{t - 2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 2} -5 \frac{(t - 2)^2}{t - 2} \\
 &= \lim_{t \rightarrow 2} -5(t - 2) = 0m/s
 \end{aligned}$$

**Pwoblèm 14: Kesyon sou inite derive yo**

Derive yon fonksyon toujou mezire an inite rezilta fonksyon an, divize pa inite komann (entran) fonksyon an. Rezilta a mezire an mayl pa galon ( $mi/g$ ), epi komann (entran an) mezire an liv ( $p$ ), ki donk derive a ap mezire an mayl pa galon pa liv:  $(mi/g)/p$ , oswa  $mi/(g \cdot p)$ .

**Pwoblèm 15: Siy**

Si pwa kago a ap ogmante, efikasite gaz kamyon an pral diminye. Sa vle di  $f'(5000)$  ta dwe negatif.

□

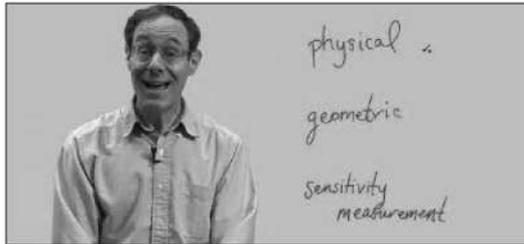
---

# Entèpretasyon jeyometrik derive a

---

## 1. Entèpretasyon jeyometrik derive a

 Videyo




---

## 2. Objektif

Entèpretasyon jeyometrik derive a: Liy tanjant ak sekant

- To de varyasyon enstantane
- **Pant liy tanjant lan nan pwen sa a**

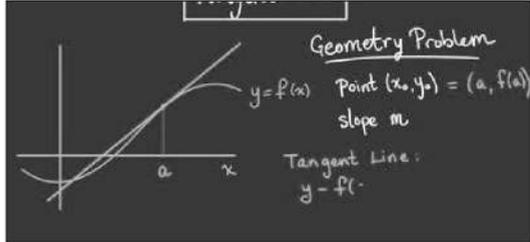
**Objektif**

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Konprann korespondans ki genyen ant to varyasyon (tou de mwayèn ak enstantane) epi **pant liy sekant oswa liy tanjant**.
- Kapab **estime derive** yon fonksyon nan yon pwen, lè yo ba nou graf la.
- Detèmine lè yon derive pa egziste.
- Itilize  $\Delta x$  ak  $\Delta y$  pou endike ti chanjman (ti varyasyon).

### 3. Liy tanjant

 Videyo

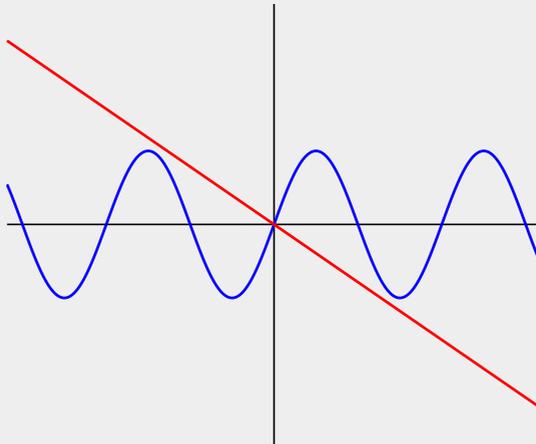


Nou te wè ke nou ka trase yon liy tanjant. Gen kèk sans kote liy tanjant lan pase nan yon pwen nan yon fonksyon yon fason ke li pa koupe fonksyon an nan pwen sa a. Men, nou dwe fè atansyon.

An n pran yon ti moman pou nou reflechi sou ki sa liy tanjant yo pa ye. Anvan sa, an n kòmanse ak yon **move** fason pou n reflechi sou liy tanjant lan. Lè yo te premye prezante liy tanjant pou yon sèk, anpil elèv te aprann ke yon liy tanjant se "yon liy ki touche koub la nan yon sèl pwen." Sa a se vre si koub ou a se yon sèk, men pou anpil lòt koub ak fonksyon, sa a se yon definisyon **terib**. An n wè pou ki sa.

#### Pwoblèm 16: Entèseksyon inik

Men graf yon koub sinizoyidal. Men yon liy ki sèlman kwaze graf la nan yon sèl pwen.

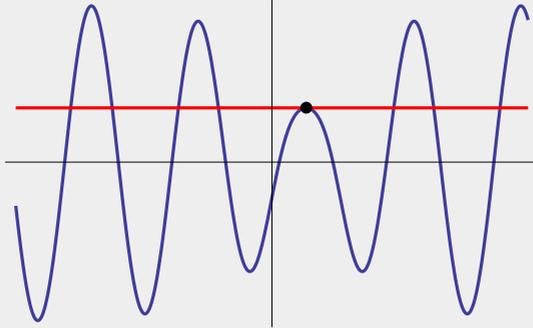


Èske sa se yon liy tanjant?

- (A) wi  (B) non  (C) petèt

### Pwoblèm 17: Entèseksyon nan lenfni

Men yon graf yon koub sinis modifiye, ak yon liy ki kwaze graf la nan yon kantite pwen enfini.

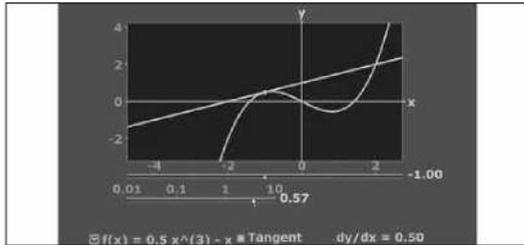


Èske dwat la tanjant ak graf la nan pwen ki make la?

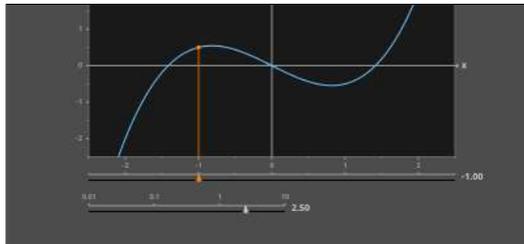
- (A) wi    (B) non    (C) petèt

## 4. Entwisyon pou liy tanjant yo

### Videyo

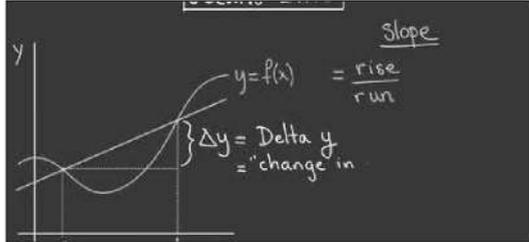


### Mathlet



## 5. Liy sekant

 Videyo



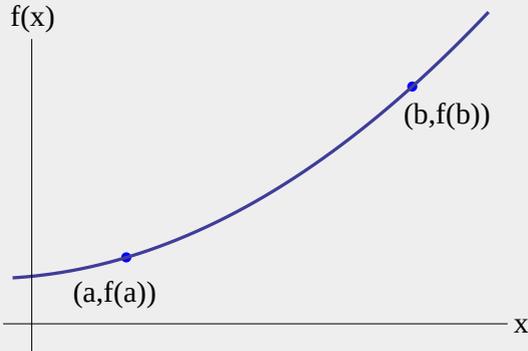
## 6. To varyasyon mwayèn ak pant sekant

**Pwoblèm 18: To varyasyon mwayèn**

Nou vle entwodui ladan l graf fonksyon  $f$  la, epi nou vle konekte l ak derive a ak to varyasyon an. An n sonje kote nou te ye:

To varyasyon mwayèn yon fonksyon  $f$  ant  $x = a$  ak  $x = b$  ki fòmil ki pèmèt nou jwenn li?



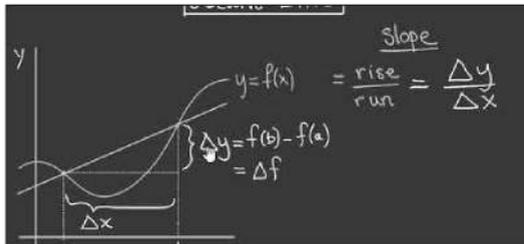
**Pwoblèm 19: To varyasyon mwayèn, jewometrikman**

Sou graf  $f$  la,  $x = a$  ak  $x = b$  yo koresponn ak  $(a, f(a))$  epi  $(b, f(b))$ . Kiyès nan kantite sa yo to varyasyon mwayèn  $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$  la reprezante?

- A Distans vètikal  $\Delta y$  (diferans nan wotè  $a$ ) ant de pwen yo.
- B Distans orizontal  $\Delta x$  ant de pwen yo.
- C Distans global  $\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}$  ant de pwen yo
- D Pant liy sekant ki relye de pwen yo.
- E Ang ant liy ki relye de pwen yo ak aks  $x$ .  F Okenn nan sa yo.

**7. Pant liy sekant yo**

 Videyo

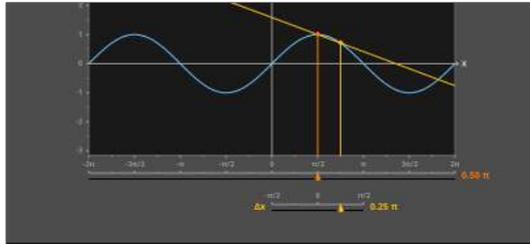


## 8. Sekant ak liy tanjant yo

Koulye a, lè nou defini derive  $f$  la nan  $a$ ,  $f'(a)$ , nou te pran limit  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$  pandan  $b$  ap pwoche  $a$ . Nou te jis wè valè sa a se pant liy sekant ki relye pwen  $(a, f(a))$  ak  $(b, f(b))$ .

Kidonk, ki sa limit liy sekant lan ye pandan  $b$  ap pwoche  $a$ ? Remake byen ke lè  $n$  ap gade  $b$  k ap pwoche  $a$  se menm bagay ak gade sa  $k$  ap pase pandan  $\Delta x$  ap pwoche 0.

 Mathlet

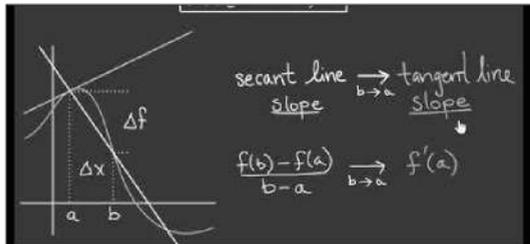


Enstriksyon: Chwazi yon pwen  $a$  sèvi avèk kisè orizontal ki anba graf la. Kòmanse avèk  $\Delta x = \pi/2$ . Jwe ak deplasman pwen an  $\Delta x$  toupre 0 epi obsève kijan liy lan chanje. Ou ka eseye chanje fonksyon an ak meni deroulan fonksyon, epi chanje pwen fiks  $a$ .

**Teknik pou reflechi sou sa:** Ki sa  $k$  ap pase liy sekant lan pandan  $\Delta x$  ap pwoche 0? Ki relasyon ki genyen ant liy sekant lan ak liy tanjant lan?

## 9. Limit liy sekant yo

 Vidéo



## 10. Revizyon

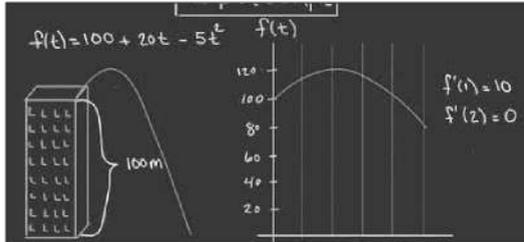
### Pwoblèm 20: Revizyon

Kiyès nan sa yo ki se derive  $f'(a)$  lan? (Chwazi tout opsyon ki mache yo.)

- A Yon to varyasyon mwayèn    B Yon to varyasyon enstantane
- C Yon liy sekant    D Yon liy tanjant    E Pant yon liy sekant
- F Pant yon liy tanjant

## 11. Egzanp

 Videyo



## 12. Estimasyon derive yo

### Pwoblèm 21: Estimasyon derive yo

Men graf yon fonksyon  $g$ .



Èske pant liy tanjant lan nan  $x = 1$  pozitif, negatif, oswa zewo?

- || (A) pozitif (B) negatif (C) zewo

### Pwoblèm 22: Estimasyon derive yo

Jwenn bon estimasyon pou derive sa yo nan pwen yo ba nou yo.



$g'(-1) \approx$

- || (A) 2 (B) 1 (C) 0.5 (D) 0 (E) -0.5 (F) -1 (G) -2

$g'(0) \approx$

- || (A) 2 (B) 1 (C) 0.5 (D) 0 (E) -0.5 (F) -1 (G) -2

$g'(1) \approx$

- || (A) 2 (B) 1 (C) 0.5 (D) 0 (E) -0.5 (F) -1 (G) -2

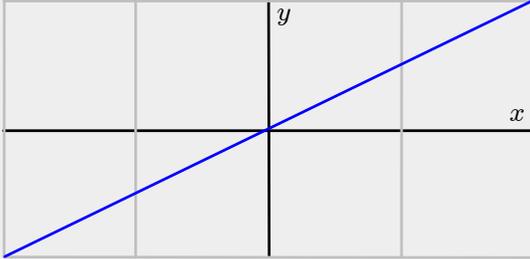
$g'(2) \approx$

- || (A) 2 (B) 1 (C) 0.5 (D) 0 (E) -0.5 (F) -1 (G) -2

### 13. fonksyon lineyè

#### Pwoblèm 23: Liy sekant yon liy

Ki sa k ap pase si graf  $f$  la se yon liy? Pa egzanp, sa se yon liy ki gen pant  $1/2$ .



Si nou pran de pwen sou liy sa a, kisa pant liy sekant ki relye yo a ye?



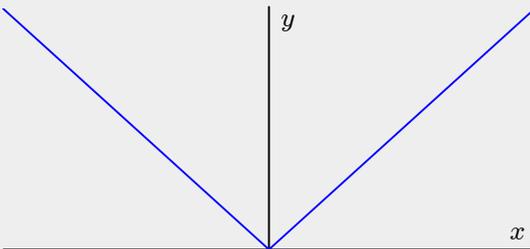
Ki sa  $f'(3)$  bay?



### 14. Lè liy tanjant lan pa egziste

Pant liy tanjant lan, ke yo rele derive a, SÈLMAN egziste si liy tanjant lan egziste! An n eksplòre kèk ka kote liy tanjant la (e pa konsekan derive a) pa egziste.

#### Pwoblèm 24: Valè absoli

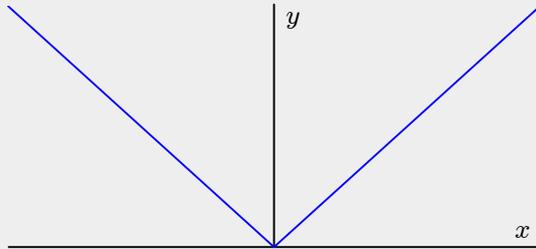


Men graf fonksyon valè absoli  $f(x) = |x|$ . Èske graf la ap vin deplizanpli sanble pi ak yon liy pandan w ap zoume nan direksyon orijin nan?

- Ⓐ wi   Ⓑ non   Ⓒ petèt

**Pwoblèm 25: Limit a-dwat ak a-gòch**

Detèmine limit a-dwat ak limit a-goch pant liy sekant yo nan orijin nan.

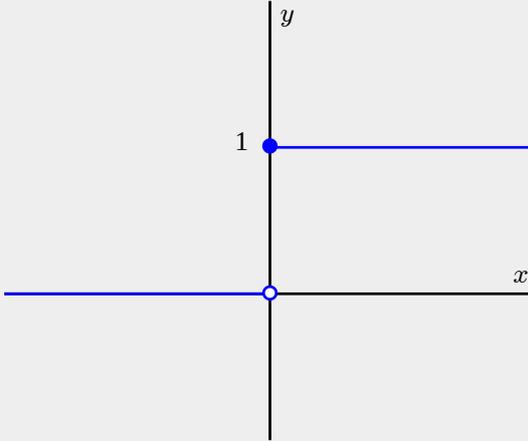


$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{|x| - 0}{x - 0} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{|x| - 0}{x - 0} =$$

**Pwoblèm 26: Diskontinite de So**

Ang yo pa sèlman pwen kote yon fonksyon ka pa diferansyab. Men graf yon fonksyon yo rele fonksyon eskalye.



A ki sa w panse graf la pral sanble si nou zoume sou pwen  $(0,1)$  an?

- (A) Yon liy
- (B) Yon pwen
- (C) Yon reyon
- (D) Yon lòt bagay

**Pwoblèm 27: Kiyès ki vrè?**

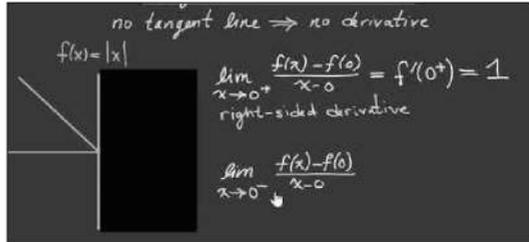
Kiyès nan deklarasyon sa yo ki vrè?

- (A) Si  $f$  pa kontini nan  $x = a$ , lè sa  $f$  pa diferansyab nan  $a$ .
- (B) Si  $f$  kontini nan  $x = a$ , lè sa  $f$  diferansyab nan  $a$ .  (C) Tou de vrè.
- (D) Ni youn ni lòt pa vrè.

---

## 15. Rekapitilasyon

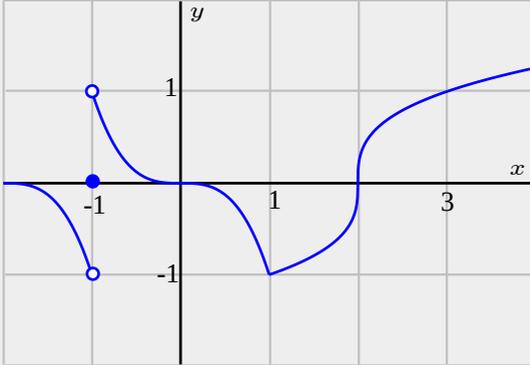
 Videyo



## 16. Plis estimasyon derive yo

### Pwoblèm 28: Plis estimasyon derive yo

Chak kesyon refere a graf yon fonksyon ki anba a. Nan chak pwen espesifik  $x_0$ , bay yon estimasyon pou  $f'(x_0)$  oswa di derive a *pa egziste*.



$f'(-1) \approx$



$f'(0) \approx$



$f'(1) \approx$



$f'(2) \approx$



$f'(3) \approx$



## 17. Ekwasyon yon liy tanjant

Kounye a nou ka reponn kesyon nou te poze nan kòmansman sekans aprantisaj la. Lè nou sèvi ak sa nou konnen sou kijan pou n jwenn derive a, nou ka detèmine ekwasyon yon liy tanjant.

**Pwoblèm 29: Detèmine pwen sou liy tanjant**

An n jwenn liy tanjant fonksyon  $j(x) = 2x^2 + 3x$  lan nan pwen  $x = 1$  an.

Nan ki pwen nou konnen otomatikman liy tanjant sa a pase?

(Antre pwen an kòm yon pè òdone: (a, b).)

**Pwoblèm 30: Jwenn pant liy tanjant lan**

Sèvi ak definisyon derive a pou kalkile pant liy tanjant graf  $j(x) = 2x^2 + 3x$  nan pwen  $x = 1$ .

**Pwoblèm 31: Jwenn pant liy tanjant lan**

Kounye a nou gen pant liy tanjant la, ak nan pwen ke li pase a, jwenn ekwasyon liy lan.

(Antre ekwasyon ou nan fòm  $y = m * x + b$ .)

$y =$  

---

**18. Kesyon revizyon****Pwoblèm 32: Kesyon revizyon 1**

Si li egziste, derive yon fonksyon nan yon pwen se yon \_\_\_\_\_ .

- (A) Nonb    (B) Liy    (C) Pwen    (D) Fonksyon

**Pwoblèm 33: Kesyon revizyon 2**

Vrè oubyen fo: Si  $f$  kontini nan  $x = a$ , Lè sa a, li dwe diferansyab la.

- (A) Vrè    (B) Fo

**Pwoblèm 34: Kesyon revizyon 3**

Vrè ou fo: Yon liy tanjant kapab entèsekte yon graf  $f$  sèlman nan yon pwen.

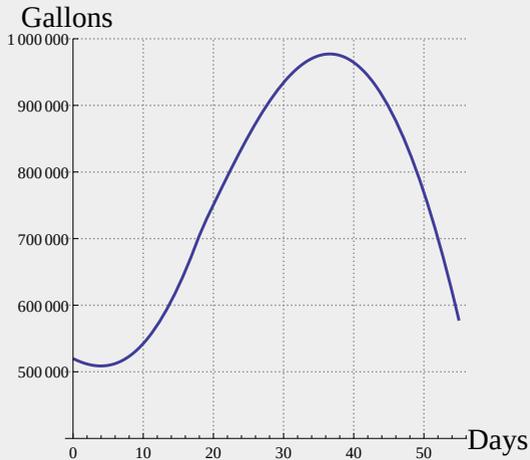
- (A) Vrè    (B) Fo

**Pwoblèm 35: Kesyon revizyon 4**

Vrè ou fo: Yon liy tanjant parapò ak graf  $f$  nan  $(a, f(a))$  kapab travèse graf  $f$  la nan pwen sa a.

- (A) Vrè    (B) Fo

**Pwoblèm 36: Kesyon revizyon 5**



Men yon graf sou volim dlo nan yon gwo chato dlo pandan yon ete. Estime to varyasyon enstantane volim nan parapò ak tan nan jou 10, e nan 40 jou. Pa bliye inite w yo!

Jou 10: To varyasyon enstantane a se



- (A) galon
- (B) jou
- (C) galon pa jou
- (D) jou pa galon

Jou 40: To varyasyon enstantane a se



- (A) galon
- (B) jou
- (C) galon pa jou
- (D) jou pa galon

**Pwoblèm 37: Kesyon revizyon 6**

Sipoze ke graf  $f$  la gen yon liy tanjant nan  $x = 3$ . Liy tanjant sa a gen ekwasyon  $y = -2x + 1$ . Ki sa  $f(3)$  bay? Ki sa  $f'(3)$  bay?

$$f(3) = \text{[input field]}$$

$$f'(3) = \text{[input field]}$$

**19. Rezime****Liy sekant**

**Liy sekant** yon fonksyon  $f(x)$  sou yon entèval  $a \leq x \leq b$ , se liy ki pase nan pwen  $(a, f(a))$  ak  $(b, f(b))$  yo.

- Pant yon liy sekant se  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ , ki se to varyasyon mwayen fonksyon  $f(x)$  la sou entèval  $a \leq x \leq b$ .
- Ekwasyon pou liy sekant lan se  $y = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) + f(a)$ .

**Liy tanjant**

**Liy tanjant** yon fonksyon  $f(x)$  nan pwen  $x = a$  se liy ki pase nan pwen  $(a, f(a))$ , epi pant li se to varyasyon enstantane fonksyon  $f(x)$  nan pwen  $x = a$ . Pant sa a se pant liy ou jwenn lan lè n imajine nou zoume sou fonksyon an jiskaske li sanble ak yon liy.

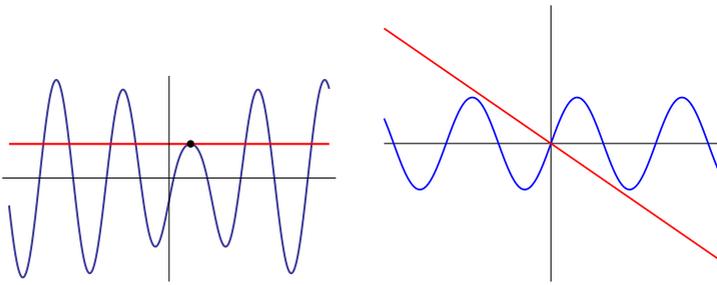
- Pant liy tanjant lan se  $f'(a)$ .
- Ekwasyon pou liy tanjant lan se  $y = f'(a)(x - a) + f(a)$ .

**Pwopriyete liy tanjant yo**

Si derive yon fonksyon  $f(x)$  egziste nan  $x = a$ , lè sa a liy tanjant lan egziste. Liy tanjant la ka egziste menm si derive a pa defini nan  $x = a$ . (Egzanp  $f(x) = \sqrt[3]{x}$  gen yon liy tanjant vètikal nan  $x = 0$ .)

**Ki sa ki yon liy tanjant ye ak sa li pa ye**

Lè yo prezante liy tanjant pou sèk yo, anpil elèv aprann ke yon tanjant se "yon liy ki touche koub la nan yon sèl pwen." Sa a se vre si koub ou a se yon sèk, men pou anpil lòt koub ak fonksyon, sa a se yon **terib** definisyon. Gade egzanp ki anba yo.



## Solisyon yo

### Pwoblèm 18: To varyasyon mwayèn

Nou jwenn to varyasyon mwayèn nan alèd varyasyon  $f$  la divize pa varyasyon  $x$  la. Ki donk, se poutèt sa li se  $\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ .

### Pwoblèm 19: To varyasyon mwayèn, jewometrikman

Gade pwochen videyo a pou solisyon an.

D

### Pwoblèm 20: Revizyon

Ou ka regade videyo anvan an ankò si ou gen difikilte ak pwoblèm sa a.

### Pwoblèm 21: Estimasyon derive yo

Pant lan negatif! Sa vle di derive a,  $g'(1)$  ta dwe negatif tou.

B negatif

### Pwoblèm 22: Estimasyon derive yo

Nou konnen ke derive a se pant liy tanjant lan. Se konsa, lè n enspekte vizyèlman graf la, nou wè ke  $g'(-1)$  apwoksimativman egal 2,  $g'(0)$  egal 0,  $g'(1)$  egal -1, epi  $g'(2)$  egal 0.

A 2

D 0

F -1

D 0

### Pwoblèm 23: Liy sekant yon liy

Liy sekant lan pral egal ak pwòp tèt li ankò! Ki donk pant li se pral toujou  $1/2$ .

Note ke si nou pran yon limit liy sekant pandan  $b$  ap pwoche  $a$ , nou pral jwenn ke liy tanjant lan nan  $a$  se pral pwòp tèt li ankò! Liy tanjant lan nan nenpòt pwen, ki gen ladan  $1/3$  a tou, gen yon pant  $1/2$ .

.5, .5

**Pwoblèm 24: Valè absoli**

Non, si nou f on zoom sou li, li sanble yon ang, men se pa yon liy. Ki donk sa se yon egzanp yon graf ki pa gen yon liy tanjant nan pwen sa a. Plis jeneralman, si ou genyen nenpòt kalite "kwen" nan graf ou a, ou p ap gen yon liy tanjant. Si liy tanjant lan pa egziste, liy tanjant lan pa gen pant. Sa vle di ke  $f'$  pa egziste nan pwen sa a! - si ou gade limit ki defini derive a, li p ap egziste.

Ⓑ non

**Pwoblèm 25: Limit a-dwat ak a-gòch**

Nan egzanp sa a, limit a-dwat pant liy sekant yo egal a 1. Men limit a-goch lan se -1. Akoz de limit sa yo ki pa egal la, limit global la pa egziste. Pwiske derive a s limit global la, se pa jis limit a-dwat oswa limit a-goch, derive a tou pa egziste la a.

Pwiske  $f'(0)$  pa egziste, nou di ke  $f$  pa diferansyab nan  $x = 0$ .

1, -1

**Pwoblèm 26: Diskontinite de So**

Nou jwenn yon reyon si nou zoume l, ki pa yon liy. Teknikman, pa gen liy tanjant la a, e ankò,  $f$  pa diferansyab nan pwen sa a. Zoume sou nan pwen an epi gade a ki sa l sanble!

Ⓒ Yon reyon

**Pwoblèm 27: Kiyès ki vrè?**

Si yon fonksyon gen yon diskontinite nan yon pwen, lè sa li p ap ka gen yon liy tanjant e ki donk li p ap ka diferansyab. Sepandan, menm si li kontini, li ta ka pa diferansyab - pa egzanp, li ta ka kontini men gen yon ang, nan ka sa a li pa gen yon liy tanjant.

Ⓐ

**Pwoblèm 28: Plis estimasyon derive yo**

- Nan pwen  $-1$ , gen yon diskontinite de so, ki donk pa gen derive la a.
- Nan  $0$ , gen yon liy tanjant orizontal, ki donk derive a  $0$ .
- Nan  $1$  gen yon ang ki donk pa gen derive la.
- Nan  $2$  gen yon liy tanjant vètikal, ki donk derive a pa egziste.
- Nan  $x = 3$  Mwen ka imajine trase yon liy atravè pwen ki travèse liy kadriyaj yo. Ogmantasyon an ap sanble apeprè  $1/3$  nan kous la, ki donk nou devine li se apeprè  $1/3$ . Nenpòt estimasyon ant .2 ak .4 ap akseptè.

$DNE, 0, DNE, DNE, \frac{1}{3}$

**Pwoblèm 29: Detèmine pwen sou liy tanjant**

Nou konnen ke li dwe pase nan  $(1, j(1))$  sou graf  $j$  a. Lè n entwodui valè 1 nan ekwasyon an pou  $j$ , nou jwenn  $j(1) = 5$ .

**Pwoblèm 30: Jwenn pant liy tanjant lan**

Pou jwenn pant liy tanjant lan nan pwen  $x = 1$ , nou evalye derive a  $j'(1)$  pandan n ap sèvi avèk definisyon an:

$$j'(1) = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{j(b) - j(1)}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{(2b^2 + 3b) - 5}{b - 1} = \lim_{b \rightarrow 1} \frac{(b - 1)(2b + 5)}{b - 1} =$$

Se poutèt sa, pant liy tanjant lan se 7.

Tcheke si sa parèt byen lè w trase  $j$  ak yon kalkilatris grafik (tankou [desmos](#)).

7

**Pwoblèm 31: Jwenn pant liy tanjant lan**

Nou konnen ke liy tanjant lan gen yon ekwasyon nan fòm  $y - y_0 = m(x - x_0)$ . Nou jwenn yon pwen sou liy  $(x_0, y_0) = (1, 5)$ , ak pant liy tanjant lan  $m = 7$ , ki donk ekwasyon an se  $y - 5 = 7(x - 1)$ . Senplifye nan fòm  $y = mx + b$  lan nou jwenn  $y = 7x - 2$ .

**Pwoblèm 32: Kesyon revizyon 1**

Derive nan yon pwen gen rapò ak liy tanjant nan pwen sa a, men se pa liy lan li menm - se pant liy lan. Sa se yon nonb.

Ⓐ Nonb

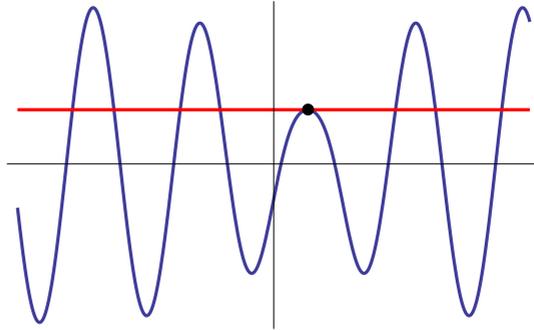
**Pwoblèm 33: Kesyon revizyon 2**

Fo. Nou te wè ke si yon graf gen yon "ang", lè sa a li kontini men li pa gen yon derive nan pwen sa a.

Ⓑ Fo

**Pwoblèm 34: Kesyon revizyon 3**

Fo. Sonje imaj sa a ak yon liy tanjant ki touche yon kantite pwen enfini.



(B) Fo

**Pwoblèm 35: Kesyon revizyon 4**

Vrè.

An n konsidere graf  $y = x^3 + 3$ , ak liy tanjant nan  $(0, 3)$ , ki gen pant zewo epi ki travèse graf la.

(A) Vrè

**Pwoblèm 36: Kesyon revizyon 5**

Pant liy tanjant lan nan  $x = a$  se to varyasyon enstantane  $f$  la nan pwen  $x = a$ .

(C) galon pa jou

(C) galon pa jou

11600, -7520

**Pwoblèm 37: Kesyon revizyon 6**

Valè fonksyon an nan 3 se menm bagay ak valè liy tanjant lan nan  $x = 3$ , ki se  $y = (-2)(3) + 1 = -5$ . Valè derive a nan 3 se menm valè ak pant liy tanjant lan, ki se -2.

-5, -2

---

# Derive a kòm yon fonksyon

---

## 1. Derive a kòm yon fonksyon: Entwisyon grafik

 Videyo




---

## 2. Objektif

- To varyasyon enstantane
- Pant liy tanjant lan nan yon pwen
- [Yon fonksyon](#)

### Objektif

Nan fen videyo sa, epi aprè kèk ti pratik, ou ta sipoze kapab:

- Konprann diferans ki genyen ant yon **derive nan yon pwen** ak **derive a kòm yon fonksyon**.
- Korele graf  $f$  la sou entèval valè pozitif ak negatif derive a.
- Kapab **eskise (trase) graf  $f'$**  lè yo ba w graf fonksyon  $f$ .

---

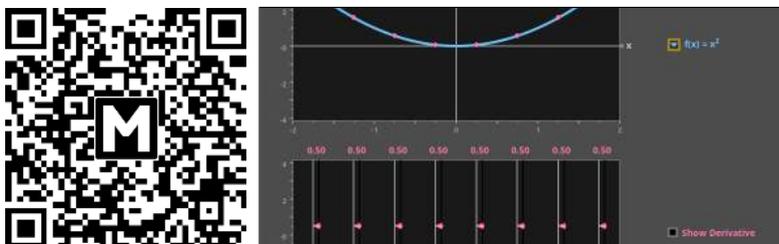
## 3. Liy Tanjant nan chak pwen

Nan kalkil (analiz), nou souvan panse fonksyon an ak graf li yo se menm objè a. Se kon sa, pou etidye fonksyon yo, nou souvan etidye graf yo.

Nan dènye segman an, nou te aprann ke derive nan yon pwen se pant liy tanjant graf ki pase nan pwen sa a. Men, lè graf nou an bèl epi li lis, san okenn diskontinite, kwen, oswa lòt konpòtman etranj, nou ka jwenn pant liy tanjant la nan nenpòt ki pwen.

Sèvi ak "aplèt" fonksyon derive ki anba a pou fè apwoksimasyon derive a pandan w ap sèvi avèk apwoksimasyon liy tanjant nan tout pwen ki make ak kisè ki anba a. Èske w remake kèk tandans? Peze bouton "Montre derive" pou w afiche valè reyèl yo o nivo kisè yo, osi byen ke pou chak pwen entèmedyè.

 Mathlet



Sèvi ak meni dewoulan an pou chwazi diferan fonksyon. Jwenn derive yo, wè ki kalite modèl ki parèt!

**Pwoblèm 38: Pant ki chita sou yon liy**

Pami fonksyon ki nan meni dewoulman matlèt la, kiyès nan fonksyon yo ki gen yon fonksyon derive ki sanble ak yon liy?

(Kwoche tout repons ki ap aplike.)

- A  $f(x) = x^2$     B  $f(x) = -0.5x$     C  $f(x) = 0.5x^3 - x$   
 D  $f(x) = \ln(x)$     E  $f(x) = e^x$

**Pwoblèm 39: Derive konstan**

Kilès nan fonksyon ki nan meni dewoulman sou matlèt la ki gen yon derive konstan?

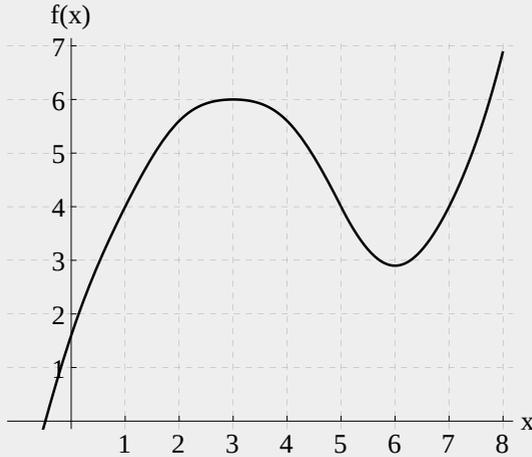
(Kwoche tout repons ki ap aplike.)

- A  $f(x) = x^2$     B  $f(x) = -0.5x$     C  $f(x) = 0.5x^3 - x$   
 D  $f(x) = \ln(x)$     E  $f(x) = e^x$

## 4. Kòmansman egzanj lan

### Pwoblèm 40: Derive a nan 0

Men graf yon fonksyon tipik  $f$ . An n kòmanse reflechi sou ki sa graf  $f'$  ka sanble.

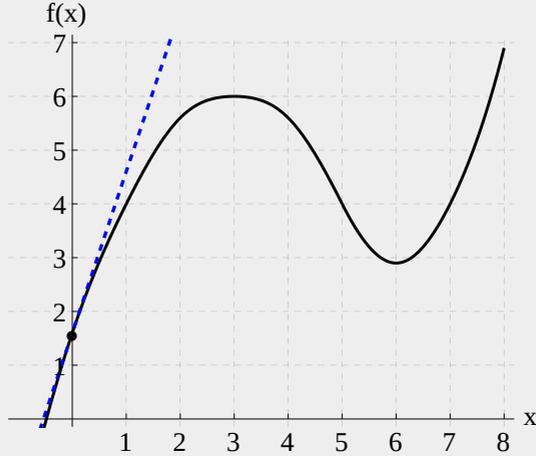


Ki sa ki ta pi bon estimasyon pou  $f'(0)$ ?

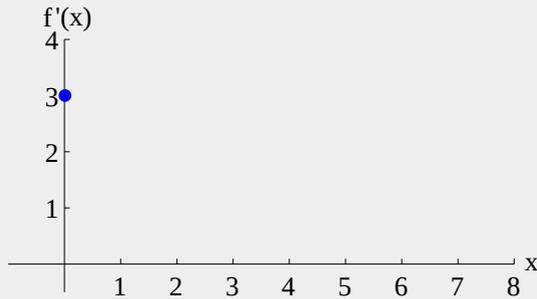
- A 3    B 0.5    C 0    D -0.5    E -3

## 5. Egzanp kontinyasyon

### Pwoblèm 41: Entèpretasyon derive a nan 1



Si nou estime ke  $f'(0) = 3$ , sa vle di ke nou ta dwe trase pwen  $(0, 3)$  sou graf  $f'$  lan.



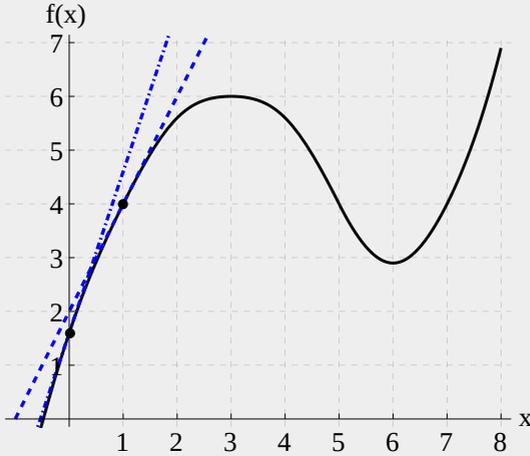
Pwen sa a ki sou graf  $f'$  reprezante pant liy tanjan ki koresponn ak graf  $f$ .

An n gade kounye a  $f'(1)$ . Kiyès nan sa yo ki vrè pou  $f'(1)$ ?

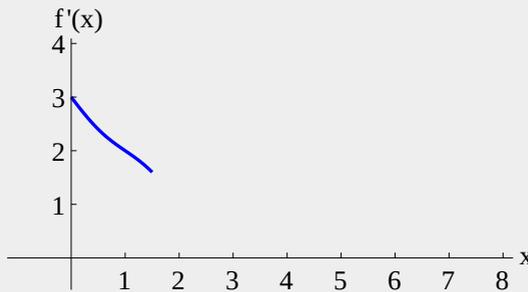
- A Siperyè ak  $f'(0)$   
  B Egal ak  $f'(0)$   
 C Enferyè ak  $f'(0)$  men li toujou pozitif  
  D Zewo  
  E Negatif

## 6. Egzanp kontinyasyon, pati 2

Pwoblèm 42: Ki lè derive a egal a zewo?



Liy tanjant lan sou graf  $f$  la nan  $x = 1$  li pa osi apik kòm liy tanjant nan  $x = 0$ . Pa konsekan  $f'(1)$  pi piti pase  $f'(0)$ . Grafik  $f'$  nou an pral desann konsa:

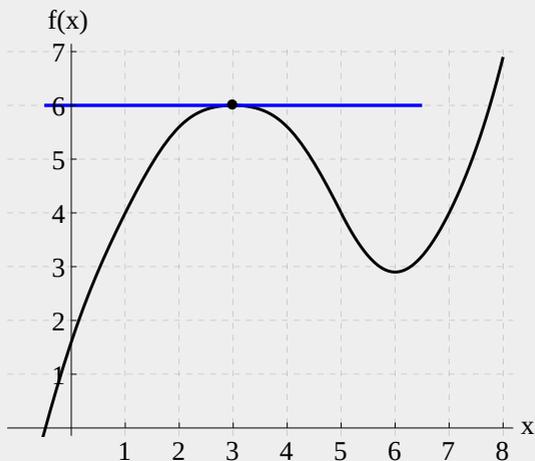


Ki kote, si sa ta rive,  $f'$  pral vin egal zewo pou la premye fwa? Antre nonb lan.

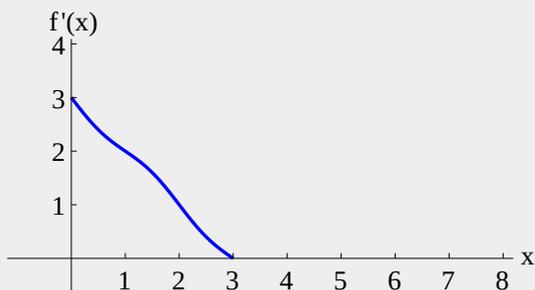
$f'$  egal zewo premye fwa nan  $x =$

## 7. Egzanp kontinyasyon, pati 3

### Pwoblèm 43: Pi lwen pase derive nan yon pwen

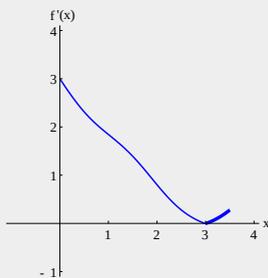


Nou konnen ke  $f'(3) = 0$  akòz liy tanjant orizontal la nan  $x = 3$ . Ki donk  $f'$  vin piti piti jiskaske l vin egal a zewo nan  $x = 3$ .



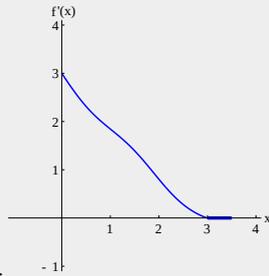
Kilès nan foto sa yo ki pi byen montre graf  $f'$  la lè  $x$  pase a 3?

A



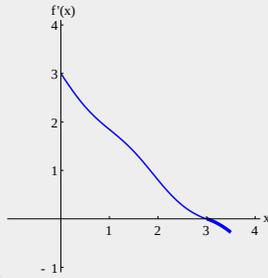
Li remonte:

**B**



Li rete zewo:

**C**

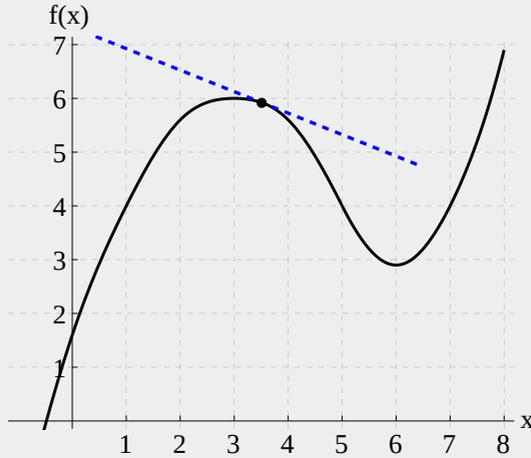


Li kontinye desann:

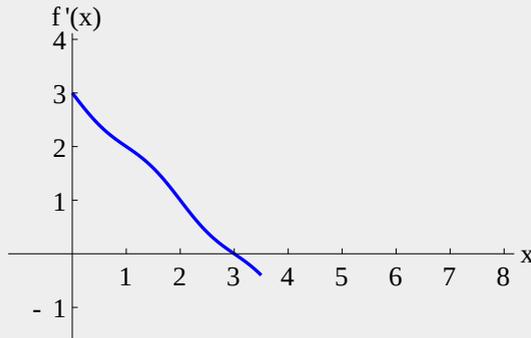
**D** Okenn ladan yo

## 8. Egzanp kontinyasyon, pati 4

### Pwoblèm 44: Deplizanpli negatif?



Nou remake ke  $f'$  vin negatif lè  $x$  pase  $x = 3$  - li y tanjant graf  $f$  la gen yon pant negatif. Ki donk graf  $f'$  la ta dwe sanble ak sa a:

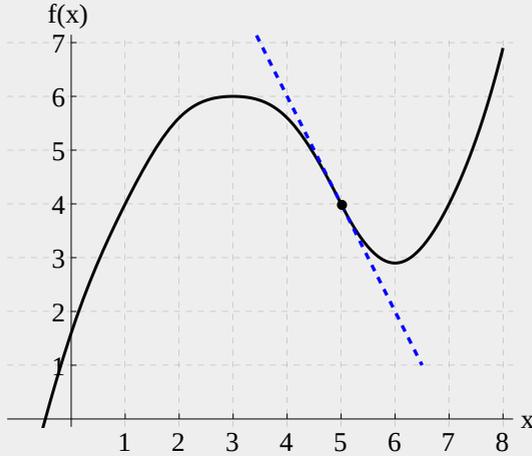


Nan ki pwen  $f'$  lan vin plis negatif?

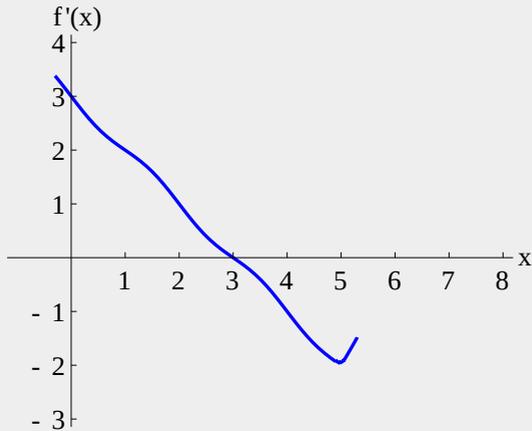
- A Pwòch  $x = 3$   
  B Pwòch  $x = 4$   
  C Pwòch  $x = 5$   
  D Pwòch  $x = 6$   
 E Pwòch  $x = 7$   
 F Pa gen okenn pwen kote li pi negatif

## 9. Egzanp finisyon

### Pwoblèm 45: Fini egzanp lan



Pi gwo pant negatif yon liy tanjant pwodui lè  $x = 5$ . Graf  $f'$  la atenn valè ki pi negatif li nan pwen sa a.

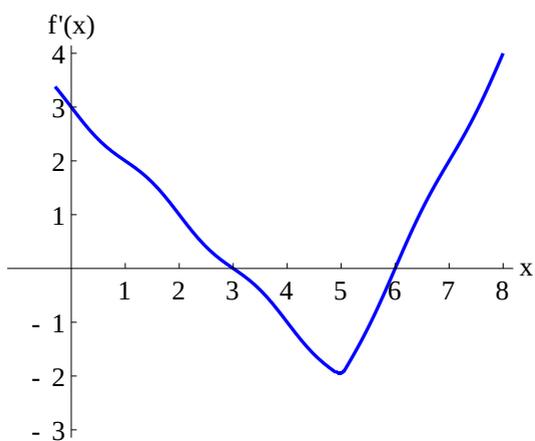
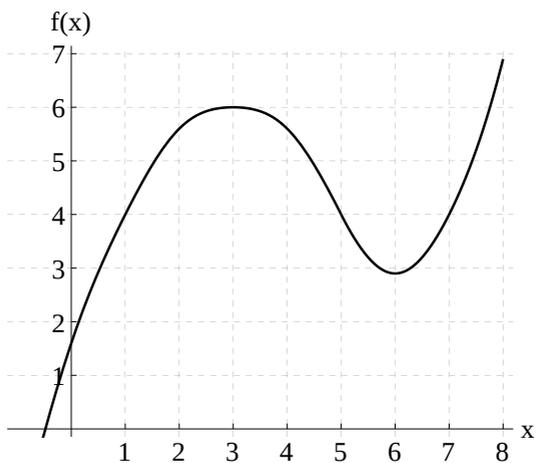
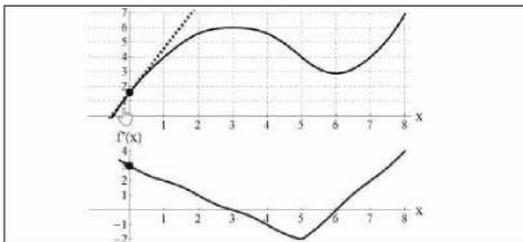


Ki sa k ap pase  $f'$  tou pre  $x = 6$ ?

- A  $f'(6)$  toujou negatif     B  $f'(6)=0$ , lè sa a  $f'(x)$  vin pozitif lè  $x>6$   
 C  $f'(6)=0$ , lè sa a  $f'(x)$  vin negatif lè  $x>6$      D  $f'(6)$  pa defini  
 E Okenn nan sa yo

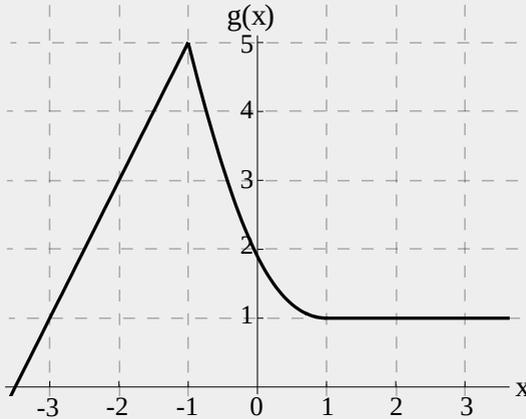
## 10. Graf derive a

 Videyo



## 11. Yon dezyèm egzanp

### Pwoblèm 46: Valè inisyal



Ki sa  $g'(-3)$  bay?

- A 2    B 1    C 0.5    D 0    E -0.5    F -1    G -2    H Li pa egziste

### Pwoblèm 47: Premye pati

Ki sa  $g'$  fè lè  $-3 < x < -1$ ?

- A Kwasan pandan  $x$  ap soti a-goch pou ale a-dwat  
 B Dekwasan pandan  $x$  ap soti a-goch pou ale a-dwat    C Rete konstan

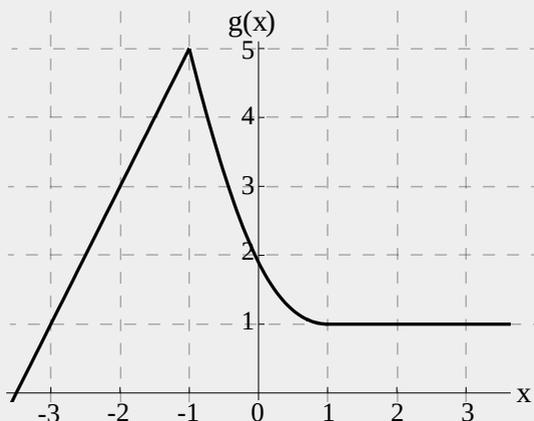
### Pwoblèm 48: Evalye ak valè mwens 1

Kiyès nan opsyon sa yo ki dekri  $g'(-1)$ ?

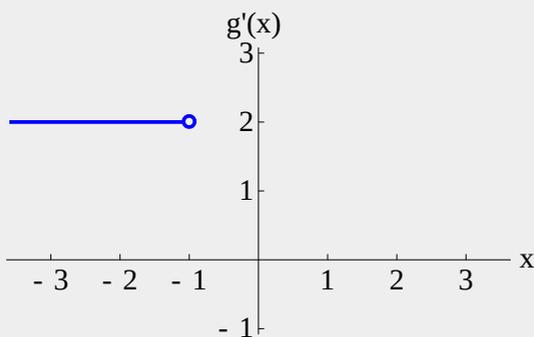
- A Li pozitif    B Li negatif    C Li egal a zewo  
 D Li egal ak tou de pozitif ak negatif    E Li pa egziste

## 12. Dezyèm pati

### Pwoblèm 49: Dezyèm pati



Lè  $x < -1$ ,  $g'(x) = 2$ , ki donk graf  $g'$  la se yon liy orizontal. Nou itilize yon sèk ouvri pou endike lefèt ke  $g'(-1)$  pa egziste akòz "kwen" ki nan graf  $g$ . Pwen  $(-1, 2)$  a pa sou graf  $g'$  lan.



Kiyès nan imaj sa yo ki pi byen reprezante graf  $g'(x)$  la sou entèval  $-3 < x < 1$ ?

**A**

**B**

**C**

**D**

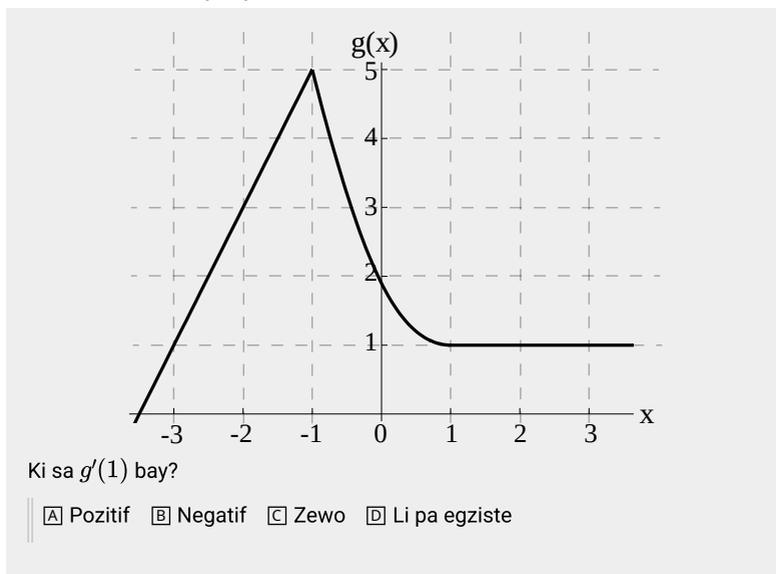
**E**

**F**

**G. Okenn ladan yo**

### 13. Plis derive toujou

#### Pwoblèm 50: Evalyasyon nan 1



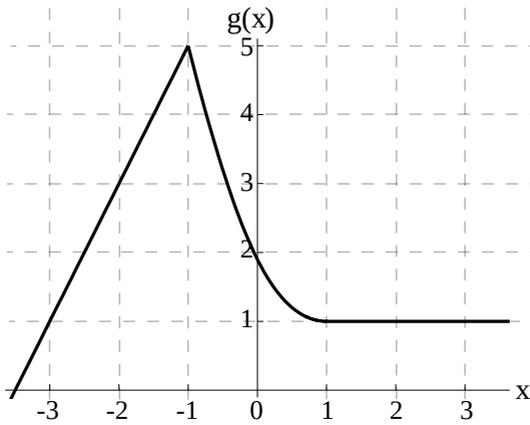
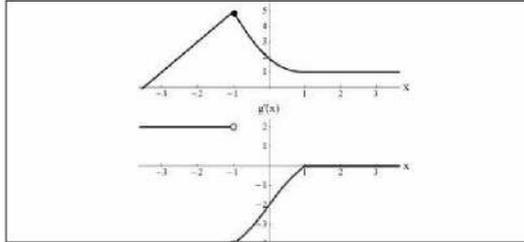
#### Pwoblèm 51: Twazyèm pati

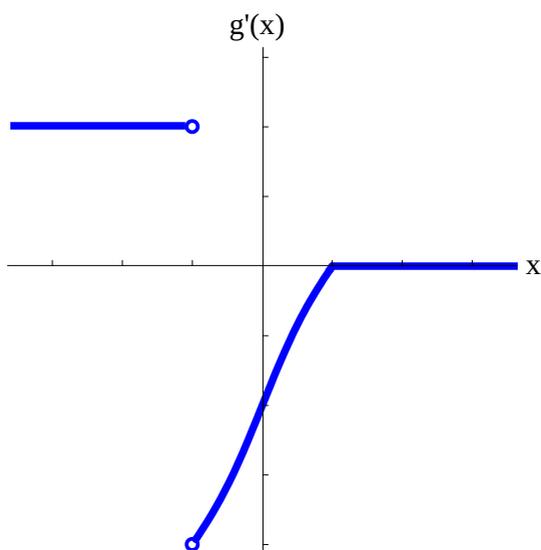
Ki sa ki pi byen dekri  $g'$  pou  $1 < x < 3$  ?

- A Li pozitif epi l ap kwat  B Li pozitif epi l ap dekwat
- C Li pozitif epi li konstan  D Li toujou egal a zewo  E Okenn ladan yo

## 14. Rezime egzanp 2

 Videyo





---

## 15. Kesyon Revizyon

### Pwoblèm 52: Kesyon Revizyon 1

Sipoze ke  $f$  diferansyab nan  $x = 3$ . Lè sa a  $f'(3)$  se yon . . .

- A Nonb  B Liy  C Pwen  D Fonksyon

### Pwoblèm 53: Kesyon Revizyon 2

Si  $f$  se yon fonksyon, lè sa a  $f'$  se yon . . .

- A Nonb  B Liy  C Pwen  D Fonksyon

**Pwoblèm 54: Kesyon Revizyon 3**

Graf fonksyon  $f(x)$  la lis (san okenn koubi oswa diskontinite) epi li ap diminye pandan  $n$  ap deplase soti a-goch pou ale a-dwat.

Pami deklarasyon (afimasyon) sa yo, chwazi sa k **dwe** vrè pou graf  $f'(x)$  la.

- A Konstan    B Dwat    C Desann    D Moute    E Anlè aks- $x$  la
- F Anba aks- $x$  la

**16. Plis pratik: Videyo travo pratik**

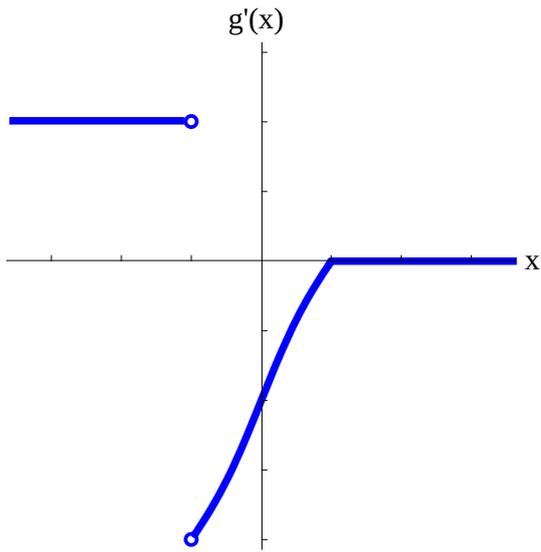
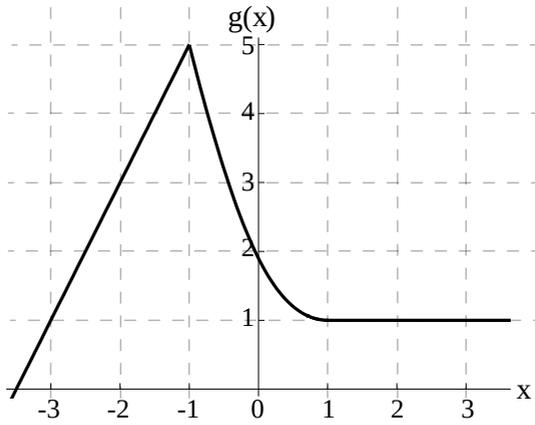
 Videyo

**17. Rezime****Rapèl liy sekant ak tanjant**

Nan kalkil (analiz), nou souvan panse fonksyon an ak graf li yo se menm objè a. Se kon sa, pou etidye fonksyon yo, nou souvan etidye graf yo.

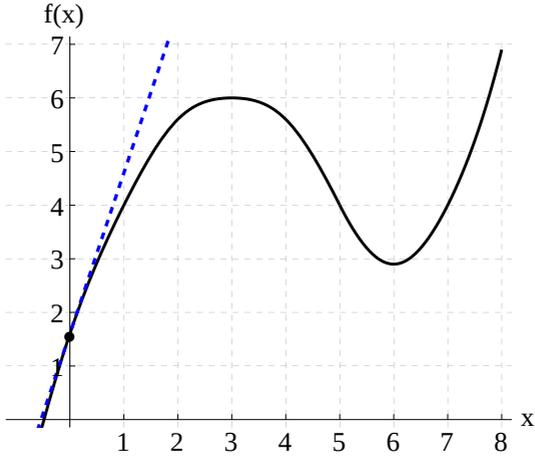
Nan dènye segman an, nou te aprann ke derive yon pwen se pant liy tanjant graf la ki pase nan pwen sa a. Men, lè graf nou an bèl epi li lis, san okenn diskontinite, kwen, oswa lòt konpòtman etranj, nou ka jwenn pant liy tanjant lan nan nenpòt ki pwen. Ki donk nou ka konsidere derive yon fonksyon kòm yon fonksyon.

**Egzanp: Grafik yon fonksyon ak grafik derive li yo**



**Solisyon yo****Pwoblèm 40: Derive a nan 0**

Liy tanjant graf  $f$  la nan pwen  $x = 0$  trase nan imaj anba sa a:

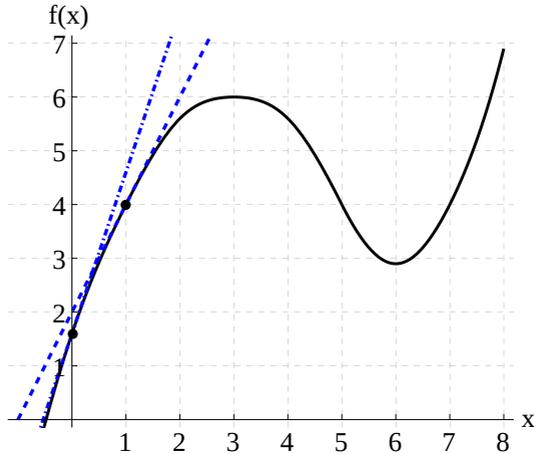


Nou ka wè ke pant li se apeprè 3.

A

**Pwoblèm 41: Entèpretasyon derive a nan 1**

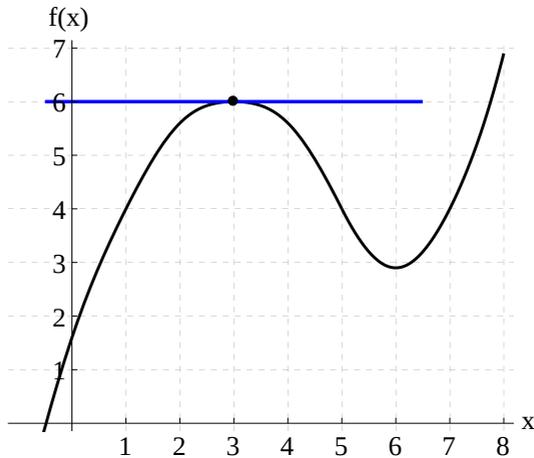
Si nou te vle konpare  $f'(0)$  ak  $f'(1)$ , nou ap bezwen konpare pant tanjant yo trase anba a:



Liy tanjant an pwen  $x = 0$  se liy tanjant nan  $x = 1$ . Liy tanjant an pwen  $x = 1$  gen yon pant pozitif, ki donk  $f'(1) > 0$ , men li pa osi apik ke liy tanjant ki pase nan  $x = 0$ , ki donk  $f'(1) < f'(0)$ .

**Pwoblèm 42: Ki lè derive a egal a zewo?**

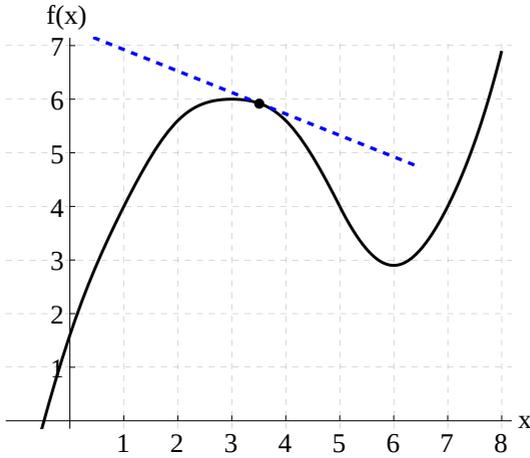
$f'(a) = 0$  Lè liy tanjant graf  $f$  la nan pwen  $x = a$  orizontal.



$x = 3$  se premye kote nou wè yon liy tanjant orizontal.

**Pwoblèm 43: Pi lwen pase derive nan yon pwen**

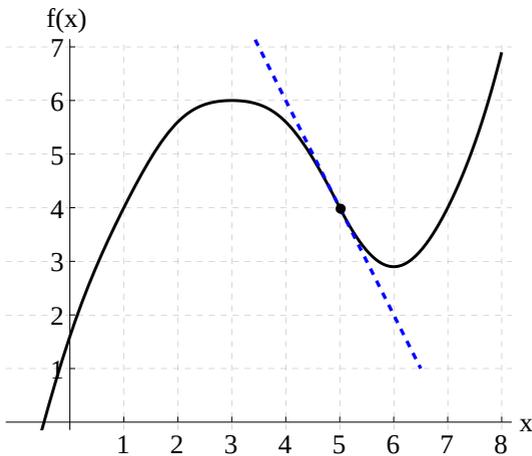
Liy tanjant graf  $f$  la lè  $x$  ale pi lwen pase 3 yo gen pant negatif:



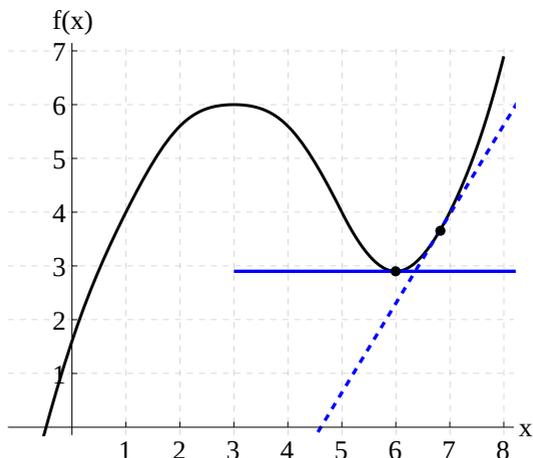
Ki donk, derive a dwe negatif epi graf derive a dwe anba aks  $x$  la.

**Pwoblèm 44: Deplizanpli negatif?**

N ap chèche liy tanjant ki gen pant negatif ki pi apik nan graf  $f$  la. Nou jwenn li nan foto sa a, tou pre  $x = 5$ :



**Pwoblèm 45: Fini egzanj lan**



Nou wè nan sa a ke liy tanjant lan nan  $x = 6$  (solid, an ble a) li orizontal. Ki donk  $f'(6) = 0$ . Lè  $x > 6$ , liy tanjant (an pweniyè, an ble a) gen yon pant pozitif, ki donk  $f'(x)$  li pozitif la a. Gade pwochen videyo a pou plis detay.

**B**

**Pwoblèm 46: Valè inisyal**

Pant liy tanjant lan nan  $-3$  a se 2.

**A**

**Pwoblèm 47: Premye pati**

Nan tout pwen ant  $x = -3$  ak  $x = -1$ , liy tanjant lan gen menm pant lan 2, kidonk  $g'(x)$  se toujou 2 nan entèval sa a.

**Pwoblèm 48: Evalye ak valè mwens 1**

Nou remake ke graf  $g$  a gen yon kwen nan  $x = -1$ , ki donk pa gen liy tanjant epi  $g'(-1)$  an pa defini. (Gen yon derive "sou men-goch" ki pozitif, ak yon derive "sou men-dwat" ki negatif, men derive global la pa egziste.)

**Pwoblèm 49: Dezyèm pati**

Nan seksyon  $-1 < x < 1$  an, tout liy tanjant sou graf  $g$  a gen pant yo negatif. Tou dabò (nan vwazinaj  $x = -1$ ) yo trè apik, ki donk pant lan relativman laj epi li negatif, konpare ak sa ki pi a dwat la (tou pre  $x = 1$ ) kote pant yo mwens apik (mwens rèd). Pandan  $x$  ap pwoche 1 a-gòch, liy tanjant yo ap rapwoche gradyèlman pou vin orizontal, ki donk  $g'(x)$  ta dwe trè pre zewo.

E

**Pwoblèm 50: Evalyasyon nan 1**

Gen yon liy tanjant sou graf  $g$  a nan  $x = 1$ , epi li orizontal. Ki donk  $g'(1) = 0$ .

**Pwoblèm 51: Twazyèm pati**

Liy tanjant graf  $g$  a nan nenpòt pwen a-dwat  $x = 1$  orizontal, ki donk derive nan nenpòt pwen sa yo ta dwe zewo.

**Pwoblèm 52: Kesyon Revizyon 1**

Derive nan yon pwen gen rapò ak liy tanjant nan pwen sa a, men se pa liy lan li menm - se pant liy lan. Ki donk li se yon nonb.

**Pwoblèm 53: Kesyon Revizyon 2**

Derivasyon global la pran kèk nonb  $a$  epi li pwodui rezilta  $f'(a)$  ki se nonb. Se poutèt sa, li se yon fonksyon. Li pa nesèsèman yon fonksyon lineyè, sepandan.

**Pwoblèm 54: Kesyon Revizyon 3**

Si graf  $f$  la toujou ap desann anba, lè sa a nenpòt liy tanjant ta dwe gen yon pant negatif. Ki donk  $f'$  ta dwe toujou negatif, oswa anba aks- $x$  la.

---

# Kalkil Derive yo

---

## 1. Kalkil derive yo

 Videyo



---

## 2. Objektif

Pant liy tanjant

Limit yo

[Fòmil yo](#)

**Objektif**

Nan fen sekans sa a, apre kèk ti antrènman, ou ta sipoze kapab:

- Jwenn **fòmil pou derive** fonksyon senp yo.
- Konnen ki lè pou w aplike **règ kalkil pwisans lan**.
- Aplike **linearite** nan konbinezon lineyè diferansyèl.

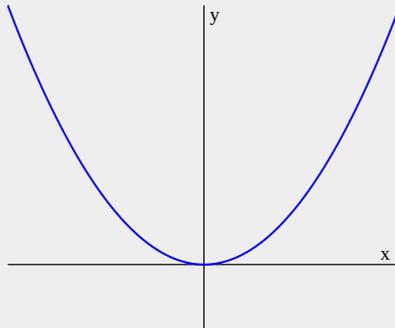
---

## 3. Derive dezyèm pwisans

Nan dènye sekans lan, ou te aprann ki jan pou w te eskise graf  $f'$  lè yo te ba w graf  $f$ . Koulye a nou ta renmen jwenn fòmil yo. Nou pral kòmanse ak kalkil derive  $f(x) = x^2$  la. Anvan nou fè sa, an n eseye antisipe ki sa  $f'$  ta ka sanble.

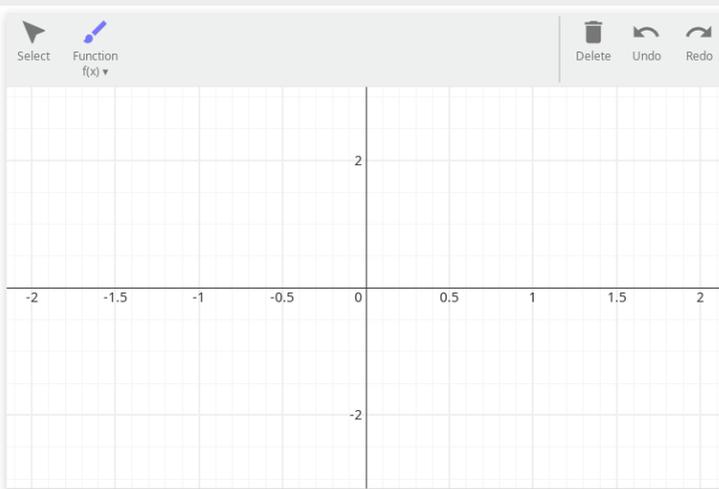
**Pwoblèm 55: Eskis graf derive**

Men grafik  $f(x) = x^2$ .



Itilize zouti ki anba yo pou w eskise sa w sispèk graf  $f'$  la sanble.

(Graf sa a sèlman bezwen korèk kalitatifman – valè aktyèl yo pa enpòtan la a. Ki kote graf derive a koupe aks-  $x$  la?)



**Pwoblèm 56: Definisyon derive a nan yon pwen**

Kounye a nou gen yon lide sou sa nou ta dwe jwenn, nou pral kalkile l egzakteman. An n fè yon ti rapèl sou definisyon derive a nan yon pwen  $f'(a)$ :

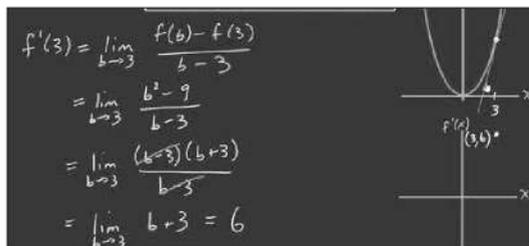
Definisyon derive a nan yon pwen  $x = 3$  se:

$$f'(3) = \lim_{b \rightarrow 3} \frac{f(b) - f(3)}{b - 3}.$$

Ranpli premye espas la:



Ranpli dezyèm espas la:

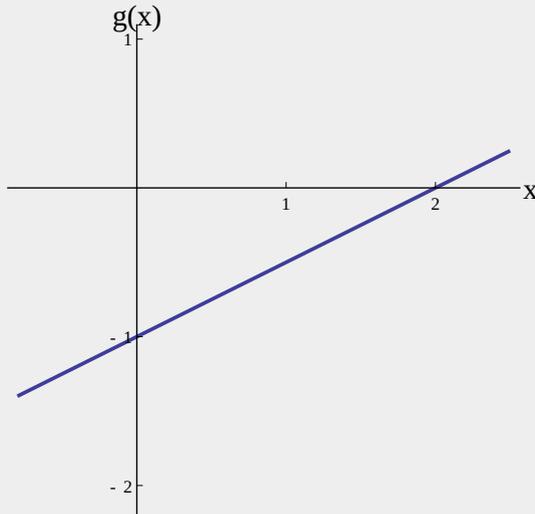
**Videyo****Pwoblèm 57: Yon ti revizyon byen rapid**

Ki sa pant liy tanjant parabol  $y = x^2$  la egal nan pwen  $P = (x, y) = (300, 90000)$ ?

## 4. Derive fonksyon lineyè yo

Pwoblèm 58: Ki sa n ap tann?

Ebyen swa  $g(x) = \frac{1}{2}x - 1$ , ki se liy sa a.

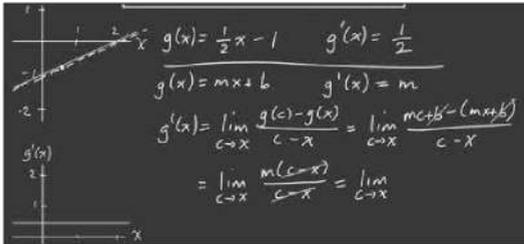


Ak ki sa ou panse grafik  $g'$  ta dwe sanble?

- A Menm liy ak grafik  $g$  la
- B Yon liy diferan, men ki gen menm pant avèk grafik  $g$  a
- C Yon liy orizontal ki pa egal zewo
- D Yon liy orizontal nan pwen zewo a
- E Yon liy vètikal
- F Okenn nan sa yo

 Videyo





$$g(x) = \frac{1}{2}x - 1 \quad g'(x) = \frac{1}{2}$$

$$g(x) = mx + b \quad g'(x) = m$$

$$g'(x) = \lim_{c \rightarrow x} \frac{g(c) - g(x)}{c - x} = \lim_{c \rightarrow x} \frac{mc + b - (mx + b)}{c - x}$$

$$= \lim_{c \rightarrow x} \frac{m(c - x)}{c - x} = \lim_{c \rightarrow x} m = m$$

**Pwoblèm 59: Revizyon rapid 1**

Sipoze ke  $f(t) = -30t - 3$ . Ki sa  $f'(t)$  bay?

$$f'(t) = \text{[input field with calculator icon]}$$

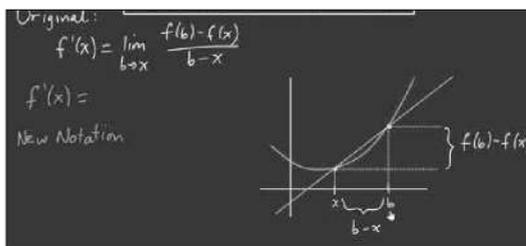
**Pwoblèm 60: Revizyon rapid 2**

Sipoze ke  $f(x) = -30\pi - 3$ . Ki sa  $f'(x)$  egal?

$$f'(x) = \text{[input field with calculator icon]}$$

**5. Definisyon dèlta**

 Videyo

**Pwoblèm 61: Limit Dèlta x**

Lòske  $b$  ap rapwoche pi pre  $x$ , ki sa  $\Delta x$  ap rapwoche pi pre de plizanpli?

$$\text{[input field with calculator icon]}$$

 Videyo


$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

New Notation

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\frac{x - (x+\Delta x)}{(x+\Delta x)x}}{\Delta x}$$

**Pwoblèm 62: Pratik sou definisyon derive a**

Swa  $h(x) = 1/x^2$ . Itilize notasyon ki soti nan definisyon derive a, sa w **mwens alèz** ak li a, pou w kalkile  $h'(x)$ .




---

**6. Linearite derive a**

Jiskaprezan nou te kalkile derive fonksyon sa yo pandan nou t ap itilize definisyon limit derive a.

$$f(x) = x^2 \rightarrow f'(x) = 2x$$

$$g(x) = mx + b \rightarrow g'(x) = m$$

$$h(x) = \frac{1}{x} \rightarrow h'(x) = -\frac{1}{x^2}.$$

Koulye a nou pral sèvi ak fòmil sa yo pou n jwenn derive anpil fonksyon ki gen rapò youn ak lòt. Bon bagay la: se ke nou p ap oblije sèvi ak definisyon limit pou fonksyon sa yo!

**Pwoblèm 63: Relasyon ant graf yo**

Ki sa nou vle di pa "ki gen rapò"? Ebyen, an n pran yon egzanp. Sipoze ke nou konnen derive  $f(x)$ , epi answit nou gen yon nouvel fonksyon  $g$ , kote ke  $g(x) = 2f(x)$  pou tout kòmman  $x$  yo.

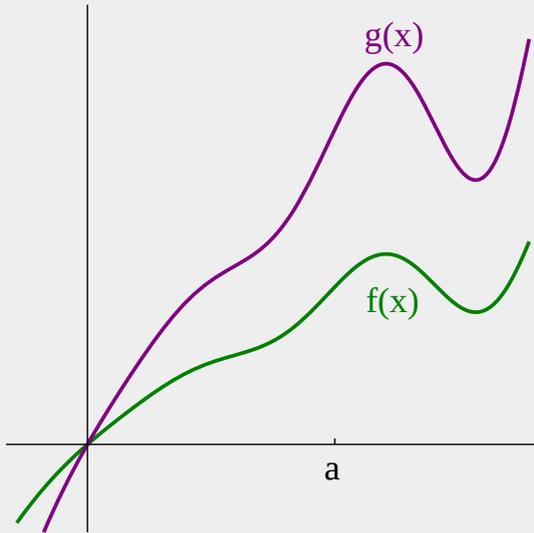
Ki sa nou sipoze fè nan graf  $f$  la pou n kapab jwenn graf  $g$  a?

- A Detire li vètikal pa yon faktè 2
- B Retresi li vètikal pa yon faktè 2
- C Detire li orizontal pa yon faktè 2
- D Retresi li orizontal pa yon faktè 2
- E Detire li nan tou de sans vètikal ak orizontal pa yon faktè 2
- F Okenn ladan yo

## 7. Linearite swit

### Pwoblèm 64: Relasyon ant derive

Si  $g(x) = 2f(x)$ , graf  $g$  la se graf  $f$  la detire vètikalman pa yon faktè 2. Ki donk ki relasyon ki gen ant pant liy tanjant graf  $g$  a nan yon pwen  $x = a$  ak pant liy tanjant graf  $f$  la nan pwen  $x = a$ ?



- A  $g'(a)$  se de fwa  $f'(a)$   
  B  $g'(a)$  se mwatye  $f'(a)$   
  C yo egal

 Videyo



Ex.  $g(x)$

If  $g(x) = k f(x)$  for all  $x$ ,  
then  $g'(x) = k f'(x)$ .

**Pwoblèm 65: Pratik diferansyasyon**

Swa nou gen  $f(x) = -\frac{3}{x}$ . Twouve  $f'(x)$ .

$f'(x) =$

**8. Prèv derive miltip konstan**

Sipoze ke  $g(x) = kf(x)$  pou tout  $x$ , kote  $k$  se yon konstan. Nou vle pwouve ke  $g'(x) = kf'(x)$  nan nenpòt pwen  $x$  kote  $f$  la diferansyab.

Nou konnen ke

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{kf(x + \Delta x) - kf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \right) \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \right). \end{aligned}$$

Premye limit la se jis  $k$ , epi dezyèm limit la se definisyon  $f'(x)$ . Ki donk nou jwenn  $g'(x) = kf'(x)$ .

**9. Sòm yo**

 Videyo



$h(x) = f(x) + g(x) \longrightarrow h'(x) = f'(x) + g'(x)$   
 $h(x) = f(x) - g(x) \longrightarrow h'(x) = f'(x) - g'(x)$   
 $h(x) = \frac{1}{x} + (3x - 7)$   
 $h'(x) =$

**Pwoblèm 66: Plis pratik sou diferansyasyon**

Swa nou gen  $f(x) = x^2 - \frac{1}{x}$ . Twouve  $f'(x)$ .

$f'(x) =$

Nan videyo ki sot pase a, nou te di w ke derive yon sòm se te sòm derive yo, men nou pa t jistifye l. Nou pral pwouve sa nan pwochen videyo sa a.

**Videyo**

$$\begin{aligned}
 h(x) &= f(x) + g(x) && \longrightarrow && h'(x) = f'(x) + g'(x) \\
 &\text{for all } x \\
 h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x+\Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{(f(x+\Delta x) + g(x+\Delta x)) - (f(x) + g(x))}{\Delta x} \\
 &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} + \frac{g(x+\Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\
 &= f'(x) + g'(x)
 \end{aligned}$$

**10. Derive ak lineyarite**

Si  $g(x) = k f(x)$  pou yon konstan kèlkonk  $k$ , lè sa a

$$g'(x) = k f'(x)$$

nan tout pwen kote  $f$  diferansyab.

Si  $h(x) = f(x) + g(x)$ , lè sa

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

nan tout pwen kote  $f$  ak  $g$  yo diferansyab.

Menm jan an tou, si  $j(x) = f(x) - g(x)$ , lè sa

$$j'(x) = f'(x) - g'(x)$$

nan tout pwen kote  $f$  ak  $g$  yo diferansyab.

## 11. Egzanp lineyarite

Nou te wè ke diferansyasyon an "respekte" adisyon ak multiplikasyon pa yon konstan. Nan yon lòt mo, si nou pran derive yon sòm fonksyon, nou ap jwenn menm bagay ak si nou diferansye chak pati yo epi ajoute derive yo. Se menm jan an, si ou pran derive  $k$  multipliyè ak yon fonksyon, kote  $k$  se yon konstan, lè sa w ap jwenn  $k$  fwa derive fonksyon orijinal la.

Respekte adisyon konstan ak multiplikasyon nan fason sa a rele "linearite", epi li se yon pwopriyete enpòtan nan operasyon derive an! Nou konbine de pati linearite a nan pwoblèm aprè yo.

### Pwoblèm 67: Vitès joumou

Sonje joumou nou an ke nou jete anba depi anlè yon gwo bilding?

Wotè a se te  $f(t) = 100 + 20t - 5t^2$  mètr anlè tè a aprè  $t$  segond. Koulye a, nou kapab kalkile vitès  $f'$  pou nenpòt tan  $t$ . Ki sa  $f'(t)$  bay?

$$f'(t) = \text{[input field with calculator icon]}$$

### Pwoblèm 68: Pousantaj ogmantasyon pri

Nan pwoblèm sa a, nou vle kalkile to varyasyon nan pri yon pati pitza!

Sipoze ke pri yon pitza an 2014 se \$12, epi to varyasyon pri pitza a se 0.2 dola pou pa ane.

Pandan se tan, yon boutèy koka-kola koute \$2 an 2014, epi pri l ap ogmante nan yon ritm (pousantaj) de 0.1 dola pa ane.

Pwiske pri pitza ak Koka chanje avèk tan an, se menm bagay la tou pou yon pati. Swa  $h(t)$  se pri 10 pitza ak 5 boutèy Koka-Kola nan ane  $t$ . Sa vle di,  $h(t) = 10f(t) + 5g(t)$ , kote  $f(t)$  se pri yon pitza nan ane  $t$ , epi  $g(t)$  se pri a nan yon boutèy Koka-Kola nan ane  $t$ .

A ki vitès pri moso pitza a ap ogmante? Nan lòt mo, ki valè  $h'(2014)$ ?

$$h'(2014) = \text{[input field with calculator icon]}$$

## 12. Egzanp Lineyarite

### Pwoblèm 69: Derive nan yon pwen

Sipoze ke  $f(x) = -3x^2 + \frac{1}{x} - 2$  epi nou vle kalkile  $f'(1)$ .

Tou dabò, an n reflechi sou ki jan yo rezoud yon pwoblèm konsa. Yon ti lide se ta dwe kalkile  $f'(x)$  pandan n ap itilize règ sòm ak konstan miltip ke nou te devlope yo, e answit entwodui  $x = 1$  ladan l pou n ka jwenn  $f'(1)$ . Yon lòt lide se ta dabò kalkile  $f(1)$  anvan, epi answit pran derive rezilta a. Ki sa ki bon metòd la?

- A Kalkile  $f'(x)$  premyeman, answit entwodui ladan l  $x = 1$  pou n jwenn  $f'(1)$
- B entwodui ladan l  $x = 1$  pou n jwenn  $f(1)$  premyeman, answit pran derive rezilta a
- C Tou de bay menm repons

### Videyo



$f(x) = -3x^2 + \frac{1}{x} - 2$   
 $f'(1) = ?$   
 WRONG WAY: plug in first  
 $f(1) = -4$   
 RIGHT WAY: differentiate first  
 $f'(x) = (-3x^2)' + (\frac{1}{x})' + (-2)$



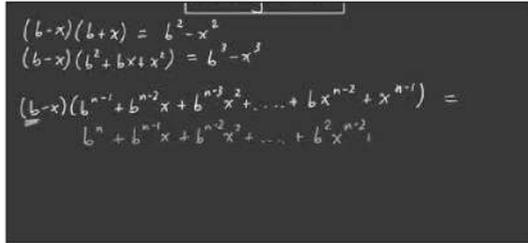
## 13. Videyo sou Règ Pwisans

### Videyo



$f(x) = x^n \rightarrow f'(x) = ?$   
 $f'(x) = \lim_{b \rightarrow x} \frac{f(b) - f(x)}{b - x} = \lim_{b \rightarrow x} \frac{b^n - x^n}{b - x}$   
 $= \lim_{b \rightarrow x} (b^{n-1} + b^{n-2}x + b^{n-3}x^2 + \dots + b x^{n-2} + x^{n-1})$   
 $\frac{b^n - x^n}{b - x} = (b^{n-1} + b^{n-2}x + b^{n-3}x^2 + \dots + b x^{n-2} + x^{n-1})$

 Videyo



## 14. Egzanp Règ Pwisans

### Problèm 70: Règ Pwisans Egzanp 1

Ki sa ki derive  $f(x) = x^{10}$ ?

$f'(x) =$

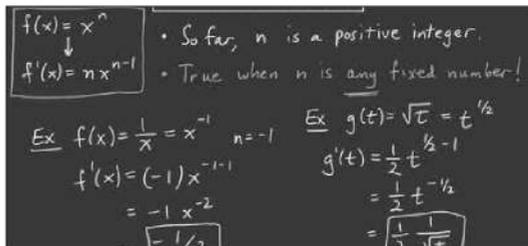
### Problèm 71: Règ Pwisans Egzanp 2

Ki sa ki derive  $g(x) = 5x^6 - \frac{x^4}{2} - 7$ ?

$g'(x) =$

## 15. Règ puisans prolouje

 Videyo



Si  $n$  se nonb fiks kèlkonk, ak  $f(x) = x^n$ , lè sa  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

## 16. Kesyon jeneral sou règ puisans lan

### Pwoblèm 72: Limit Règ Pwisans

Kiyès nan fonksyon sa yo ka diferansye lè n sèvi sèlman avèk règ puisans lan?

A  $f(x) = \frac{1}{x^3}$     B  $g(y) = 10^y$     C  $h(z) = z^{19}$     D  $f(x) = \sqrt[3]{x}$

E  $g(x) = x^{\sin x}$     F  $p(x) = (1 + 2x)^{10}$     G  $q(x) = u^5$ , kote  $u = \sin x$

### Pwoblèm 73: Règ Pwisans Pratik

Swa nou gen  $f(t) = \sqrt[4]{t}$ . Ki sa  $f'(t)$  bay?



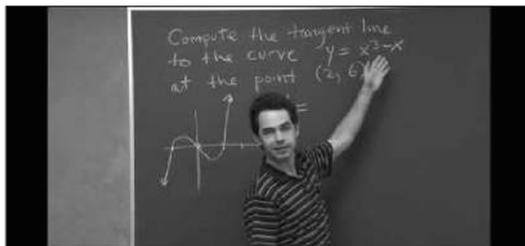
### Pwoblèm 74: Règ Pwisans Pratik 2

Swa nou gen  $g(x) = 4\sqrt{x} - \frac{3}{x^2}$ . Ki sa  $g'(x)$  bay?



## 17. Videyo travo pratik

 Videyo



Kontni sa a soti nan OCW. [\(CC-BY-NC-SA\) 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/4.0/)

**Videyo note:** Nan 2:23 Joel di aksidantèlman ke derive a se  $3x^2 + 1$  men sa vle di  $3x^2 - 1$ .

## 18. Distenksyon ant liy tanjant ak derive

### Pwoblèm 75: Liy tanjant

Sipoze ke liy tanjant graf  $f$  nan  $x = 5$  gen pou ekwasyon  $y = 4x + 3$ .

Ki sa  $f(5)$  bay? Ki sa  $f'(5)$  bay?

$$f(5) =$$



$$f'(5) =$$



### Pwoblèm 76: Derive

Sipoze ke  $g$  se yon fonksyon ki gen pou derive  $g'(x) = 4x + 3$ .

Ki sa  $g(5)$  bay? Ki sa  $g'(5)$  bay?

$$g(5) =$$



$$g'(5) =$$



## 19. Rezime

### Derive konstan miltip

Si  $g(x) = k f(x)$  pou yon konstan kèlkonk  $k$ , lè sa a

$$g'(x) = k f'(x)$$

nan tout pwen kote  $f$  diferansyab.

### Derive sòm yo

Si  $h(x) = f(x) + g(x)$ , lè sa

$$h'(x) = f'(x) + g'(x)$$

nan tout pwen kote  $f$  ak  $g$  yo diferansyab.

### Derive diferans yo

Se menm jan an tou, si  $j(x) = f(x) - g(x)$ , lè sa

$$j'(x) = f'(x) - g'(x)$$

nan tout pwen kote  $f$  ak  $g$  yo diferansyab.

### Derive miltip konstan - prè

Sipoze ke  $g(x) = kf(x)$  pou tout valè  $x$ , kote  $k$  se yon konstan. Nou bezwen pwouve ke  $g'(x) = kf'(x)$  nan nenpòt ki pwen  $x$  kote  $f$  la diferansyab.

Nou konnen ke

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{g(x + \Delta x) - g(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{kf(x + \Delta x) - kf(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} k \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}. \end{aligned}$$

Premye limit la se jis  $k$ , epi dezyèm limit la se definisyon  $f'(x)$ . Ki fè nou jwenn  $g'(x) = kf'(x)$ .

### Ki sa linearite a ye?

Nou te wè ke diferansyasyon an "respekte" adisyon ak miltiplikasyon pa yon konstan. Nan yon lòt mo, si nou pran derive yon sòm fonksyon, nou ap jwenn menm bagay ak si nou diferansye chak pati yo epi ajoute derive yo. Se menm jan an, si ou pran derive  $k$  miltipliye ak yon fonksyon, kote  $k$  se yon konstan, lè sa w ap jwenn  $k$  fwa derive fonksyon orijinal la.

Respekte adisyon konstan ak miltiplikasyon nan fason sa a rele "linearite", epi li se yon pwopriyete enpòtan nan operasyon derive an!

### Règ puisans lan

Si  $n$  se yon nonb fiks kèlkonk, epi  $f(x) = x^n$ , lè sa  $f'(x) = nx^{n-1}$ .

## Solisyon yo

### Pwoblèm 56: Definisyon derive a nan yon pwen

Nou vle limit to varyasyon mwayen  $f$  sou entèval ant 3 ak  $b$ , pandan  $b$  ap pwoche pi pre 3. Kosyan an ta sipoze diferans rezilta  $f(b) - f(3)$  divize pa diferans antran,  $b - 3$ , e nou ta dwe pran limit lan pandan  $b$  ap pwoche pi pre 3.

Si w paka detèmine sa pou kont ou, ou ta ka regade sa a [definisyon derive a](#) ankò.

$$3, b - 3$$

### Pwoblèm 57: Yon ti revizyon byen rapid

Pant liy tanjant lan se derive fonksyon  $f(x) = x^2$  nan  $x = 300$ . Nou te derive  $f'(x) = 2x$ , ki donk  $f'(300) = 600$ .

### Pwoblèm 58: Ki sa n ap tann?

Liy tanjant lan nan nenpòt pwen se liy orijinal la. Ki donk, nenpòt liy tanjant gen yon pant  $1/2$ , ki donk graf  $g'$  la se liy orizontal  $y = 1/2$ .

### Pwoblèm 59: Revizyon rapid 1

Fonksyon sa a se yon fonksyon lineyè avèk pant  $m = -30$ . Ki donk, derive li se fonksyon konstan  $f'(t) = -30$ .

### Pwoblèm 60: Revizyon rapid 2

Pa kite  $\pi$  yo twonpe w! Li se yon konstan tankou nenpòt lòt nonb, epi fonksyon sa a, an jeneral, konstan paske rezilta l pa depann de  $x$ . Derive yon fonksyon konstan se 0.

### Pwoblèm 61: Limit Dèlta x

Sonje sa  $\Delta x = b - x$ , ki donk si  $b$  rapwoche pi pre  $x$ ,  $\Delta x$  ap vin pi pwoche zewo.

**Pwoblèm 62: Pratik sou definisyon derive a**

Lè n itilize premye definisyon pou  $h'(x)$ , nou jwenn:

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{b \rightarrow x} \frac{h(b) - h(x)}{b - x} \\ &= \lim_{b \rightarrow x} \frac{1/b^2 - 1/x^2}{b - x} \\ &= \lim_{b \rightarrow x} \frac{(x^2 - b^2)/b^2x^2}{b - x} \\ &= \lim_{b \rightarrow x} \frac{(x - b)(x + b)}{b^2x^2(b - x)} \\ &= \lim_{b \rightarrow x} -\frac{x + b}{b^2x^2}. \end{aligned}$$

Lè n evalye limit la, nimeratè a limite a  $2x$  epi denominatè a ak  $x^4$ , ki donk nou jwenn  $-2x/x^4$ , oswa  $-2/x^3$ .

Lè n itilize dezyèm definisyon an, ki enplike  $\Delta x$ , nou jwenn

$$\begin{aligned} h'(x) &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{h(x + \Delta x) - h(x)}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{1/(x + \Delta x)^2 - 1/x^2}{\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{x^2 - (x + \Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2x^2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x\Delta x - (\Delta x)^2}{(x + \Delta x)^2x^2\Delta x} \\ &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{-2x - \Delta x}{(x + \Delta x)^2x^2}. \end{aligned}$$

Lè n evalye limit la pandan  $\Delta x$  ap pwoche zewo, nimeratè a limite a  $-2x$  epi denominatè a ak  $x^4$ , ki donk nou jwenn  $-2x/x^4$ , oswa  $-2/x^3$ .

**Pwoblèm 63: Relasyon ant graf yo**

Pou menm valè  $x$  la, rezilta  $g$  a se de fwa rezilta  $f$  la. Se poutèt sa graf  $g$  a detire vètikalman ak yon faktè 2, men se pa orizontal.

**Pwoblèm 64: Relasyon ant derive**

Pant nenpòt liy tanjant double lè graf la detire vètikalman pa yon faktè 2. Gade pwochen videyo a pou plis detay.

**Pwoblèm 65: Pratik diferansyasyon**

Nou ka ekri  $f(x) = -3 \cdot \frac{1}{x}$ , ki donk

$$f'(x) = -3 \left( \frac{1}{x} \right)' = -3 \left( -\frac{1}{x^2} \right) = \frac{3}{x^2}.$$

**Pwoblèm 66: Plis pratik sou diferansyasyon**

Sa a se diferans de fonksyon yo, ki donk derive l se diferans de derive yo. Ki donk

$$f'(x) = (x^2)' - \left( \frac{1}{x} \right)' = 2x - \left( -\frac{1}{x^2} \right) = 2x + \frac{1}{x^2}.$$

**Pwoblèm 67: Vitès joumou**

Nou kapab diferansye chak tèm separeman lè n itilize lineyarite a. derive  $100 + 20t$  se  $20$ , epi derive  $-5t^2$  se  $-5 \cdot (2t)$ , or  $-10t$ . An tou, N ap jwenn  $f'(t) = 20 - 10t$ .

**Pwoblèm 68: Pousantaj ogmantasyon pri**

Pa lineyarite, nou konnen ke  $h'(t) = 10f'(t) + 5g'(t)$ . Ki donk  $h'(2014) = 10 \cdot 0.2 + 5 \cdot 0.1 = 2.5$  dola pa ane.

**Pwoblèm 69: Derive nan yon pwen**

An jeneral, ou ta dwe toujou diferansye anvan ou entwodui yon valè. Entwodwi yon valè vle di ou limite atansyon ou a yon pwen, epi si ou te fè sa ou te ka pèdi tout enfòmasyon sou fason fonksyon an ka chanje (tankou derive a). Gade pwochen videyo a pou plis detay.

**Pwoblèm 70: Règ Pwisans Egzanp 1**

Dapre règ puisans lan, derive a se  $f'(x) = 10x^{10-1} = 10x^9$ .

**Pwoblèm 71: Règ Pwisans Egzanp 2**

Lè n itilize lineyarite a, derive a se

$$g'(x) = 5(x^6)' - \frac{1}{2}(x^4)' + (-7)' = 5 \cdot 6x^5 - \frac{1}{2}4x^3 + 0 = 30x^5 - 2x^3.$$

**Pwoblèm 72: Limit Règ Pwisans**

Nou konnen ke  $\frac{1}{x^3} = x^{-3}$  ak  $\sqrt[3]{x} = x^{1/3}$ , kidonk de sa yo, ansanm ak  $h(z) = z^{19}$  koresponn egzakteman ak modèl règ puisans lan: varyab antre (kòmman nan) a ogmante pa yon ekspozan fiks.

Fonksyon  $g(y) = 10^y$  ak  $p(x) = (1 + 2x)^{10}$  pa gen varyab antre a (kòmman nan) kòm baz ekspozan an, ki donk règ kalkil puisans pa ka aplike pou yo dirèkteman. Se menm jan an tou,  $q(x) = u^5$  gen yon ekspresyon  $u = \sin x$  kòm baz ekspozan an ki pa egal a varyab antre (kòmman)  $x$  la. Pou  $g(x) = x^{\sin x}$ , ekspozan an pa yon nonb fiks, ki donk yon fwa ankò, règ puisans lan pa aplike.

**Pwoblèm 73: Règ Pwisans Pratik**

Nou kapab ekri  $f(t) = t^{0.25}$ , se kon sa règ puisans lan di nou ke

$$f'(t) = 0.25t^{0.25-1} = \frac{1}{4}t^{-3/4}.$$

**Pwoblèm 74: Règ Pwisans Pratik 2**

Nou kapab ekri  $g(x) = 4x^{1/2} - 3x^{-2}$ . Règ puisans lan aplike a tou de tèm yo:

$$g'(x) = 4 \cdot \frac{1}{2}x^{1/2-1} - 3 \cdot (-2)x^{-2-1} = \frac{2}{\sqrt{x}} + \frac{6}{x^3}.$$

**Pwoblèm 75: Liy tanjant**

Sa a se yon kesyon difisil! Sa ki enpòtan pou reyalize se ke yo ba ou ekwasyon yon sèl liy tanjant, nan  $x = 5$ , e non yo pa ba w fòmil pou derive nan nenpòt ki pwen. Nou konnen ke  $f'(5)$  egal a pant liy tanjant sa a, sètadi 4. Pou kalkile  $f(5)$ , nou bezwen reyalize ke liy tanjant lan pase nan pwen  $(5, f(5))$  nan graf  $f$ . Daprè ekwasyon liy tanjant lan, nou ka di pwen sa a dwe  $(5, 23)$ . 23, 4

**Pwoblèm 76: Derive**

Èske w wè diferans ki genyen ant pwoblèm sa a ak pwoblèm anvan an?

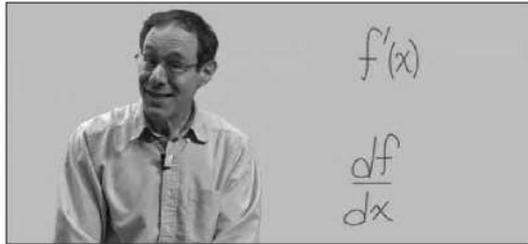
Isit la yo ba nou fòmil pou derive a nan chak pwen! An patikilye nou ka wè ke  $g'(5) = 4 \cdot 5 + 3 = 23$ .

Sepandan, li enposib pou detèmine ki sa  $g(5)$  ye. Kèk nan nou ka kwè ke nou ka detèmine yon fòmil pou  $g(x)$  lè nou ranvèse règ puisans lan: pa egzanp, si  $g(x) = 2x^2 + 3x$ , lè sa a  $g'(x) = 4x + 3$ . Sepandan, pa bliye ke ou ka ajoute nenpòt konstan nan  $g(x)$  epi ou toujou gen menm derive a. Pa egzanp,  $g(x) = 2x^2 + 3x + 2001$  genyen tou  $4x + 3$  kòm derive l. Nou pa gen ase enfòmasyon pou detèmine ki konstan nou ta dwe ajoute.

# Notasyon Leibniz

## 1. Notasyon Leibniz

 Videyo



**Nòt sou videyo a:** Teknikman, Newton devlope notasyon pwen ( $f'(t)$ ), ki itilize sèlman pou derive pa rapò ak tan, epi Lagrange devlope notasyon prim ( $f'(x)$ ).

## 2. Objektif

$$f'(x) \quad \frac{df}{dx} \quad \frac{dy}{dx} \quad \frac{d}{dx}f \quad \frac{d}{dx}y$$

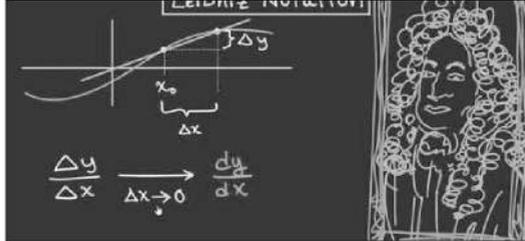
**Objektif**

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk pratik, ou ta dwe kapab:

- Konprann pou ki rezon notasyon **Leibniz** la.
- Desine **eleman diferansyèl yo**.
- Kapab itilize notasyon Leibniz yon fason apwopriye.

### 3. Notasyon

 Videyo



#### Pwoblèm 77: Revizyon Definisyon Derive

Sonje definisyon derive a.

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$$

Ki ekspresyon  $\Delta f$  ki kòrèk?

- A  $f(x + \Delta x) + f(x)$    
  B  $f(x + \Delta x) - f(x)$   
 C  $f(x + \Delta x) + f(x - \Delta x)$    
  D  $f(x + \Delta x) - f(x - \Delta x)$

#### Pwoblèm 78: Notasyon diferansyèl

Kisa lèt  $d$  vle di nan notasyon Leibniz  $\frac{df}{dx}$  lan?

- A  $d$  vle di derive   
  B  $d$  vle di diferans   
  C  $d$  vle di limit yon diferans  
 D  $d$  vle di dragon

### 4. Derive nan sifas sèk yo

Poukisa nou renmen itilize notasyon Leibniz?

Rezon prensipal ki koz nou renmen itilize notasyon Leibniz lan se ke li raple nou ki sa varyab antre a (kòmman nan) ye. Derive a mezire to varyasyon enstantane varyab rezilta yon fonksyon pa rapò ak varyab antre a (kòmman nan). Pafwa lè

anpil kantite gen varyab ki reprezante yo, li fasil pou pèdi tras ki sa ki kisa; Notasyon Leibniz la ede nou sonje sa.

Ansanm kesyon sa yo pral ede w konprann itilite notasyon Leibniz la.

### Pwoblèm 79: Pwoblèm sou sifas 1

Ekri fòmil pou sipèfisi  $A$  yon sèk an tèm de reyon  $r$ . Apre sa, pran derive a epi evalue li nan yon pwen.

$$A =$$

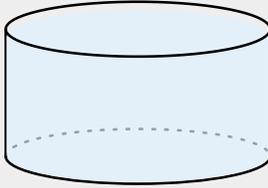


$$\frac{dA}{dr} =$$



$$\left. \frac{dA}{dr} \right|_{r=3} =$$



**Pwoblèm 80: Pwoblèm sou sifas 2**

Sipoze  $m$  ap konstwi yon jakouzi. Sipèfisi jakouzi a enpòtan, paske sa pèmèt mwen detèmine konbyen moun ki ka antre nan jakouzi a. Men, materyèl bilding yo chè, ki donk mwen vle konnen ki jan sipèfisi jakouzi a ap varye pa rapò ak sikonferans jakouzi a. Reekri fòmil pou sipèfisi jakouzi a an tèm de sikonferans  $c$ .

**Hint**

Ou ka vle sèvi ak fòmil  $c = 2\pi r$ . Ranje yon lòt jan pou jwenn  $r$  an tèm de  $c$ , epi ranplase l nan fòmil la pou sipèfisi ou te jwenn pi wo a.

Kalkile derive a.

Anvan nou te kalkile  $\frac{dA}{dr}$  lè  $r = 3$ . Epi lè  $r = 3$ , sikonferans lan se  $c = 6\pi$ .

$$A = \text{[input field]}$$

$$\frac{dA}{dc} = \text{[input field]}$$

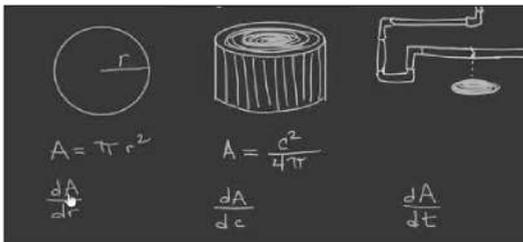
$$\left. \frac{dA}{dc} \right|_{c=6\pi} = \text{[input field]}$$

Pwobableman ou te jwenn repons diferan pou valè sa yo:  $\left. \frac{dA}{dr} \right|_{r=3}$  ak  $\left. \frac{dA}{dc} \right|_{c=6\pi}$ .

Eseye konprann rezon ki fè sa.

## 5. Sipèfisi sèk ak derive

 Videyo



## 6. Pwodui derive aji sou fonksyon

- **Inite yo:** Si  $P$  gen inite presyon, ak  $t$  gen inite *time*, lè sa  $\frac{dP}{dt}$  gen inite presyon pa tan.
- **Evalyasyon nan pwen yo:** Si nou vle pran derive nan yon pwen patikilye  $x = 3$ , lè sa nou itilize notasyon  $\frac{df}{dx} \Big|_{x=3}$ . Yo li ba a kòm "evalye nan".
- **Aksyon pwodui derive sou fonksyon:**
  - Nou kapab ekri  $\frac{d(x^2)}{dx}$  pou derive  $x^2$ .
  - Si yon fòmil long, nou ka ekri  $\frac{d}{dy}(y^3 + 2y^2)$ .

### Pwoblèm 81: Egzèsis rapid ki sèvi avèk notasyon Leibniz

Ki sa  $\frac{d}{dz}(z^3 + 2z^2) \Big|_{z=2}$  bay?



## 7. Revizyon

### Pwoblèm 82: Kesyon revizyon

Sipoze kantite dlo  $W$  ki nesèsè pou grandi tomat yo se yon fonksyon kilogram tomat  $t$ , ki bay apati fòmil sa a.  $W = f(t) = 10t^3 - 5t^2$ . Kiyès nan notasyon sa yo ki ta apwopriye pou derive  $W$  pa rapò ak  $t$ ? (Chwazi tout sa ki aplikab yo.)

- A  $f'(t)$     B  $f'(W)$     C  $\frac{df}{dx}$     D  $\frac{dW}{dt}$     E  $\frac{df}{dW}$     F  $\frac{dt}{dW}$     G  $\frac{df}{dt}$   
 H  $\frac{df}{dt}(10t^3 - 5t^2)$     I  $\frac{d}{dt}(10t^3 - 5t^2)$     J  $\frac{d}{dx}(10t^3 - 5t^2)$

## 8. Rezime

### Poukisa notasyon Leibniz?

Poukisa nou renmen itilize notasyon Leibniz?

Rezon prensipal ki koz nou renmen itilize notasyon Leibniz lan se ke li raple nou ki sa varyab antre a (kòmman nan) ye. Derive a mezire to varyasyon enstantane varyab rezilta yon fonksyon pa rapò ak varyab antre a (kòmman nan). Pafwa lè anpil kantite gen varyab ki reprezante yo, li fasil pou pèdi tras ki sa ki kisa; Notasyon Leibniz la ede nou sonje sa.

### Pwopriyete notasyon Leibniz

- **inite yo:** Si  $P$  gen inite presyon, epi  $t$  gen inite *time*, lè sa  $\frac{dP}{dt}$  pral gen inite presyon pa tan.
- **Evalyasyon nan pwen yo:** Si nou vle pran derive a nan yon pwen patikilye  $x = 3$ , lè sa n ap itilize notasyon  $\left. \frac{df}{dx} \right|_{x=3}$ . Yo li ba a kòm "evalye nan".
- **Aksyon pwodwi derive yo sou fonksyon yo:**
  - Nou kapab ekri  $\frac{d(x^2)}{dx}$  pou derive  $x^2$ .
  - Si yon fòmil long, nou kapab ekri  $\frac{d}{dy}(y^3 + 2y^2)$ .

## Solisyon yo

### Pwoblèm 77: Revizyon Definisyon Derive

$$\Delta f = f(x + \Delta x) - f(x)$$

□

### Pwoblèm 78: Notasyon diferansyèl

Lèt  $d$  a vle di limit yon diferans. An patikilye, kantite  $\frac{df}{dx}$  se limit diferans

kosyan  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta x}$ .

### Pwoblèm 79: Pwoblèm sou sifas 1

Sipèfisi yon sèk se  $A = \pi r^2$ . Aplikasyon règ pou kalkil puisans lan, nou jwenn derive a pa rapò ak  $r$  se

$$\frac{dA}{dr} = 2\pi r.$$

Lè n evalye l nan  $r = 3$ , nou jwenn

$$\left. \frac{dA}{dr} \right|_{r=3} = 6\pi$$

### Pwoblèm 80: Pwoblèm sou sifas 2

Nou wè ke

$$\begin{aligned} A &= \pi r^2 \\ r &= \frac{c}{2\pi} \implies \\ A &= \frac{c^2}{4\pi}. \end{aligned}$$

Derive an se  $\frac{dA}{dc} = \frac{c}{2\pi}$ , epi lè n evalye l nan  $c = 6\pi$ , nou jwenn ke

$$\left. \frac{dA}{dc} \right|_{c=6\pi} = 3.$$

**Pwoblèm 81: Egzèsis rapid ki sèvi avèk notasyon Leibniz**

Premyèman, nou kalkile derive a. Answit, nou pral evalye li nan  $z = 2$ . Akòz lineyarite derive a,

$$\frac{d}{dz}(z^3 + 2z^2) = \frac{d}{dz}(z^3) + \frac{d}{dz}(2z^2).$$

Aplike règ puisans lan nan chak tèm, nou jwenn

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dz}(z^3 + 2z^2) \\ = & 3z^2 + 2(2z) = 3z^2 + 4z, \quad \text{so } \frac{d}{dz}(z^3 + 2z^2)|_{z=2} \\ = & 12 + 8 = 20. \end{aligned}$$

**Pwoblèm 82: Kesyon revizyon**

Itilizasyon notasyon prim nan, sèl fòmil ki apwopriye a se  $f'(t)$ . Nan notasyon

Leibniz, nou ka ekri  $\frac{dW}{dt}$ ,  $\frac{df}{dt}$ , oswa entwodui fòmil la pou  $f$  epi ekri

$\frac{d}{dt}(10t^3 - 5t^2)$ . Tout notasyon sa yo reprezante menm fonksyon derive!

An n gade poukisa lòt chwa yo pa bon:

- $f'(W)$  pran derive a pa rapò ak varyab  $W$ , non pa rapò ak varyab  $t$ !
- $\frac{df}{dx}$  pran derive a pa rapò ak varyab  $x$ , non pa rapò ak varyab  $t$
- $\frac{df}{dW}$  pran derive  $f$  la pa rapò ak  $W$  ki pa menm fè sans.
- $\frac{dt}{dW}$  pran derive  $t$  a pa rapò ak  $W$ , ki trete  $t$  kòm varyab depandan olye ke varyab endepandan an.
- $\frac{df}{dt}(10t^3 - 5t^2)$  pa fè sans kòm yon ekspresyon. Li sanble ke nou ap pran yon derive pou  $f(10t^3 - 5t^2)$  pa rapò ak  $t$ , ki se derive fonksyon konpoze, epi se pa menm bagay tankou derive  $f(t)$  pa rapò ak  $t$ .
- $\frac{d}{dx}(10t^3 - 5t^2)$  ankò ap pran yon derive pa rapò ak varyab  $x$  pou yon fonksyon  $t$ .

---

# Dezyèm Derive ak pi wo

---

## 1. Dezyèm derive ak pwisans

 Videyo



---

## 2. Objektif

Ki sa derive segon an ye?

Akselerasyon

Derive yon derive

Yon fonksyon

Yon to varyasyon de yon to varyasyon

Objektif

- Kalkil **derive segon** ak **derive ki pi elve**.
- Relye derive segon an ak **konkavite** yon graf.
- Dekri derive segon pozisyon yon fonksyon kòm **akselerasyon**.
- Entèprete **inite** derive ki pi wo yo.

### 3. Derive segon

#### Pwoblèm 83: Premye derive

An n di ke  $f(x) = x^3 - 6x$ . Kalkile  $\frac{df}{dx}$ .

$$\frac{df}{dx} =$$

#### Pwoblèm 84: Yon lòt derive

Nan dènye kesyon an ou te kalkile derive pou  $f$ . Li menm se yon fonksyon, ki donk poze  $g(x) = \frac{df}{dx}$ . Ki derive  $g$ ?



### 4. Entwodiksyon sou derive pi wo puisans

#### Videyo



$$f(x)$$

$$f'(x) = \frac{df}{dx} = \frac{d}{dx}(f)$$

(first derivative of  $f$ )

$$f''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dx}(f)\right) = \left(\frac{d}{dx}\right)^2(f)$$

Second derivative of  $f$

Dezyèm derive yon fonksyon  $f(x)$  se premye derive  $f'(x)$  la, epi li endike pa  $f''(x)$  oswa  $\frac{d^2f}{dx^2}$ .

Derive  $n$ nyèm yon fonksyon  $f(x)$  se premye derive  $f^{(n-1)}(x)$ , epi li endike pa  $f^{(n)}(x)$  oswa  $\frac{d^nf}{dx^n}$ .

## 5. Yon twazyèm derive

### Pwoblèm 85: Yon twazyèm derive

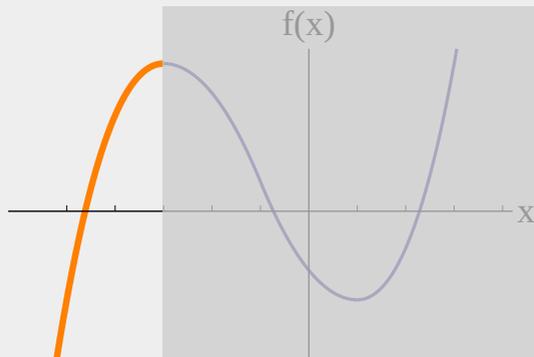
Swa nou gen  $g(t) = t^4 - t^3 + 2t$ . Kalkile  $\left. \frac{d^3g}{dt^3} \right|_{t=2}$ .



## 6. Derive segon swit

### Pwoblèm 86: Siy yon derive

Men graf yon fonksyon  $f$ .



Konsidere bò gòch nan graf la ki desine an oranj fonsè. (Inyore pati nan koub la ki kache nan bwat gri).

Èske  $f'$  pozitif oswa negatif nan seksyon sa a?

- A Pozitif  B Negatif  C Pafwa pozitif e pafwa negatif

**Pwoblèm 87: Èske derive a ap kwat?**

Nan pati ki soulinye la, èske  $f'$  ap kwat oubyen dekwat?

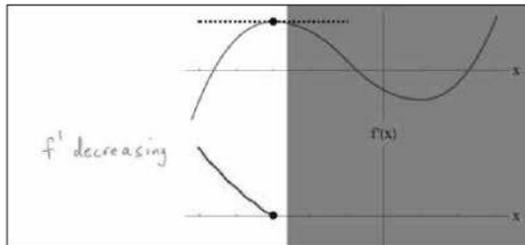
- A kwat    B Dekwat    C Pafwa kwat, pafwa dekwat

Kisa sa di nou sou siy  $f''$  nan seksyon sa a?

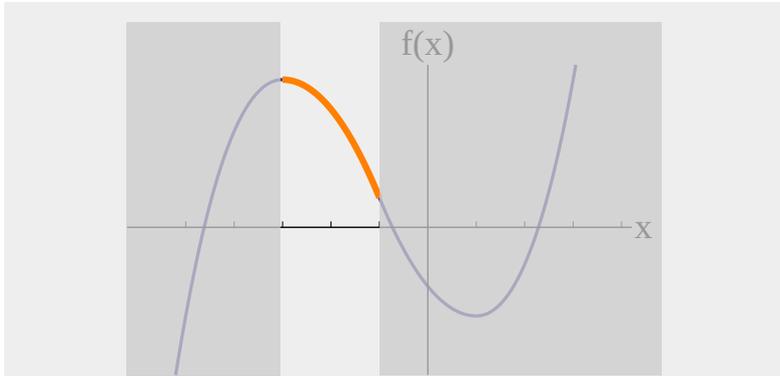
- A Li pozitif    B Li negatif    C Li pafwa pozitif epi pafwa negatif

**7. Derive segon swit**

 Videyo

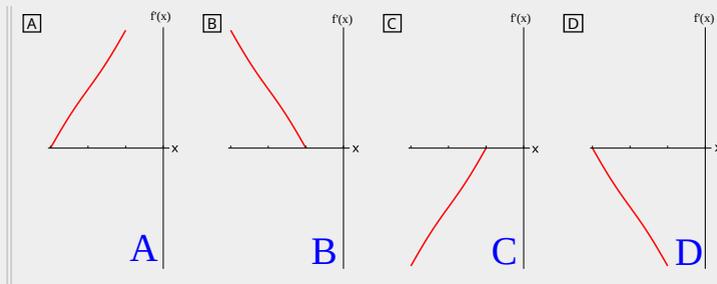


**Pwoblèm 88: Graf derive premye an**



Egzamine pati graf la ki desine an oranj fonsè. (Inyore pati nan koub la ki kouvri pa bwat gri yo.)

Ki graf ki pi pwobab pou  $f'$  sou entèval sa a?



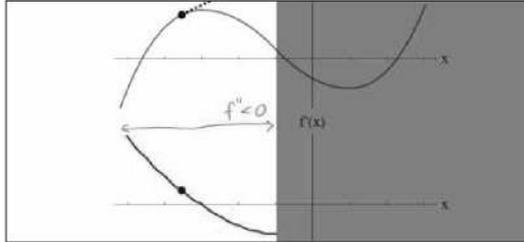
**Pwoblèm 89: Siy derive segon an**

Piske yo bay repons ki kòrèk la pi wo a, èske nou ta dwe atann  $f''$  pozitif, negatif, oswa zewo nan entèval sa a?

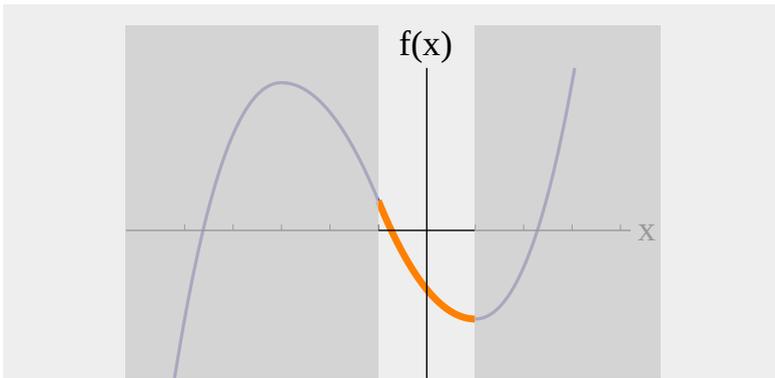
- A Pozitif  B Negatif  C Zewo

## 8. Konkavite

 Videyo



Pwoblèm 90: Lòt siy derive yo

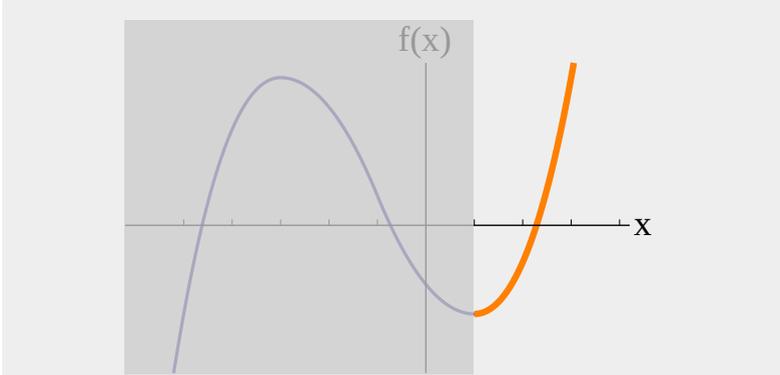


Egzamine pati graf la ki desine an oranj fonsè. (Inyore pati yo ki an nan koub ki kouvri pa bwat gri yo).

Ki siy  $f'$  ak  $f''$  nan entèval sa a?

- A Tou de pozitif    B Tou de negatif
- C Premye derive a pozitif, men dezyèm derive a negatif
- D Premye derive a negatif, men dezyèm derive a pozitif

**Problèm 91: Plis siy pwodui derive toujou**



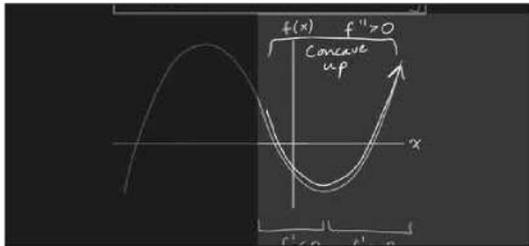
Ki siy  $f'$  ak  $f''$  nan entèval sa a?

- A Tou de yo pozitif     B Tou de negatif
- C Premye derive pozitif, men derive segon an negatif
- D Premye derive a negatif, men derive segon an pozitif

---

**9. Derive segon ak konkavite**

 Videyo



## 10. Detèminasyon konkavite

### Pwoblèm 92: Detèminasyon konkavite

Pou chak fonksyon sa yo, detèmine si graf li a toujou konkav pa anlè (koubi anlè), toujou konkav pa anba (koubi pa anba), pafwa konkav pa anlè epi pafwa konkav pa anba, oswa okenn nan sa yo.

$$f(x) = x^3 - 2x$$

- (A) Toujou konkav anlè
- (B) Toujou konkav anba
- (C) Pafwa konkav anlè, pafwa konkav anba
- (D) Okenn ladan yo

$$g(x) = 30 + 7x - 2x^2 - x^{10}$$

- (A) Toujou konkav anlè
- (B) Toujou konkav anba
- (C) Pafwa konkav anlè, pafwa konkav anba
- (D) Okenn ladan yo

$$h(x) = 3x - 2$$

- (A) Toujou konkav anlè
- (B) Toujou konkav anba
- (C) Pafwa konkav anlè, pafwa konkav anba
- (D) Okenn ladan yo

### Pwoblèm 93: Derive segon ki egal zewo?

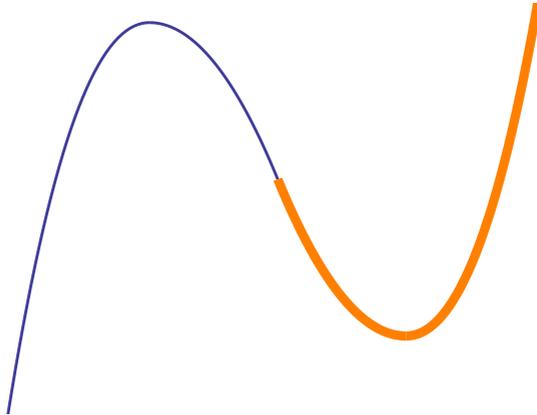
Kiyès nan kalite fonksyon sa yo ki gen yon derive segon egal a zewo nan tout pwen?

(Chwazi tout sa ki aplikab yo.)

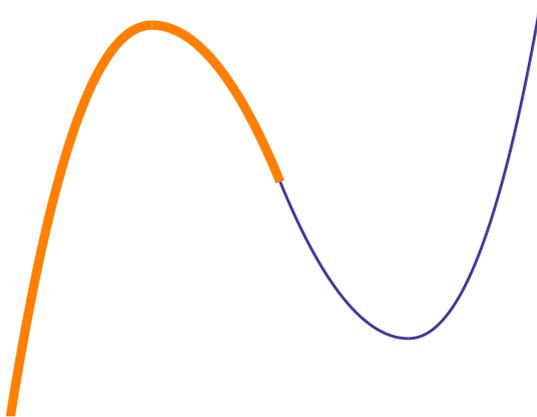
- A Tout fonksyon kwadratik (parabòl)  $f(x) = ax^2 + bx + c$
- B Tout fonksyon lineyè  $g(x) = mx + b$
- C Tout fonksyon konstan  $h(x) = c$

## 11. Rezime derive segon ak konkavite

Sou entèval kote  $f'' > 0$ , fonksyon  $f$  la konkav pa anlè. (An oranj fonsè anba a.)



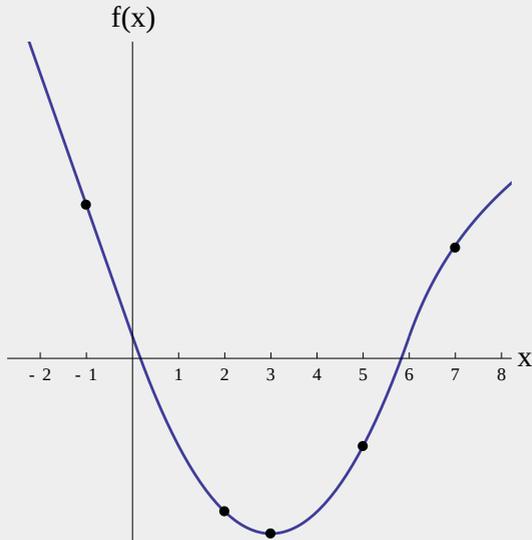
Sou entèval kote  $f'' < 0$ , fonksyon  $f$  la konkav pa anba. (An oranj fonsè anba a.)



Pwen kote graf yon fonksyon chanje soti nan yon fòm konkav pa anlè pou pran yon fòm konkav pa anba, oswa vise vèsa, yo rele **pwen d enfleksyon**.

## 12. Pwoblèm imaj yo

### Pwoblèm 94: Siy derive yon fonksyon



Yo ba nou graf yon fonksyon  $f$ , detèmine siy premye ak segon derive a nan pwen ki make yo. (Yo sipoze graf  $f$  la dwat lè  $x < 0$ .)

$$f'(-1)$$

- (A) Pozitif    (B) Negatif    (C) Zewo

$$f''(-1)$$

- (A) Pozitif    (B) Negatif    (C) Zewo

$$f'(2)$$

- (A) Pozitif    (B) Negatif    (C) Zewo

$$f''(2)$$

- (A) Pozitif    (B) Negatif    (C) Zewo

$$f'(3)$$

- (A) Pozitif    (B) Negatif    (C) Zewo

$$f''(3)$$

- (A) Pozitif    (B) Negatif    (C) Zewo

$f'(5)$

- (A) Pozitif (B) Negatif (C) Zewo

$f''(5)$

- (A) Pozitif (B) Negatif (C) Zewo

$f'(7)$

- (A) Pozitif (B) Negatif (C) Zewo

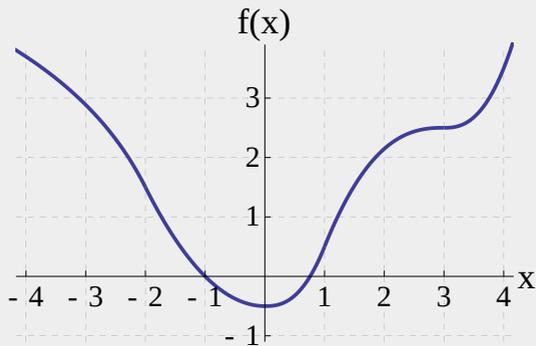
$f''(7)$

- (A) Pozitif (B) Negatif (C) Zewo

### Pwoblèm 95: Chanjman nan konkavite

Jwenn tout valè  $x$  kote graf la chanje an konkav pa anlè pou pase a konkav pa anba, oswa vise vèsa.

Pwen kote graf la chanje an konkav pa anlè pou pase a konkav pa anba, oswa vise vèsa, yo **pwen d enfleksyon**.



### 13. Siyifikasyon mond reyèl la

#### Pwoblèm 96: Tit nouwèl

An n retounen nan tit nou an, "To kwasans travay la ralanti".

Si tit sa a te pibliye nan fen dezyèm sezon an, kiyès nan sa ki ann apre yo ta ka dekri pèfòmans ekonomi an nan trimès 1 ak 2?

(Chwazi tout posiblite yo. An n sipoze ke kwasans lan pozitif epi ekriven tit la egzat!)

- A +200,000 travay/mwa nan premye trimès, +300,000 travay/mwa nan dezyèm trimès
- B +200,000 travay/mwa nan premye trimès, +200,000 travay/mwa nan dezyèm trimès
- C +200,000 travay/mwa nan premye trimès, +100,000 travay/mwa nan dezyèm trimès
- D +200,000 travay/mwa nan premye trimès, -100,000 travay/mwa nan dezyèm trimès
- E +200,000 travay/mwa nan premye trimès, -300,000 travay/mwa nan dezyèm trimès
- F -100,000 travay/mwa nan premye trimès, -200,000 travay/mwa nan dezyèm trimès
- G -100,000 travay/mwa nan premye trimès, -50,000 travay/mwa nan dezyèm trimès

#### Videyo



"Rate of Job Growth Slows"

$f'$  has gone down  
 $f' > 0$

$f(t)$  = number of jobs at time  $t$

Q1      Q2

$f'$ : +200k  $\frac{\text{jobs}}{\text{mo}}$

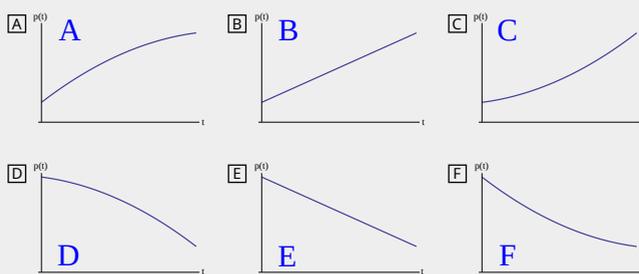
**Pwoblèm 97: Siy premye ak segon derive**

Yon atik nan journal di ke "Vitès pèt popilasyon nan vil Kapitòl la vin ralanti." Si  $p(t)$  se popilasyon an kòm yon fonksyon tan, ki sa atik la vle di sou siy  $p'(t)$  ak  $p''(t)$  lan?

- A Tou de  $p'(t)$  ak  $p''(t)$  pozitif
- B Tou de  $p'(t)$  ak  $p''(t)$  yo negatif
- C  $p'(t)$  pozitif men  $p''(t)$  lan negatif
- D  $p'(t)$  negatif men  $p''(t)$  pozitif

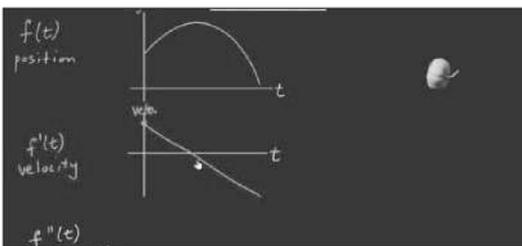
**Pwoblèm 98: Grafik**

Kiyès nan sa ki ann apre yo ki ta ka graf  $p$ ?



**14. Akselasyon**

 Videyo



## 15. Akselerasyon joumou o somè

### Pwoblèm 99: Vitès joumou o somè

Youn nan bagay nou pa t pale nan videyo a se akselerasyon nan moman kote joumou an rive somè trajektwa li. Nou pral vin sou sa nan kesyon k ap vini yo.

Tou dabò, ki sa **vitès** enstantane joumou an ye nan moman li rive nan pwen ki pi wo a?

A Li pozitif    B Li negatif    C Li se zewo

D Li pa ka detèmine ak enfòmasyon yo bay yo

### Pwoblèm 100: Vitès zewo ak akselerasyon

Vrè ou Fo: Sipoze ke  $f'(5) = 0$ . Lè sa a  $f''(5)$  dwe egal 0.

A Vrè    B Fo

### Pwoblèm 101: Ki sa ki akselerasyon o somè?

Vrè ou Fo: Lè joumou an o somè (nan tèt) trajektwa li, akselerasyon li se 0.

A Vrè    B Fo

## 16. Pwoblèm akselerasyon

### Pwoblèm 102: Inite akselerasyon

Sipoze ke yo bay pozisyon an mètr  $m$ , epi tan an segond  $s$ .

Ki sa inite vitès yo ap ye?



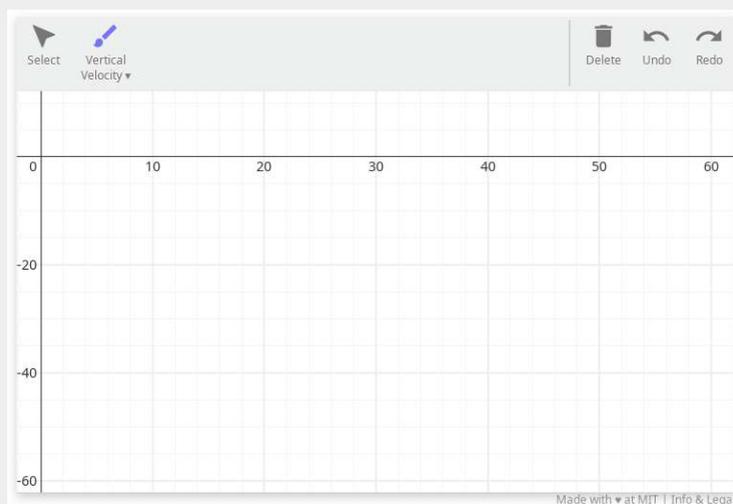
Ki inite akselerasyon yo?



**Pwoblèm 103: Parachit**

Sipoze yon parachitis sote soti nan yon avyon nan yon moman  $t = 0$  segond. Yo bay wotè li kòm yon fonksyon tan se  $h(t)$ . Sipoze ke vitès vètikal inisyal la  $h'(0)$  se zewo. Parachit la fèmen pou l kòmanse, epi apre 15 segond parachitis la rive nan vitès maksimòm desann li (tèminal). Nan  $t = 30$  segond, parachit la louvri, epi ak  $t = 45$  segond, vitès la te estabilize yon lòt fwa ankò.

Eskise yon graf  $h'(t)$  ant  $t = 0$  ak  $t = 60$ . (Sijasyon: Li ka pi fasil pou trase fonksyon an nan plizyè segman. Ou pa bezwen trase li ak yon liy kontini.)

**Pwoblèm 104: Akselasyon parachit**

Pou fonksyon  $h$  ki dekre pi wo a, ki siy  $h''(10)$ ?

- A Pozitif  B Negatif  C Zewo

Ki siy  $h''(20)$ ?

- A Pozitif  B Negatif  C Zewo

Ki siy  $h''(40)$ ?

- A Pozitif  B Negatif  C Zewo

## 17. Rezime

### Derive segon

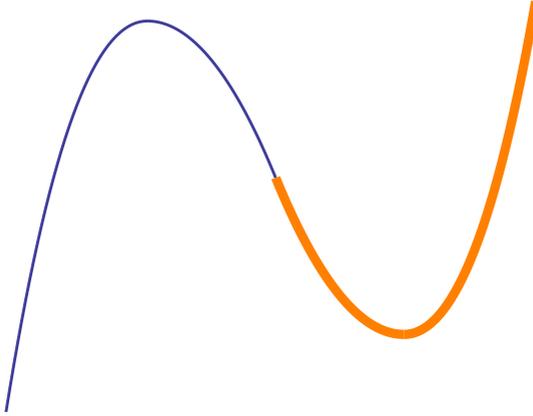
Dezyèm derive yon fonksyon  $f(x)$  se premye derive  $f'(x)$  la, epi li endike pa  $f''(x)$  oswa  $\frac{d^2f}{dx^2}$ .

### Derive puisans elve

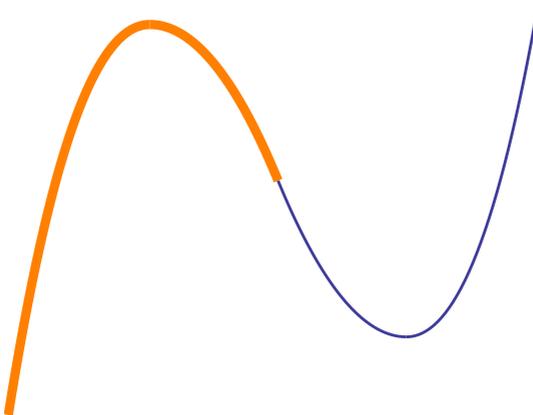
Derive  $n$ nyèm yon fonksyon  $f(x)$  se premye derive  $f^{(n-1)}(x)$ , epi li endike pa  $f^{(n)}(x)$  oswa  $\frac{d^nf}{dx^n}$ .

### Derive segon ak konkavite rezime

Sou entèval kote  $f'' > 0$ , fonksyon an  $f$  konkav pa anlè (koubi anwo).



Sou entèval kote  $f'' < 0$ , fonksyon an  $f$  konkav pa anba (koubi desann).



Pwen kote graf yon fonksyon chanje soti nan konkav pa anlè pou l vin konkav pa

anba, oswa vise vèsa, yo rele **pwen d enfleksyon**.

**Pozisyon, vitès, akselasyon**

Si  $x(t)$  se yon fonksyon ki dekri pozisyon an kòm yon fonksyon tan, ebyen lè sa:

- $x'(t)$  se vitès la, epi
- $x''(t)$  se akselasyon.

## Solisyon yo

### Pwoblèm 83: Premye derive

Lè n aplike lineyarite ak règ puisans lan, nou wè ke derive a se

$$\begin{aligned}\frac{df}{dx} &= \frac{d}{dx}x^3 - \frac{d}{dx}6x \\ &= 3x^2 - 6.\end{aligned}$$

### Pwoblèm 84: Yon lòt derive

Derive  $3x^2 - 6$  la se  $6x - 0$ .

$6x$

### Pwoblèm 85: Yon twazyèm derive

Lè n itilize prensip linearite ak règ pou kalkile puisans, derive premye  $g$  se  $4t^3 - 3t^2 + 2$ .

Dezyèm derive a se  $12t^2 - 6t$ .

Twazyèm derive a se  $24t - 6$ . Evalyasyon sa a nan  $t = 2$  bay 42.

42

### Pwoblèm 86: Siy yon derive

Nan pati ki soulinye la,  $f$  la ap kwat (l ap ogmante). Si yon fonksyon ap kwat, sa siyifi derive li a pozitif.

A

### Pwoblèm 87: Èske derive a ap kwat?

Nan pwoblèm anvan an nou te wè ke  $f$  ap kwat. Sepandan, pant liy tanjant lan (i.e. premye derive  $f'$ ) ap aplati. Sa se premye derive  $f'$  ap pwoche zewo apati kèk nonb pozitif, ki donk  $f'$  ap dekwat.

Fonksyon dekwasant  $f'$  gen yon derive negatif, ki donk  $f''$  lan negatif. Gade pwochen videyo a pou plis detay.

B

B

**Pwoblèm 88: Graf derive premye an**

Nan graf  $f$  la, nou ka wè ke gen yon liy tanjant orizontal nan  $x = -3$ , epi  $f$  koumanse dekwat ant  $x = -3$  ak  $x = -1$ . Ki donk  $f'(-3)$  ta dwe bay 0, answit  $f'$  dwe vin negatif ant  $x = -3$  ak  $x = -1$ .

D

**Pwoblèm 89: Siy derive segon an**

Nou wè nan graf  $f'$  lan ke  $f'$  ap dekwat. Ki donk,  $f''$ , derive  $f'$  lan, dwe negatif. Gade pwochen videyo a pou plis detay.

B

**Pwoblèm 90: Lòt siy derive yo**

Nou ka wè ke  $f$  toujou ap dekwat isi a, ki donk  $f'$  negatif. Sepandan, liy tanjant yo ak graf  $f$  la yo kòmanse trè negatif, e answit gradyèlman vin mwens apik, jiskaske nan fen seksyon sa a, nou jwenn yon liy tanjant orizontal. Sa fè nou konnen ke  $f'$  pase de yon valè negatif rive nan zewo sou entèval sa a, ki donk derive li yo,  $f''$ , pozitif.

D

**Pwoblèm 91: Plis siy pwodui derive toujou**

Nou kapab remake ke  $f$  ap ogmante (kwat) la a, ki donk  $f'$  la pozitif. Liy tanjant graf  $f$  la gradyèlman vin plis apik pandan n ap soti a-goch pou rive a-dwat. Sa a di nou ke  $f'$  ogmante (kwat) sou entèval sa a, ki donk derive l,  $f''$ , pozitif.

A

**Pwoblèm 92: Detèminasyon konkavite**

Nou kapab kalkile  $f''(x) = 6x$ , ki pafwa pozitif e pafwa negatif. Ki donk graf  $f$  la pafwa konkav pa anlè epi pafwa konkav pa anba.

Nan lòt bò,  $g''(x) = -4 - 90x^8$ , ki toujou negatif (pwiswe  $x^8$  toujou pozitif). Ki donk graf  $g$  a toujou konkav pa anba.

Graf  $h(x)$  la se yon liy dwat - li pa janm konkav pa anlè ni konkav pa anba.

C Pafwa konkav anlè, pafwa konkav anba

B Toujou konkav anba

D Okenn ladan yo

**Pwoblèm 93: Derive segon ki egal zewo?**

Fonksyon ki gen derive segon yo egal ak zewo nan nenpòt pwen yo pa janm konkav pa anlè oswa pa anba - graf yo pa koube. Entwitivan, sa ta dwe vle di ke yo lineyè!

Ann efè, si ou kalkile derive segon yon fonksyon lineyè, ou jwenn zewo. Sa a gen ladan fonksyon konstan yo tou, ki konte kòm lineyè. An reyalyte, nou pral wè pita ke fonksyon lineyè yo se sèl fonksyon ki gen derive segon yo toujou egal zewo, men nou pa ka pwouve reyalyte sa a nan moman sa a.

**Pwoblèm 94: Siy derive yon fonksyon**

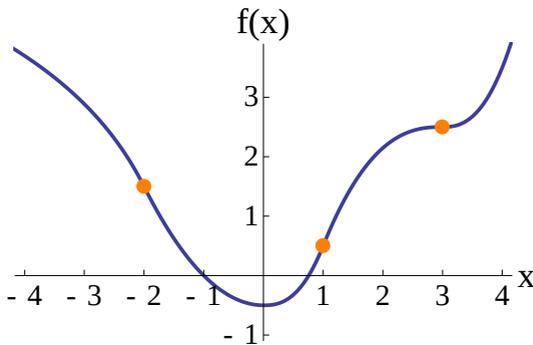
Fonksyon  $f$  la ap diminye(dekwat) jiskaske l rive nan  $x = 3$ , kote li gen yon liy tanjant orizontal epi li kòmanse ogmante (kwat). Ki donk  $f'(-1)$  ak  $f'(2)$  ta dwe negatif,  $f'(3)$  ta dwe egal zewo, epi  $f'(5)$  ak  $f'(7)$  ta dwe pozitif.

Nan  $x = -1$ , graf fonksyon  $f$  la dwat - li pa pliye - ki donk li pa ni konkav pa anlè ni konkav pa anba;  $f''(-1) = 0$ . Nan  $x = 2, 3, 5$  graf fonksyon  $f$  la konkav pa anlè, ki donk  $f''$  pozitif nan pwen sa yo, men nan  $x = 7$  grafik fonksyon  $f$  la konkav pa anba, ki fè  $f''(7) < 0$ .

- (B) Negatif
- (C) Zewo
- (B) Negatif
- (A) Pozitif
- (C) Zewo
- (A) Pozitif
- (A) Pozitif
- (A) Pozitif
- (A) Pozitif
- (B) Negatif

**Pwoblèm 95: Chanjman nan konkavite**

Pwen kote konkavite a chanje a make sou imaj sa a.



**Pwoblèm 96: Tit nouvèl**

Gade pwochen videyo a!

**Pwoblèm 97: Siy premye ak segon derive**

Fraz la fè referans a pèt ki gen nan popilasyon an, ki donk sa vle di popilasyon an ap diminye e kifè  $p'(t)$  lan negatif. Sepandan, pousantaj la pa osi elve ke li te ye oparavan, sa ki vle di ke li te deja trè negatif e kounye a li mwens negatif. Sa vle di ke  $p'$  ap ogmante avèk tan an, ki donk  $p''$  pozitif.

**Pwoblèm 98: Grafik**

Popilasyon an ap diminye men li pa ta dwe tonbe osi vit ke li te ye anvan an. Ki donk repons ki kòrèk la se F.

F

**Pwoblèm 99: Vitès joumou o somè**

Nan moman sa a, joumou an sispann monte men li poko kòmanse desann. Vitès enstantane li se zewo.

C

**Pwoblèm 100: Vitès zewo ak akselerasyon**

Fo. Si fonksyon  $f'$  la egal zewo nan yon pwen, sa pa vle di ke derive li  $f''$  se zewo la.

B

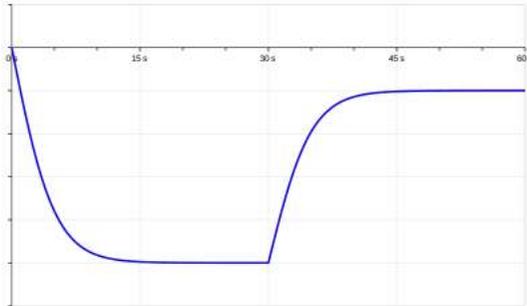
**Pwoblèm 101: Ki sa ki akselerasyon o somè?**

Fo. Vitès la se zewo sèlman nan yon moman; sa pa vle di ke derive vitès la se zewo nan moman sa a.

B

**Pwoblèm 102: Inite akselerasyon**

Nou konnen ke vitès yo mezire an  $m/s$ . Yo ta dwe mezire derive  $v$  pa rapò ak tan an inite vitès pou chak inite tan. Se poutèt sa, akselerasyon yo ta dwe mezire an  $(m/s)/s$ , oswa  $m/s^2$ .

**Pwoblèm 104: Akselerasyon parachit**

Okòmansman vitès la se zewo, epi li diminye jiskaske li rive nan vitès tèminan nan 15 segond. Lè parachit la deplwaye nan 30 segond, vitès la ogmante imedyatman (vin mwens negatif, pi piti nan grandè) jiskaske li rive nan yon nouvo vitès tèminan nan 45 segond. Akselerasyon an negatif ant  $t = 0$  ak  $t = 15$ ; akselerasyon an se zewo ant  $t = 15$  ak  $t = 30$ ; akselerasyon an pozitif ant  $t = 30$  ak  $t = 45$ ; Akselerasyon an se zewo ankò pou  $t$  siperyè ak 45 segond.

 B

 C

 A

---

# Fonksyon trigonometrik: sinis ak kosinis

---

## 1. Derivasyon sinis ak kosinis

 Videyo



---

## 2. Objektif

Ki fonksyon nou ka diferansye?

polinom  
puisans  $x$

**Objektif**

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk pratik, ou ta dwe kapab:

- Diferansye **sinis** ak **kosinis**.
- Itilize sinis ak kosinis pou modelize osilasyon.

### 3. Motivasyon grafik

#### Pwoblèm 105: Motivasyon grafik

Sèvi ak zouti apwoksimasyon liy tanjan lan pou fè apwoksimasyon graf  $\frac{d}{dx} \sin(x)$  la.

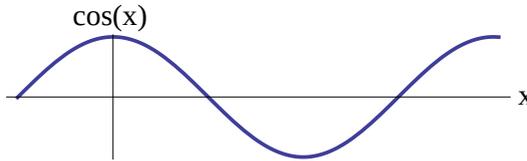


#### Pwoblèm 106: Ki fonksyon?

A ki sa graf  $f'(x)$  ou a sanble?

##### Grafik kos(x)

Graph  $\cos x$ , an ka ou te bliye, sanble sa a:



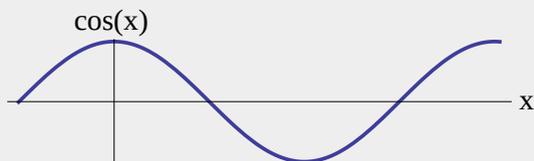
- A  $k \sin x$ , pou kèk pozitif  $k$    
  B  $k \sin x$ , pou kèk negatif  $k$   
 C  $k \cos x$ , pou kèk pozitif  $k$    
  D  $k \cos x$ , pou kèk negatif  $k$

### 4. Intwo swit

Derive  $\sin x$  la sanble anpil tankou yon sòt de fonksyon kosinis. Li pozitif lè  $x = 0$ , vin negatif lè n pase  $x = \pi/2$ , epi apre sa vin pozitif ankò. Pwiske fonksyon sinis la repete chak  $2\pi$ , nou ta espere derive l repete chak  $2\pi$  tou. Koulye a, an n eseye fonksyon kosinis la.

### Pwoblèm 107: Kosinis

Men graf fonksyon kosinis la.



A kiyès nan foto sa yo graf derive li yo ta pi sanble?

- A**
 **B**
- C**
 **D**

### Pwoblèm 108: Derive kosinis

Grafik kòrèk ki anwo a pi sanble ak kiyès nan fonksyon sa yo?

- A**  $k \cos x$ , pou kèk pozitif  $k$ 
 **B**  $k \cos x$ , pou kèk negatif  $k$
- C**  $k \sin x$ , pou kèk pozitif  $k$ 
 **D**  $k \sin x$ , pou kèk negatif  $k$

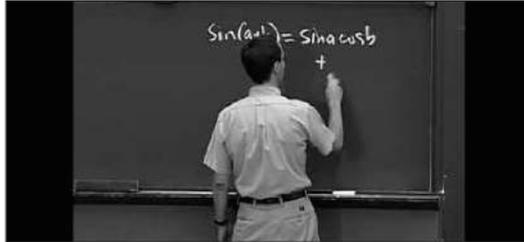
### Pwoblèm 109: Definisyon derive

An n kòmanse fè sa matematikman. Nou pa gen okenn lòt zouti aprè definisyon derive a, ki donk nou pral itilize sa. Ki ekspresyon ki pi bon apwoksimasyon pou derive  $\sin x$  (kote  $\Delta x$  piti)?

- A**  $\frac{\sin(x - \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$ 
 **B**  $\frac{\sin(x + \Delta x) - \sin x}{\Delta x}$
- C**  $\frac{\sin(x - \Delta x) + \sin(\Delta x)}{\Delta x}$ 
 **D**  $\frac{\sin(x + \Delta x) + \sin(\Delta x)}{\Delta x}$
- E** Okenn nan sa yo

## 5. Derive sinis

 Videyo



**Pwoblèm 110: Idantifye derive sinis la nan zewo**

Idantifye ekspresyon ki pi byen koresponn ak  $\left. \frac{d \sin(x)}{dx} \right|_{x=0}$ .

- A  $\frac{-\sin(\Delta x)}{\Delta x}$   
  B  $\frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$   
  C  $\frac{1 - \sin(\Delta x)}{\Delta x}$   
  D  $\frac{\sin(\Delta x) - 1}{\Delta x}$

E Okenn nan sa yo

**Pwoblèm 111: Idantifye derive kosinis nan zewo**

Idantifye ekspresyon ki pi byen koresponn ak  $\left. \frac{d \cos(x)}{dx} \right|_{x=0}$ .

- A  $\frac{-\cos(\Delta x)}{\Delta x}$   
  B  $\frac{\cos(\Delta x)}{\Delta x}$   
  C  $\frac{1 - \cos(\Delta x)}{\Delta x}$   
  D  $\frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}$

E Okenn nan sa yo

Nou te jwenn ke

$$\begin{aligned}
 & \frac{d \sin(x)}{dx} \\
 = & \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left( \sin(x) \left( \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) + \cos(x) \left( \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) \right) \\
 = & \sin(x) \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) + \cos(x) \left( \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right)
 \end{aligned}$$

Nou te idantifye limit sa yo pandan derive cos ak sin nan zewo respektivman. Sa diminye pwoblèm nou an! Pou jwenn derive sin toupatou, li sifi pou jwenn derive  $\sin'(0)$  ak  $\cos'(0)$ .

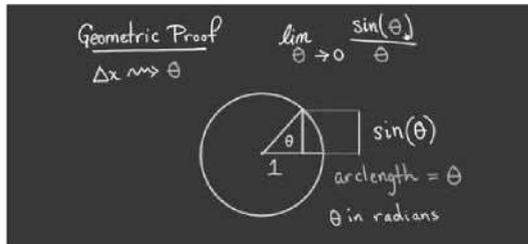
## 6. Derivasyon sinis nan zewo

### Pwoblèm 112: Idantifye limit

Ki sa nou ka konkli sou limit  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}$  ?

- A Limit sa a pa egziste    B Limit la se 0    C Limit la se 1  
 D Nou pa ka konkli anyen ankò

### Videyo



### Pwoblèm 113: Lide prensipal la

Lide jeyometrik prensipal la se ke lè  $\theta$  piti,  $\sin(\theta)$  se apeprè:

- A 0    B 1    C  $\theta$     D  $1 - \theta$

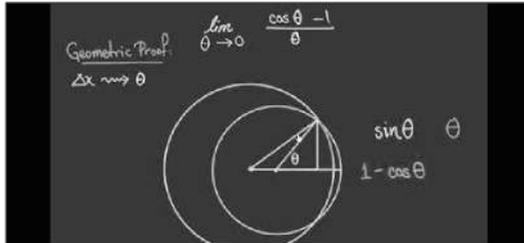
## 7. Derivasyon kosinis nan zewo

### Pwoblèm 114: Idantifye limit

Ki sa nou ka konkli sou limit  $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}$ ?

- A) Limit sa a pa egziste     B) Limit la se 0     C) Limit la se 1
- D) Nou pa ka konkli anyen ankò

### Videyo



Pou yon lòt prèv ki sèvi ak valè derive  $\sin(\theta)$  nan  $\theta = 0$ , gade prèv ki anba a.

### Prèv aljebrik altènatif

Nou vle jwenn limit  $\frac{d}{d\theta} \cos \theta = \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\cos \theta - 1}{\theta}$ . Nan videyo a nou kalkile valè negatif limit sa a  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{1 - \cos \theta}{\theta}$ . An n gade yon lòt fason pou kalkile limit sa a aljebrikman lè n itilize limit  $\sin(\theta)$  nan  $\theta = 0$  ke nou sot jwenn.

Pa manipilasyon aljebrik, nou ka ekri agiman limit sa a nan fason sa a:

$$\frac{1 - \cos \theta}{\theta} = \frac{1 - \cos \theta}{\theta} \cdot \frac{1 + \cos \theta}{1 + \cos \theta} \quad (4.1)$$

$$= \frac{1 - \cos^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} \quad (4.2)$$

$$= \frac{\sin^2 \theta}{\theta(1 + \cos \theta)} \quad (4.3)$$

$$= \frac{\sin \theta}{\theta} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \tag{4.4}$$

Koulye a, pran limit la pandan  $\theta$  ap pwoche 0:

$$\lim_{\theta \rightarrow 0} \left( \frac{\sin \theta}{\theta} \right) \left( \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} \right) = \tag{4.5}$$

$$(1) \left( \frac{0}{2} \right) = 0.$$

Remake byen ke nou kalkile  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{\theta} = 1$  pandan n ap itilize yon agiman

jeyometrik. Epi koulye a nou itilize lefèt ke  $\lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{\sin \theta}{1 + \cos \theta} = \frac{0}{2} = 0$ .

## 8. Definisyon derive kosinis

### Problèm 115: Definisyon derive kosinis

Kiyès nan ekspresyon sa yo ki se derive  $\cos x$ ? (Hint: Aplike fòmil ang pou sòm kosinis  $\cos(x + \Delta x)$ .)

- A  $\cos(x) \sin'(0) - \sin(x) \cos'(0)$      B  $\sin(x) \cos'(0) - \cos(x) \sin'(0)$
- C  $\sin(x) \sin'(0) - \cos(x) \cos'(0)$      D  $\cos(x) \cos'(0) - \sin(x) \sin'(0)$
- E Okenn nan sa yo

## 9. Pratik sou derive yo

 Videyo



Kantite *chif siyifikatif* se kantite chif ki gen yon siyifikasyon an tèm de presizyon.

### Egzanp yo

- Tout chif ki pa zewo siyifikatif – 1235 gen 4 chif siyifikatif.
- Zewo ki parèt ant chif ki pa zewo yo siyifikatif – 101 gen 3 chif siyifikatif.
- Zewo ki nan fen yon nonb desimal siyifikatif – 32.000 gen 5 chif siyifikatif.

### Egzanp ki pa sa

- Zewo dèyè yon nonb ki pa gen desimal *pa* siyifikatif – 5400 gen 2 chif siyifikatif.
- Premye zewo nan yon nonb desimal *pa* enpòtan – 0.0003 gen 1 yon chif siyifikatif.
- Chif etranje yo entwodui nan yon kalkil ak plis presizyon pase done mezire yo *pa* siyifikatif – si .25 ak .50 se mezi egzat tou pre  $\pm 0.01$ , ebyen lè sa nan pwodui a  $(.25)(.50) = 0.125$  dènye 5 lan *pa* siyifikatif.

### Pwoblèm 116: Kesyon rapid 1

Swa nou gen  $f(\theta) = 4 \cos \theta - 3 \sin \theta$ . Ki sa  $f'(\pi/3)$  bay?

(Tanpri bay repons ou an nimerikman ak 3 chif siyifikatif.)



### Pwoblèm 117: Kesyon rapid 2

Swa nou gen  $g(\theta) = \theta^2 - \sin(\pi/5)$ . Ki sa  $g'(\pi)$  bay?

(Tanpri bay repons ou an nimerikman ak 3 chif siyifikatif.)



## 10. Derive segon

### Pwoblèm 118: Derive segon sinis

Ki sa ki derive segon  $f(x) = \sin x$ ?

$$f''(x) = \quad \text{[Calculator and Pencil Icon]}$$

**Pwoblèm 119: Derive segon kosinis**

Ki sa ki derive segon  $g(x) = \cos x$ ?

$g'(x) =$

**Pwoblèm 120: Derive segon sinis ak konkavite**

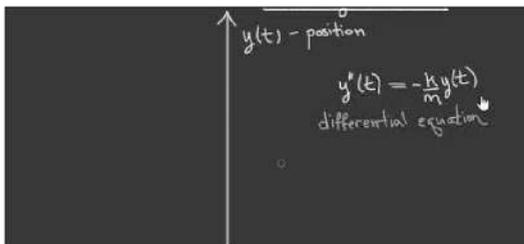
A. Etandone  $f''(x) = -\sin x$ , nan kiyès nan entèval sa yo graf  $f(x)$  konkav anlè (koubi anwo)?

(Chwazi tout entèval.)

A  $(0, \frac{\pi}{2})$   B  $(\pi, 2\pi)$   C  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$   D  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$   E  $(3\pi, 4\pi)$

B. Vrè ou Fo: Lè  $\sin(x) > 0$ , grafik  $f$  la konkav anba.

A vrè  B fo

**Video****11. Rezime****Definisyon chif siyifikatif**

Kantite *chif siyifikatif* se kantite chif ki gen yon siyifikasyon an tèm de prezizyon.

**Egzanp**

- Tout chif ki pa zewo siyifikatif – 1235 gen 4 chif siyifikatif.
- Zewo ki parèt ant chif ki pa zewo yo siyifikatif – 101 gen 3 chif siyifikatif.
- Zewo ki nan fen yon nonb desimal siyifikatif – 32.000 gen 5 chif siyifikatif.

**Egzanp ki pa sa**

- Zewo dèyè yon nonb ki pa gen desimal *pa* siyifikatif – 5400 gen 2 chif siyifikatif.
- Premye zewo nan yon nonb desimal pa enpòtan – 0.0003 gen 1 yon chif siyifikatif.
- Chif etranje yo entwodui nan yon kalkil ak plis presizyon pase done mezire yo *pa* siyifikatif – si .25 ak .50 se mezi egzat tou pre  $\pm .01$ , ebyen lè sa a nan pwodui a  $(.25)(.50) = 0.125$  dènye 5 lan *pa* siyifikatif.

### Derivasyon sinis ak kosinis

Derive fonksyon trig yo se:

$$\frac{d}{dx} \sin(x) = \cos(x) \quad (4.6)$$

$$\frac{d}{dx} \cos(x) = -\sin(x) \quad (4.7)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \sin(x) = -\sin(x) \quad (4.8)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \cos(x) = -\cos(x) \quad (4.9)$$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 106: Ki fonksyon?

$f'(0) > 0$  answit  $f'$  ap diminye a mezi ke  $n$  ap pwoche a-dwat, anvan osile. Sa a pi sanble ak yon miltip pozitif pou  $\cos x$ .

### Pwoblèm 107: Kosinis

Nan  $x = 0$ , liy tanjan lan orizontal, ki donk derive a ta dwe zewo nan zewo. A-dwat zewo, fonksyon kosinis la kòmanse diminye, ki donk derive li yo ta dwe negatif tou dabò, anvan yo remonte pou yo retounen nan zewo epi vin pozitif. Sa a se graf B.

B

### Pwoblèm 108: Derive kosinis

Nou konnen ke  $\sin x = 0$ , men a-dwat zewo, fonksyon sinis la pozitif. Pwiske nou bezwen derive nou an negatif jis a-dwat zewo, nou vle yon miltip negatif  $\sin x$ .

### Pwoblèm 109: Definisyon derive

Chwa nimewo de a se chwa ki pi pre a - isi a, nimeratè a se diferans ki genyen ant rezilta yo nan fonksyon sinis la pandan  $x$  ap chanje an  $x$  a  $x + \Delta x$ , epi denominatè a se varyasyon  $x$ . Osi lontan ke  $\Delta x$  piti, sa a se yon bon apwoksimasyon pou derive a. Sepandan, sonje ke derive a se limit pandan  $\Delta x$  egal a zewo!

B

### Pwoblèm 110: Idantifye derive sinis la nan zewo

Derive  $\frac{d}{dx} \sin(x) \Big|_{x=0}$  defini kòm

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(0 + \Delta x) - \sin 0}{\Delta x},$$

ki se menm bagay ak

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x}.$$

B

**Pwoblèm 111: Idantifye derive kosinis nan zewo**

Derive  $\frac{d}{dx} \cos(x)$  | <sub>$x=0$</sub>  defini kòm

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(0 + \Delta x) - \cos 0}{\Delta x},$$

ki se menm bagay ak

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x}.$$

□

**Pwoblèm 112: Idantifye limit**

Teknikman, nou pa ka konkli anyen ankò. Nimeratè a ak denominatè a tou de ap pwoche zewo. Nenpòt nan chwa yo posib - nou dwe fè plis travay pou n detèmine ki sa limit kosyan an pral bay.

Nou sispèk apati analiz jeyometrik nan derive nou an ke limit sa a pral bay yon nonb ki pa egal. Se konsa, si lavi a mache byen, repons lan pral 1.

Si ou pa abitye ak sa a, ou ta dwe revize limit kosyan yo .

**Pwoblèm 113: Lide prensipal la**

Lide kle a se ke lè  $\theta$  piti,  $\sin(\theta)$  se apeprè egal a  $\theta$ , ki se longè ark ki baleye pa ang lan  $\theta$  sèlman paske ang nou mezire an radian!

□

**Pwoblèm 114: Idantifye limit**

Nou pa ka konkli anyen ankò. Nimeratè a ak denominatè a tou de ap pwoche zewo. Nenpòt nan chwa yo posib - nou dwe fè plis travay pou n detèmine ki sa limit kosyan an pral bay.

Apati rezònman jeyometrik nou an, nou panse limit sa a pral 0. Men, nou pa ka sèten.

Si ou pa abitye ak sa a, ou ta dwe revize limit kosyan yo .

**Pwoblèm 115: Definisyon derive kosinis**

Sonje ke

$$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b).$$

Ansrit, nou enterese ak limit sa a pandan  $\Delta x$  ap pwoche 0 pou ekspresyon sa a

$$\begin{aligned} & \frac{\cos(x + \Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} = \\ & \frac{\cos(x) \cos(\Delta x) - \sin(x) \sin(\Delta x) - \cos(x)}{\Delta x} \\ & \cos(x) \left( \frac{\cos(\Delta x) - 1}{\Delta x} \right) - \sin(x) \left( \frac{\sin(\Delta x)}{\Delta x} \right) \end{aligned}$$

Lè nou pran limit la pandan  $\Delta x$  ap pwoche zewo, nou jwenn ekspresyon  $\cos(x) \cos'(0) - \sin(x) \sin'(0)$ , ki evalye nan  $-\sin(x)$  pa agiman anvan yo!

□

**Pwoblèm 116: Kesyon rapid 1**

Nou itilize lineyarite:  $f'(\theta) = 4(\cos \theta)' - 3(\sin \theta)' = 4(-\sin \theta) - 3(\cos \theta)$ .  
Evalye l nan  $\theta = \pi/3$  li bay  $-4.96$ .

**Pwoblèm 117: Kesyon rapid 2**

Remake ke  $\sin(\pi/5)$  pa depann de varyab nou an  $\theta$  - li se yon konstan! Se poutèt sa, derive tèm sa a se zewo ak  $g'(\theta) = 2\theta - 0$ . Ki donk  $g'(\pi) = 2\pi \approx 6.28$ .

**Pwoblèm 118: Derive segon sinis**

Derive premye  $f'(x) = \cos x$ , ki donk  $f''(x)$  ta dwe menm jan ak derive a  $\cos x$ . Nou jwenn  $f''(x) = -\sin x$ .

**Pwoblèm 119: Derive segon kosinis**

Derive premye  $g'(x) = -\sin x$ , ki donk  $g''(x)$  ta dwe opoze a derive  $\sin x$ .  
Nou jwenn  $g''(x) = -\cos x$ .

**Pwoblèm 120: Derive segon sinis ak konkavite**

**A.** Grafik  $f(x)$  la konkav anwo (koube anwo) nenpòt kote  $f''(x) > 0$ , ki se vre lè  $-\sin(x) > 0$ , oswa lè  $\sin(x) < 0$ . Grafik  $\sin(x)$  la enferyè a zewo sou entèval ki nan fòm  $((2k-1)\pi, 2k\pi)$ . Nan lis opsyon yo bay la, graf la konkav sou entèval la  $(\pi, 2\pi)$ ,  $(-\pi, -\frac{\pi}{2})$ , ak  $(3\pi, 4\pi)$ .

**B.** Chak fwa  $\sin(x)$  positif,  $f''(x) = -\sin(x)$  negatif, ki donk  $f$  konkav anba.

A

---

# Devwa 1 Pati A

---

## 1. Pati A: Pwoblèm

### Konsènan pwoblèm Pati A

Pwoblèm Pati A yo ede ou pratike mekanik kalkil la. Gen anpil pwoblèm ki kontinye lide yo ki te prezante nan sekans aprantisaj pi wo a.

---

## 2. Vitès

### Pwoblèm 121: 1A (1)

Yon ti tib tès sot tonbe anba yon gwo tèt kay ki a 400 pye anlè tè a. (Pou objektif nou, nou pral sipoze ke rezistans lè a neglijab.) Ti tib tès la tonbe  $16t^2$  pye nan  $t$  segonn.

(a) Kalkile vitès mwayèn nan de premye segonn tonbe a.

(Antre repons lan kòm yon nonb desimal. Sèvi ak konvansyon ke vitès ki desann yo negatif.)



(b) Kalkile vitès mwayèn nan de dènye segonn tonbe a.

(Antre repons lan kòm yon nonb desimal. Sèvi ak konvansyon ke vitès ki desann yo negatif.)



(c) Kalkile vitès enstantane a jis anvan ti tib tès la atèri.



### 3. Revizyon definisyon

#### Pwoblèm 122: 1A (2)

Kalkile derive fonksyon sa a dirèkteman apati definisyon an

$$f(x) = 1/(2x + 1)$$

Jwenn tout valè  $x$  – kote pant liy tanjant  $f$  la se  $+1$ ,  $0$ , oswa  $-1$ .

(Antre pwen yo kòm desimal ak 3 chif siyifikatif.)

$f'(x) =$

Pant  $+1$ :

Pant  $0$ :

Pant  $-1$ :

#### Pwoblèm 123: 1A (3)

Kalkile derive fonksyon sa a dirèkteman apati definisyon an

$$f(x) = 2x^2 + 5x + 4$$

Jwenn tout valè  $x$  – kote pant liy tanjant pou  $f$  la se  $+1$ ,  $0$ , ak  $-1$ .

(Antre pwen yo kòm desimal ak 3 chif siyifikatif.)

$f'(x) =$

Slope  $+1$ :

Slope  $0$ :

Slope  $-1$ :

**Pwoblèm 124: 1A (4)**

Ki limit sa a?

$$L = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{-7/4} - 1}{x - 1}$$

Konsèy: rezoud li pandan w ap ekri li kòm yon derive.

$L =$

---

**4. Liy tanjant****Pwoblèm 125: 1A (5)**

Jwenn ekwasyon pou liy tanjant grafik  $f(x) = 1/(2x + 1)$  la nan  $x = 1$ .

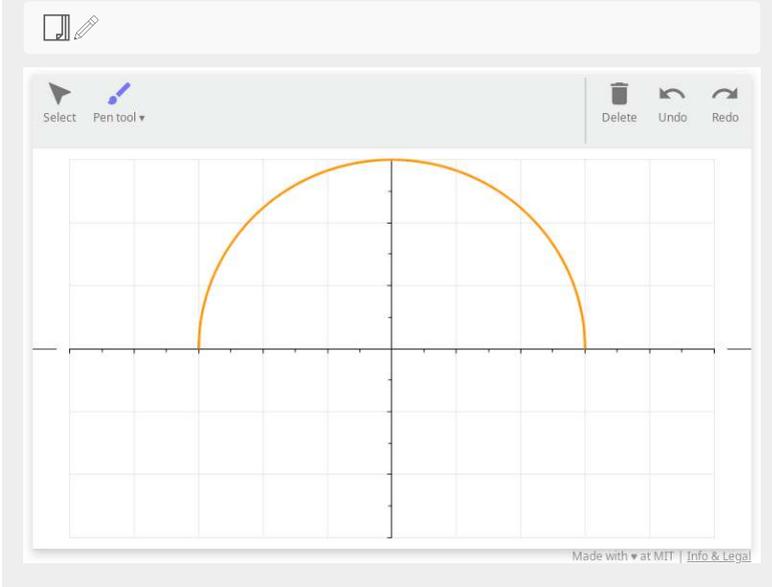
(Antre l nan fòm  $y = m * x + b$ .)

$y =$

## 5. Trase derive a

### Pwoblèm 126: 1A (6)

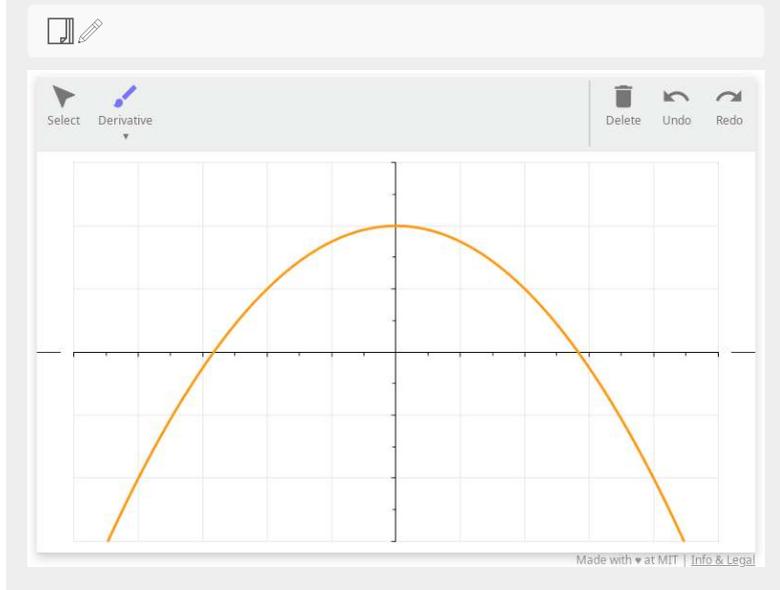
Desine derive fonksyon an ke yo montre an koulè oranj. Remake byen ke kare yo nan griy aks yo nan fon an se 1 inite pa 1 inite kòm dimansyon.



## 6. Trasaj derive a yon lòt fwa ankò.

### Pwoblèm 127: 1A (7)

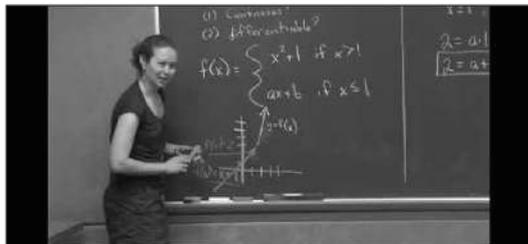
Trase derive fonksyon an nan espas yo bay anba a. Remake byen ke kare ki nan griy ak aks yo gen dimansyon 1 inite pa 1 inite. (Remake nou sèlman bezwen yon repons ki kòrèk an tèm de kalite. Pa bezwen eseye mezire pant yo avèk presizyon.)



## 7. Derivabilite

Pou ede w rezoud pwoblèm sa yo, ou ka kòmanse travay sou videyo resitasyon (travo pratik) sa a anvan.

 Videyo



**Pwoblèm 128: 1A (8)**

Jwenn valè konstan yo  $a$ ,  $b$  ak  $c$  pou fonksyon ki anba a diferansyab. (Bay  $a$  ak  $b$  an tèm de  $c$ .)

$$f(x) = \begin{cases} cx^2 + 4x + 1, & x \geq 1; \\ ax + b, & x < 1. \end{cases}$$

a=

b=

**Pwoblèm 129: 1A (9)**

Jwenn valè konstan  $a$  ak  $b$  pou fonksyon ki anba a kontini, men pa diferansyab.

$$f(x) = \begin{cases} ax + b, & x > 0; \\ \sin x, & x \leq 0. \end{cases}$$

a =

b =

---

**8. Polinòm****Pwoblèm 130: 1A (10)**

Jwenn derive polinòm sa a.

$$x^{10} + 3x^5 + 2x^3 + 4$$

**Pwoblèm 131: 1A (11)**

Jwenn derive polinòm ki anba a.

$$x^2 + \pi^3$$

**Pwoblèm 132: 1A (12)**

Jwenn yon polinòm  $p(x)$  ki gen derive li ki se polinòm ki ann aprè a, epi ki satisfè  $p(0) = 1$  ak  $p'(x) = x^6 + 5x^5 + 4x^3$ .

$$p(x) =$$

**Pwoblèm 133: 1A (13)**

Jwenn tout valè  $a$  ak  $b$  pou ki  $f(x)$  la diferansyab.

$$f(x) = \begin{cases} ax^2 + bx + 4, & x \leq 1; \\ 5x^5 + 3x^4 + 7x^2 + 8x + 4, & x > 1 \end{cases}$$

$$a =$$



$$b =$$

**9. Dezyèm derive****Pwoblèm 134: 1A (14)**

Kalkile  $y''$  pou  $y = 3x^2 + 2x + 4\sqrt{x}$ .



**Pwoblèm 135: 1A (15)**

Kalkile  $y''$  pou  $y = \frac{-5}{x} + 5$ .

**Pwoblèm 136: 1A (16)**

Kalkile  $y''$  pou  $y = \frac{x^2 + 5x}{x + 5}$ .



---

**10. Trig****Pwoblèm 137: 1A (17)**

Kalkile  $y^{(4)}$  pou  $y = \sin(x)$ .

**Pwoblèm 138: 1A (18)**

Kalkile  $y^{(103)}$  pou  $y = \sin(x)$ .



## Solisyon yo

### Pwoblèm 121: 1A (1)

(a)  $h =$  wotè tib  $= 400 - 16t^2$ .

$$\text{vitès mwayèn} \frac{h(2) - h(0)}{2} = \frac{(400 - 16 \cdot 2^2) - 400}{2} = -32\text{ft/sec}$$

(Siy mwens lan vle di tib tès la ap desann.)

(b) Rezoud  $h(t) = 0$  (oswa  $s(t) = 400$ ) pou jwenn tan aterisaj  $t = 5$ . Donk, vitès mwayèn nan de dènye segonn yo se

$$\frac{h(5) - h(3)}{2} = \frac{0 - (400 - 16 \cdot 3^2)}{2} = -128\text{ft/sec}$$

(c)

$$\begin{aligned} & \frac{h(t) - h(5)}{t - 5} \\ &= \frac{400 - 16t^2 - 0}{t - 5} = \frac{16(5 - t)(5 + t)}{t - 5} \\ &= -16(5 + t) \rightarrow -160\text{pye pa segonn as } t \rightarrow 5 \end{aligned}$$

**Pwoblèm 122: 1A (2)**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{h} \left[ \frac{1}{2(x+h)+1} - \frac{1}{2x+1} \right] \\ &= \frac{1}{h} \left[ \frac{2x+1 - (2(x+h)+1)}{(2(x+h)+1)(2x+1)} \right] \end{aligned} \quad (4.10)$$

$$= \frac{1}{h} \left[ \frac{-2h}{(2(x+h)+1)(2x+1)} \right] \quad (4.11)$$

$$= \frac{-2}{(2(x+h)+1)(2x+1)} \quad (4.12)$$

$$\rightarrow \frac{-2}{(2x+1)^2} \text{ as } h \rightarrow 0 \quad (4.13)$$

Paske  $-2/(2x+1)^2 < 0$  pou tout  $x$ , pa gen okenn pwen kote liy tanjant lan gen pant ki egal a 1 oswa 0. Pou pant  $-1$ ,

$$-2/(2x+1)^2 = -1 \quad (4.14)$$

$$\implies (2x+1)^2 = 2 \quad (4.15)$$

$$\implies 2x+1 = \pm\sqrt{2} \quad (4.16)$$

$$\implies x = -1/2 \pm \sqrt{2}/2 \approx .21, -1.2. \quad (4.17)$$

**Pwoblèm 123: 1A (3)**

$$\begin{aligned} & \frac{2(x+h)^2 + 5(x+h) + 4 - (2x^2 + 5x + 4)}{h} \\ &= \frac{2x^2 + 4xh + 2h^2 + 5x + 5h - 2x^2 - 5x}{h} \\ &= \frac{4xh + 2h^2 + 5h}{h} = 4x + 2h + 5 \\ &\rightarrow 4x + 5 \text{ as } h \rightarrow 0 \end{aligned}$$

Pant liy tanjant lan se 1 nan  $x = -1$ , 0 nan  $x = -5/4 = -1.25$ , epi  $-1$  nan  $x = -3/2 = -1.5$ .

**Pwoblèm 124: 1A (4)**

Poze  $f(x) = x^{-7/4}$ . Lè sa a, limit sa a se  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{f(x) - f(1)}{x - 1} = f'(1)$ . Kounye a, nou kalkile derive  $f(x)$  la dirèkteman olye nou eseye evalye limit sa a:  $f'(x) = -7/4x^{-11/4}$ , ak  $f'(1) = -7/4$ .

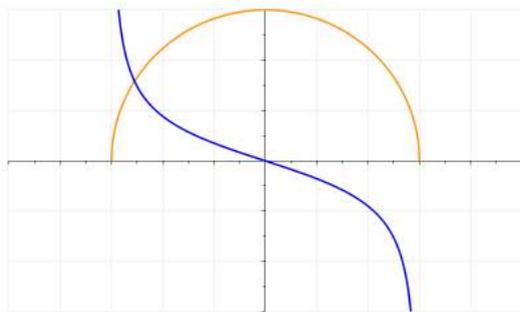
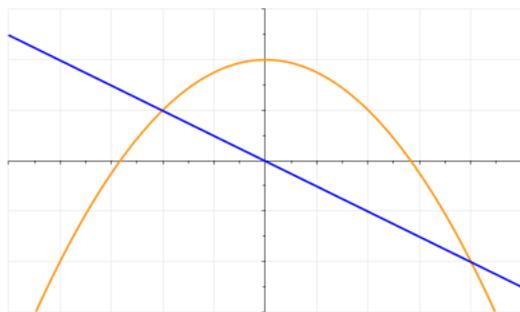
**Pwoblèm 125: 1A (5)**

Sèvi ak pwoblèm 1A (2),  $f'(1) = -2/9$  ak  $f(1) = 1/3$ , ki donk

$$y = -(2/9)(x - 1) + 1/3 = (-2x + 5)/9.$$

**Pwoblèm 126: 1A (6)**

Twa karakteristik prensipal yo se ke derive a se nil nan  $x = 0$ , e ke li ap pwoche lenfini nan  $x = -3$  ak mwens lenfini nan  $x = 3$ . Fonksyon ki (an oranj) lan ak tout derive l yo trase sou menm aks ki anba yo.

**Pwoblèm 127: 1A (7)**

**Pwoblèm 128: 1A (8)**

Pou fonksyon an ka diferansyab, li dwe kontini nan  $x = 1$ , epi derive bò gòch ak bò dwat nan  $x = 1$  dwe egal.

An n kòmanse ak derive yo. Lè n kalkile deriv adwat nan  $x = 1$  li bay  $2c + 4$ . Epi derive agoch nan  $x = 1$  se  $a$ . Lè nou egale yo, nou jwenn ke  $a = 2c + 4$ .

Koulye a, an n asire n ke li kontini. Nan  $x = 1$ , limit a-dwat la se  $c + 5$ ; limit agoch la se  $a + b$ . Lè nou egale yo, epi nou ranplase ekspresyon  $a$  an tèm de  $c$  nou jwenn sa ki anba a:

$$a + b = c + 5 \quad (4.18)$$

$$(2c + 4) + b = c + 5 \quad (4.19)$$

$$b = -c + 1. \quad (4.20)$$

$$2c + 4, \quad 1 - c$$

**Pwoblèm 129: 1A (9)**

Pou fonksyon an ka kontini, nou dwe verifye ke  $ax + b = \sin x$  nan  $x = 0$ , sa ki bay relasyon  $b = 0$ .

Fonksyon an PA diferansyab si derive a-goch ak derive a-dwat yo pa egal nan  $x = 0$ :

$$a \neq \cos 0 = 1 \quad (4.21)$$

Nan notasyon entèval, sa se

$$a \in (-\infty, 1) \quad \text{or} \quad (1, \infty) \quad (4.22)$$

**Pwoblèm 130: 1A (10)**

$$10x^9 + 15x^4 + 6x^2$$

**Pwoblèm 131: 1A (11)**

$$2x$$

**Pwoblèm 132: 1A (12)**

Travay ak chak tèm yo endividyèlman, ajoute yo ansanm, epi ajoute konstan ki apwopriye a ki fè polinòm nan gen valè kòrèk la nan zewo:

$$x^7/7 + (5/6)x^6 + x^4 + 1.$$

**Pwoblèm 133: 1A (13)**

$f(1) = a + b + 4$  ak  $f(1^+) = 5 + 3 + 7 + 8 + 4 = 27$ . Kidonk, pa kontinite,

$$a + b = 23$$

$$f'(1^-) = \lim_{x \rightarrow 1} 2ax + b = 2a + b; \quad f'(1^+) = \lim_{x \rightarrow 1} 25x^4 + 12x^3 + 1$$

Kidonk, diferansyabilite a enplike

$$2a + b = 59$$

Lè nou soustrè premye ekwasyon an,  $a = 59 - 23 = 36$  epi kon sa  $b = -13$ .

**Pwoblèm 134: 1A (14)**

$$6 - x^{-3/2}$$

**Pwoblèm 135: 1A (15)**

$$\frac{-10}{x^3}$$

**Pwoblèm 136: 1A (16)**

$$0$$

**Pwoblèm 137: 1A (17)**

Katriyèm derive a se  $\sin(x)$ .

**Pwoblèm 138: 1A (18)**

$$y^{(103)} = y^{(3)} = -\cos(x)$$

---

# Devwa 1 Pati B

---

## 1. Vitèsmèt

Kijan kontè vitès machin ou an travay pou detèmine a ki vitès ou ap kouri?

Kontè vitès elektrik modèn yo fonksyone gras ak leman mayetik ki plase sou aks wotasyon an anba yon detektè ki detekte pilsasyon yon chan mayetik chak fwa wou a fè yon wotasyon. Kontè vitès la sèvi ak tan ki ant pilsasyon yo, ak distans vwayaj yon sèl wotasyon kawotchou yo, pou kalkile vitès la.

Mwayen pou w reflechi: èske kontè vitès nan yon machin ap kalkile yon to varyasyon mwayèn oswa yon to varyasyon enstantane?

### Gade sa nou panse

Sa a aktyèlman se yon to varyasyon mwayèn, paske li pran yon varyasyon nan distans soti nan yon wotasyon kawotchou divize pa yon varyasyon nan tan ant yon pilsasyon chan mayetik ak sa k aprè a.

Se konsa, de tan yo tou pre youn ak lòt, ki donk sa a se yon trè bon apwoksimasyon pou vitès enstantane a, ki se limit kosyan an pandan de tan de mezi yo ap vin pi pre youn ak lòt. Kidonk, nan pratik, li OK pou panse sou lekti kontè vitès la kòm yon to varyasyon enstantane.

**Pwoblèm 139: Idantifye Enfòmasyon**

Klike sou tout enfòmasyon ki anba a ou ta itilize pou detèmine vitès la an kilomèt pa èdtan. (Atansyon: Panse sou inite yo!)

- A dyamèt wou a mezire an mè
- B tan ant pilsasyon chan mayetik la mezire an segonn
- C lajè traka kawotchou a mezire an santimèt
- D faktè konvèsyon ant segonn ak èdtan
- E faktè konvèsyon ant mè ak kilomèt
- F faktè konvèsyon ant santimèt ak kilomèt

**Pwoblèm 140: Detèmine fòmil**

An n sipoze  $d$  reprezante dyamèt kawotchou a an mè, epi  $T$  reprezante kantite segonn li pran pou wou a fè yon vire konplè. Jwenn yon fòmil pou vitès la an inite kilomèt pa èdtan an tèm kantite yo bay anwo a anvanm ak varyab  $d$  ak  $T$ .

**Pwoblèm 141: Jwenn vitès la**

An n sipoze wou a vire 1 fwa nan .08 segonn. Ki vitès yon machin ki gen wou ki gen yon dyamèt .22 m ? Antre repons ou an inite km/h.

(Antre yon nonb ki pi pre nonb antye relatif.)

**Pwoblèm 142: Chanje dyamèt kawotchou**

An n sipoze wou a vire 1 fwa nan .08 segonn. Ki vitès la si wou ou a gen yon dyamèt 1 m?

(Antre yon nonb ak 2 chif siyifikatif.)



**Pwoblèm 143: Erè Kalkil**

Ki sa ki rive si ou mete yon kawotchou ki pa gen bon gwosè sou machin ou?



Imaj **pou amizan**2 machin pa Stephanos Attart, itilize avèk pèmisyon. Òdinatè ki nan vitès mèt ou a pa konnen ou gen yon kawotchou ki gen yon gwosè diferan! Ki donk, li pral mal kalkile vitès la! Jwenn erè ki nan kalkil vitès mèt la si machin ou a sipoze gen wou ki gen dyamèt 0.22, men olye ou itilize yon kawotchou ki gen dyamèt 1m.

Nou jwenn erè a apati valè absoli diferans ki genyen ant vitès prevwa ak vitès aktyèl la, divize pa vitès aktyèl la. (Endikasyon, sèvi ak repons ki soti nan 2 pwoblèm ki anwo yo).

(Antre repons lan ak 2 chif desimal apeprè.)



**Pwoblèm 144: Erè admisib**

An n sipoze machin ou a ekipe ak kawotchou ki gen dyamèt 0.22m. Ki pi gwo chanjman ou ka fè nan dyamèt kawotchou a pandan w ap kenbe erè nan mezi vitès la anba 5

(Antre repons ou an inite mèèt ak 3 chif desimal apeprè.)

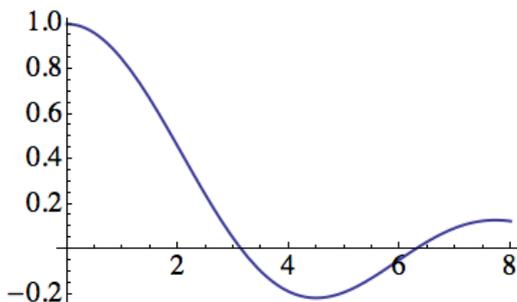


**2. Pozisyon, Vitès, ak Akselasyon**

**Sistèm mas ak resò**

Pwoblèm "trennen ak lage" ki vini apre a fè referans ak graf ki afiche isit la.

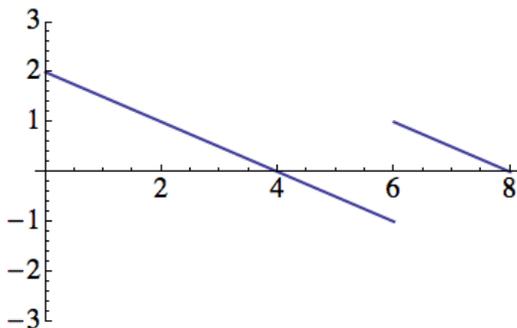
Yo bay yon fonksyon  $f(t)$  pa graf ki anba a ki reprezante deplasman yon mas ki atache ak yon resò ki gen fren.



Deplasman  $f(t)$  lwen sant lan.

**Yon boul ki rebondi**

Fonksyon ki aprè a reprezante vitès yon boul ki rebondi.



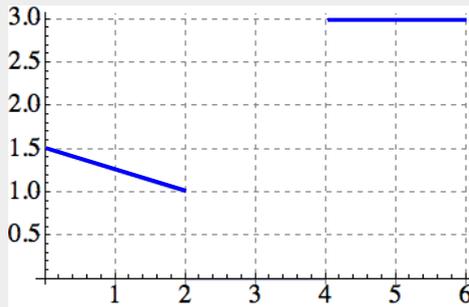
Vitès apwoksimatif  $v(t)$  yon boul ki rebondi.

### 3. Pak ak woulèt

#### Pwoblèm 145: Konsepsyon yon pak paten



Ou ap ede nan konsepsyon yon pak a woulèt (pak ak paten). Patinè (woulèt) yo tonbe desann soti nan platfòm ki 3 mètr wo sou bò dwat la. Yo ralanti yon ti kras pa ranp lan sou bò gòch la.



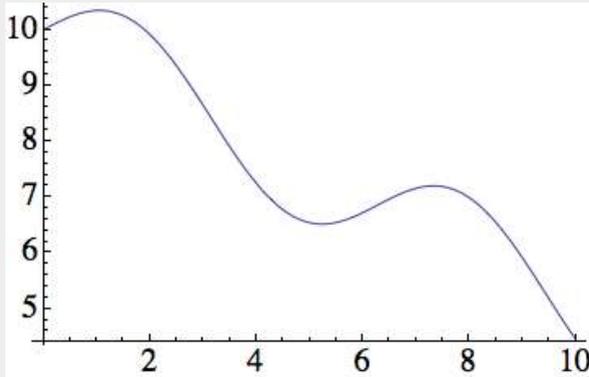
Ou vle konekte ranp lan sou bò gòch la ak platfòm nan sou bò dwat la atravè yon parabol kousa, koub ou jwenn lan kontini nan tou de  $x = 2$  ak  $x = 4$ . Ou vle tou pant liy tanjant nan parabol la koresponn ak pant ranp lan pou trajè a ka fèt dou.

Jwenn ekwasyon parabol  $f(x)$  la ki konekte de platfòm sa yo.

$$f(x) = \text{[input field with icons]}$$

**Pwoblèm 146: De pwen ki gen menm liy tanjant**

Gen yon ti pwoblèm ak pak paten ou te fè konsepsyon an. Patinè ki nan kòmansman yo ap toujou tonbe sou yon seksyon ti mòn ki yon ti kras difisil pou monte.



Solisyon ou te jwenn se mete yon planch sou de ti mòn yo pou aplati seksyon kote patinè yo ap tonbe a. Ou gen yon planch long, men ou bezwen detèmine ki longè pou koupe li. Pou fè sa, ou dwe idantifye de pwen ke planch la ap touche lè ou mete li nan yon vale. Ou te konsevwa ti mòn yo pou swiv koube  $y = \sin(x) - x/2 + 10$ .

Pant liy tanjant yo nan fonksyon sa a se menm pou nenpòt de pwen ki separe pa yon distans  $2\pi$ . wenn de pwen  $(x_0, f(x_0))$  ak  $(x_0 + 2\pi, f(x_0 + 2\pi))$  avèk  $0 < x_0 < 2$  ki gen liy tangant yo se **menm liy lan**.

(Si ou utilize yon apwoksimasyon nimerik, tanpri asire w ke li egzat jiska 4 chif dèyè vigil la.)

**Pwoblèm 147: Koupe planch la nan longè ki kòrèk la**

Ki longè planch ou dwe koupe?



## Solisyon yo

### Pwoblèm 140: Detèmine fòmil

Nou gen enfòmasyon ke wou a fè yon vire nan  $T$  segonn. Distans li fè nan  $T$  segonn sa a se apeprè perimèt wou a, ki se  $d\pi$  mètr. Ki donk, vitès mwayèn nan se  $d\pi/T$  an mètr pou chak segonn. Men, nou te dwe bay repons lan nan inite kilomèt pa èdtan, ki donk nou fè konvèsyon ki apwopriye yo:

$$\frac{d\pi}{T} \frac{\text{m}}{\text{s}} \cdot \frac{1 \text{ km}}{1000\text{m}} \cdot \frac{3600\text{s}}{1\text{hr}} = \frac{3.6d\pi}{T} \text{km/hr.}$$

### Pwoblèm 141: Jwenn vitès la

Lè n sèvi avèk fòmil nou te jwenn nan pwoblèm ki anwo a,

$$\frac{3.6(0.22)\pi}{0.08} \approx 31\text{km/hr.}$$

### Pwoblèm 142: Chanje dyamèt kawotchou

Lè n sèvi avèk fòmil nou te jwenn nan pwoblèm ki anwo a,

$$\frac{3.6(1)\pi}{0.08} \approx 140\text{km/hr.}$$

### Pwoblèm 143: Erè Kalkil

Nou konnen ke vitès la kalkile kòm:  $v = 3.6\pi d/T$ . Apre sa, lè dyamèt la ogmante pa kèk kantite  $\Delta d$ , nouvo vitès la aktyèlman se  $v = 3.6\pi(d + \Delta d)/T$ . Ki donk, erè a se diferans ant vitès aktyèl la ak vitès ki kalkile a, divize pa vitès aktyèl la. Apre sa, pran valè absoli a si li negatif.

$$\frac{3.6\pi(d + \Delta d)/T - 3.6\pi d/T}{3.6\pi(d + \Delta d)/T} = \frac{3.6\pi\Delta d/T}{3.6\pi(d + \Delta d)/T} = \frac{\Delta d}{d + \Delta d}.$$

Nan pwoblèm sa a,  $d = .22$ , ak  $d + \Delta d = 1$ , ki donk  $\Delta d = .78$ ; erè a se  $.78$ , sa ki vle di vitès ki kalkile a se 78% ki soti nan valè aktyèl la.

**Pwoblèm 144: Erè admisib**

Nou itilize erè nou te jwenn anvan, entwodui ladan l dyamèt ke nou te atann lan ki se 0.22 mè, epi rezoud pou chanjman pèmisib  $\Delta d$ .

$$\frac{\Delta d}{.22 + \Delta d} = .05$$

$$\Delta d = (.22)(.05) + .05\Delta d$$

$$.95\Delta d = (.22)(.05)$$

$$\Delta d = \frac{(.22)(.05)}{.95} \approx .01$$

Ki donk, chanjman nan dyamèt la ki pèmèt sèlman yon erè 5% nan kalkil vitès machin ou fè a se .01m oswa 1cm!

**Pwoblèm 145: Konsepsyon yon pak paten**

Yon parabol jeneral gen yon fòmil  $y = ax^2 + bx + c$ . Nou gen 3 konstan enkonni, e nou ka itilize enfòmasyon ki bay yo pou limite (kontrenn) ekwasyon an. Soti nan dyagram nan, nou wè ke parabol la pral pase nan pwen (2, 1) ak (4, 3). Sa a ba nou de ekwasyon

$$1 = 4a + 2b + c$$

$$3 = 16a + 4b + c$$

Nou ka mezire pant ranp lan apati de graf la. Nou jwenn ke pant ramp lan se  $-1/4$ . Nou vle pant liy tanjan la nan parabol nou an lè  $x = 2$  tou egal a  $-1/4$ .

Lè nou kalkile derive a, nou jwenn  $y' = 2ax + b$ , ki ba nou yon twazyèm ekwasyon:

$$\frac{-1}{4} = 4a + b$$

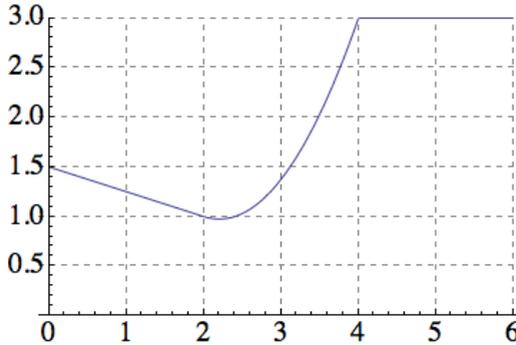
Nou gen 3 ekwasyon lineyè ak 3 enkonni, ke nou ka rezoud nan nenpòt metòd ou chwazi pou jwenn

$$a = \frac{5}{8}$$

$$b = -\frac{11}{4}$$

$$c = 4$$

Aprè ou fin bati yon ranp ki apwopriye ak parabol sa a, pak paten nou an pral sanble ak sa a.



$$\frac{5x^2}{8} - \frac{11x}{4} + 4$$

**Pwoblèm 146: De pwen ki gen menm liy tanjant**

Objektif nou se idantifye yon pwen  $x_0$  konsa liy tanjant nan koub  $f(x)$  la nan  $x_0$  gen menm pant ak liy sekant ki konekte  $(x_0, f(x_0))$  ak  $(x_0 + 2\pi, f(x_0 + 2\pi))$ .

Pant liy sekant lan se

$$\frac{f(x_0 + 2\pi) - f(x_0)}{(x_0 + 2\pi) - x_0} = \frac{(\sin(x_0 + 2\pi) - (x_0/2 + \pi) + 10) - (\sin(x_0) - (x_0/2 + \pi) + 10)}{2\pi}$$

Remake ke dènye egalite a ap gen sans piske  $\sin(x)$  se  $2\pi$  peryodik, sa vle di ke  $\sin(x_0 + 2\pi) = \sin(x_0)$ .

Tout sa ki rete se jwenn  $x_0$  konsa  $f'(x_0) = -1/2$ . Remake ke  $f'(x) = \cos(x) - 1/2$ . Kidonk  $f'(x_0) = -1/2$  lè  $\cos(x) = 0$ , ki rive lè  $x_0 = \pi/2$ .

Nan ka sa a de pwen nou konekte yo se

$$(\pi/2, 11 - \pi/4), \quad (5\pi/2, 11 - 5\pi/4).$$

**Pwoblèm 147: Koupe planch la nan longè ki kòrèk la**

Longè planch la se distans ant de pwen yo

$$(\pi/2, 11 - \pi/4), \quad (5\pi/2, 11 - 5\pi/4),$$

ke nou jwenn ak

$$\sqrt{((11 - \pi/4) - (11 - 5\pi/4))^2 + (\pi/2 - 5\pi/2)^2} = \sqrt{(\pi)^2 + (2\pi)^2} = \sqrt{5\pi}$$

$$\sqrt{5\pi}$$



# Inite 2: Derivasyon

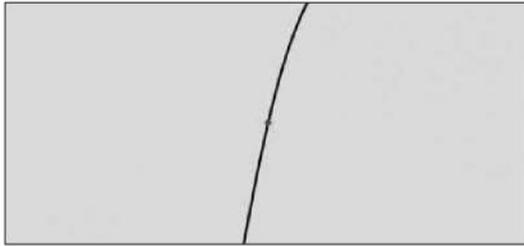
---

# Apwoksimasyon Lineyè

---

## 1. Motivasyon

 Videyo




---

## 2. Apwoksimasyon lineyè

Apwoksimasyon fonksyon ak derive

**Liy tanjant lan** nan  $x = a$  se yon bon apwoksimasyon pou **fonksyon an** tou pre  $x = a$ . **Pant liy sekant lan** ant  $x = a$  ak  $x = b$  se yon bon apwoksimasyon pou **derive a** ant  $x = a$  ak  $x = b$ .

Objektif

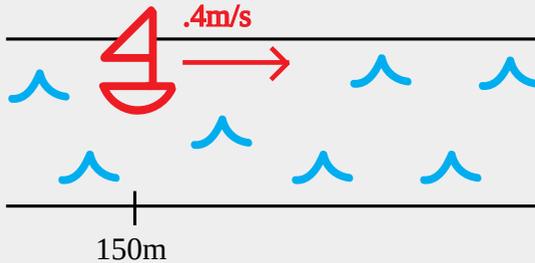
Nan fen sekans sa a, aprè kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Konprann kote **liy tanjant lan** se yon bon **apwoksimasyon lineyè** pou fonksyon an.
- Konprann kote **to varyasyon mwayèn nan** se yon bon **apwoksimasyon lineyè** pou **to varyasyon enstantane a**.
- **Apwoksime valè fonksyon yo** lè yo bay derive yo.
- **Apwoksime valè derive yo** lè yo bay done sou fonksyon an.
- Konprann kijan **konveksite/konkavite** fonksyon an afekte kalite **apwoksimasyon lineyè**, tou de nan yon sans kalitatif ak nan yon sans kantitatif.

### 3. Bato nan yon kanal

#### Pwoblèm 1: Yon bato nan yon kanal

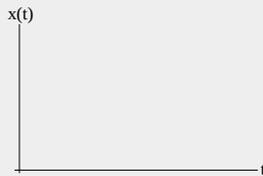
An n konsidere  $x = x(t)$  kòm pozisyon yon bato nan yon kanal kòm yon fonksyon tan, kote  $t$  mezire an segonn epi  $x$  mezire an mè. Sipoze ke nan  $t = 20$ , nou konnen ke bato a se nan pwen 150 mè nan kanal la e li ap wwayaje nan direksyon pozitif ak yon vitès de 0.4 mè pou chak segonn.



- |                                  |                                     |             |                                     |
|----------------------------------|-------------------------------------|-------------|-------------------------------------|
| An tèm de $x$ , sa a di ke 150 = | <input type="checkbox"/> A $x(20)$  | ak<br>0.4 = | <input type="checkbox"/> A $x(20)$  |
|                                  | <input type="checkbox"/> B $x(t)$   |             | <input type="checkbox"/> B $x(t)$   |
|                                  | <input type="checkbox"/> C $x'(20)$ |             | <input type="checkbox"/> C $x'(20)$ |
|                                  | <input type="checkbox"/> D $x'(t)$  |             | <input type="checkbox"/> D $x'(t)$  |

#### Pwoblèm 2: Grafik fonksyon an

A pati enfòmasyon nou genyen an, ki sa nou ka detèmine annapre sou graf  $x = x(t)$  a?



- A Sèlman pant liy tanjant lan sou grafik  $x(t)$  nan  $t = 20$
- B Tout liy tanjant lan sou grafik  $x(t)$  nan  $t = 20$
- C Tout liy tanjant yo sou grafik  $x(t)$      D Okenn nan sa yo

**Pwoblèm 3: Sipozisyon ki kache nan estimasyon**

Sonje enfòmasyon yo bay yo: nan  $t = 20$ , bato a se nan pwen 150 mètr nan kanal la e li ap deplase nan direksyon pozitif ak yon vitès de 0.4 mètr pou chak segonn.

Sipoze nou vle estime pozisyon bato a nan  $t = 30$ .

Sa a se jis yon estimasyon; nou pa konnen si bato a pral egzakteman nan pozisyon ki ekstrapole a.

Li ta egzakteman kòrèk si nou te garanti ke

- (A) pozisyon    (B) vitès    (C) akselerasyon

bato a ant  $t = 20$  ak  $t = 30$  pa janm chanje.

Nan lòt mo, li ta garanti si

- (A) pozisyon    (B) vitès    (C) akselerasyon

bato a pandan tan sa a te zewo.

**Pwoblèm 4: Ekstrapolasyon pozisyon fiti**

Sonje enfòmasyon yo bay la: nan  $t = 20$ , bato a se nan pwen 150 nan kanal la epi li ap deplase nan direksyon pozitif ak yon vitès 0.4 mètr pou chak segonn.

Ekstrapole pozisyon bato a nan  $t = 30$ .

(Reflechì sou inite nonb 20, 30, 150, and 0.4. Ki operasyon aritmetik ou ka fè ak nonb sa yo pou ou jwenn estimasyon ou an?)

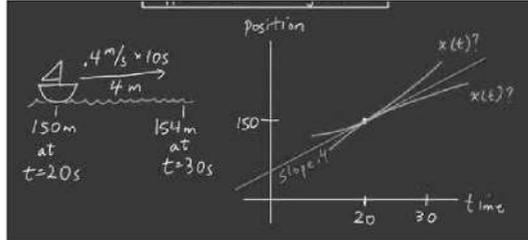
**Pwoblèm 5: Yon lòt estimasyon**

Nou ka fè yon estimasyon menm jan an pou pozisyon bato a nan  $t = 250$ . Èske ou ta gen plis konfyans nan estimasyon ou pou  $t = 30$  oswa pou  $t = 250$ ?

- (A)  $t = 30$     (B)  $t = 250$     (C) egalman konfyans

## 4. Liy tanjant apwoksimatif fonksyon an

 Videyo



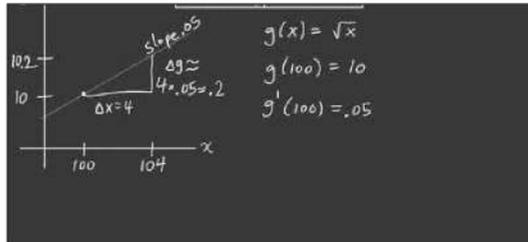
### Pwoblèm 6: Rasin kare

Itilize teknik ki dekri nan videyo a pou estime  $\sqrt{104}$  san yon kalkilatris, lè ou konnen ke ou ka jwenn  $\sqrt{100}$  ak derive fonksyon an tou  $g(x) = \sqrt{x}$  nan  $x = 100$ .



## 5. Videyo apwoksimasyon lineyè

 Videyo



## 6. Apwoksimasyon lineyè

Apwoksimasyon lineyè pou yon fonksyon  $f$  toupre yon pwen  $x = a$  bay pa fòmil ekivalan sa yo:

$$\Delta f \approx \frac{df}{dx} \Big|_{x=a} \cdot \Delta x \quad \text{for } \Delta x \text{ near } 0$$

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \text{ for } x \text{ near } a$$

### Pwoblèm 7: Apwoksimasyon pratik

Sèvi ak apwoksimasyon lineyè, **san yon kalkilatris**, pou estime  $3.97^{2.5}$ .



## 7. Depase Linyè

### Pwoblèm 8: Konkavite

Raple w nan videyo ki sot pase a ke  $g(x) = \sqrt{x}$ . Ki sa  $g''(100)$  bay?

$$g''(100) =$$



### Pwoblèm 9: Konkavite ak liy tanjant

Toujou pran  $g(x) = \sqrt{x}$  menm jan nan videyo anvan an, konpare graf  $g$  ak liy tanjant graf la nan  $x = 100$ . Nan vwazinaj  $x = 100$ , èske graf  $g$  anlè oswa anba liy lan? (Endikasyon: Sèvi ak repons ou te bay pou kesyon anvan an.)

- A anlè  B anba  C yon pati anlè, yon pati anba  D pa ka di

### Pwoblèm 10: Sirestime oswa Souzestime?

Nan videyo anvan an, pou  $g(x) = \sqrt{x}$  nou te estime ke  $g(104) \approx 10.2$ . Èske estimasyon sa a 10.2 pi wo pase valè reyèl la oswa pi ba? (Endikasyon: Sèvi ak repons ou te bay pou de dènye kesyon yo.)

**Pwoblèm 11: Bato tipik**

An n retounen sou bato a.

Sonje, nan  $t = 20$ , bato a te nan pwen 150 mètr nan kanal la epi li t ap vwayaje nan direksyon pozitif ak yon vitès 0.4 mètr pou chak segonn:

$$f(20) = 150 \quad (5.1)$$

$$f'(20) = 0.4. \quad (5.2)$$

Nou te estime ke nan  $t = 30$ , pozisyon bato a ta dwe 154 mètr;  $f(30) \approx 154$ .

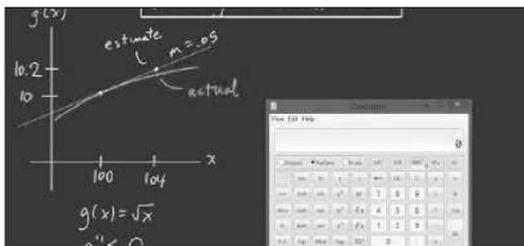
Èske estimasyon pozisyon sa a gen plis chans pou l pi egzat si bato a se yon tank lwil oliv oswa yon kannòt?

(Panse a sa kesyon sa a gen rapò ak kesyon anvan yo! )

A tank lwil    B kannòt    C egalman konfidan

**8. Konkavite**

 Videyo



---

## 9. Kèk pwoblèm

### Pwoblèm 12: Chanjman nan volim

Yon boul dwe fèt ak yon reyon 10cm. Si olye de sa, li fèt ak yon reyon 9.97cm, li ta pran ki kantite volim an mwens (an santimèt kib)? Pa sèvi ak yon kalkilatris.



Ki pousantaj diminisyon an?



### Pwoblèm 13: Ap retounen dèyè!

Sipoze olye de sa, nou di ou ke esfè a te fèt ak yon volim ki depase  $20\pi$  santimèt kib. An santimèt, ki reyon ou ta atann esfè sa a genyen?

(Pa sèvi ak yon kalkilatris. Antre repons lan ak 2 chif desimal.)



**Pwoblèm 14: Gwo revèy**

Egwi minit revèy la pwolonje sou 14 pye apati sant kadran revèy Tour Elizabeth la. Li pwente sou premye mak minit nan revèy la nan 7:01.



Sèvi ak apwoksimasyon lineyè pou estime konbyen pwent tèt Egwi minit lan ap deplase orizontalman ant 7:01 ak 7:02. Pa sèvi ak yon kalkilatris. (Endikasyon: apwoksimè apati pozisyon pwent egwi minit la nan 7:00.)



---

**10. Rezime****Apwoksimasyon Lineyè**

Apwoksimasyon lineyè pou yon fonksyon  $f$  tou pre yon pwen  $x = a$  bay pa fòmil ekivalan sa yo::

$$\Delta f \approx \left. \frac{df}{dx} \right|_{x=a} \cdot \Delta x \quad \text{for } \Delta x \text{ near } 0$$

$$f(x) \approx f'(a)(x - a) + f(a) \quad \text{for } x \text{ near } a$$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 1: Yon bato nan yon kanal

Pozisyon an bay pa  $x(20)$ . Vitès la nan  $t = 20$  se derive pozisyon an  $x'(20)$ .

A

C

### Pwoblèm 2: Grafik fonksyon an

Nou konnen ke  $x'(20)$  se pant liy tanjant lan sou grafik  $x(t)$  nan pwen  $(20, x(20))$ . Pwiske nou konnen tou valè  $x(20)$ , nou gen yon pwen ke liy sa a pase ladan l. Yon pant ak yon pwen ase pou detèmine tout liy lan.

Anvan ou kontinye, pran yon fèy papye epi trase yon imaj sou sa nou konnen sou grafik  $x(t)$ !

B

### Pwoblèm 3: Sipozisyon ki kache nan estimasyon

Estimasyon an ta egzak si bato a te kenbe menm vitès la  $0.4m/s$  pandan tout tan an. Yon vitès ki pa chanje se ekivalan a gen akselerasyon ki zewo.

B vitès

C akselerasyon

### Pwoblèm 4: Ekstrapolasyon pozisyon fiti

Nou ka fè ekstrapolasyon an sou baz vitès la yo bay nou an. Bato a ap vwayaje pandan 10 segonn ant  $t = 20$  ak  $t = 30$ , e vitès li nan kòmansman an se te  $0.4m/s$ . Pi bon estimasyon nou se ke li ta vwayaje anviwon 4 mètr ant de tan sa yo. Pwiske li kòmanse nan  $x(20) = 150m$ , estimasyon nou se ke li ta fini nan yon pozisyon ki se  $154m$ .

### Pwoblèm 5: Yon lòt estimasyon

Kalite ekstrapolasyon sa a soti nan vitès nan yon moman pi difisil pou fè pi lwen nan tan prediksyon an!

A

### Pwoblèm 6: Rasin kare

Nou ka kalkile  $g(100) = 10$  ak  $g'(100) = 0.05$ . Lè nou ap estime  $g(104)$ , nou remake ke  $\Delta x = 4$ , kidonk nou ka estime  $\Delta g \approx 0.05 \cdot 4 = 0.2$ . Ki donk  $g(104) \approx 10.2$ .

Sa nou fè isit la se yon egzanp sou apwoksimasyon lineyè. Pou plis detay ak yon diskisyon sistematik, gade videyo ki vin apre a!

**Pwoblèm 7: Apwoksimasyon pratik**

Poze  $f(x) = x^{5/2}$ . Lè sa a  $f'(x) = \frac{5}{2}x^{3/2}$ , ki donk

$$f(4) = 32, f'(4) = 20.$$

Pou l chanje pase de 4 a 3.97, itilize

$$\Delta x = -0.03.$$

Pakonsekan, lè n itilize apwoksimasyon lineyè,

$$\Delta f \approx (20)(-0.03) = -0.6.$$

nou ka estime

$$f(3.97) \approx 32 - 0.6 = 31.4.$$

**Pwoblèm 8: Konkavite**

$$g'(x) = \frac{1}{2}x^{-1/2}$$

$$g''(x) = -\frac{1}{4}x^{-3/2}.$$

Ki donk  $g''(100) = -\frac{1}{4000}$ .

**Pwoblèm 9: Konkavite ak liy tanjant**

Repons nou te bay anvan an di nou ke graf  $g$  a konkav pa naba toupre  $x = 100$ . Ki donk, graf la chita anba liy tanjant lan.

□

**Pwoblèm 10: Sirestime oswa Souzestime?**

Aproksimasyon 10.2 an sòti nan liy tanjant lan. Akòz konkavite a, graf  $g$  a chita anba liy tanjant lan. Ki donk 10.2 pi gwo pase valè reyèl  $g(104)$ .

**Pwoblèm 11: Bato tipik**

Kannòt la ka chanje vitès li pi vit pase tank lwil oliv la. Donk, eksprime pozisyon li nan fiti pandan  $n$  ap sèvi ak vitès nan  $t = 20$  an pi difisil. Gade pwochen videyo a pou plis detay!

A

**Pwoblèm 12: Chanjman nan volim**

Nou vle konnen diferans nan volim ant yon boul ki gen reyon 10cm ak yon boul ki gen reyon 9.97cm. To varyasyon volim nan pa rapò ak reyon an se

$$\frac{dV}{dr} = 4\pi r^2 \text{ cm}^3/\text{cm},$$

ki egal  $400\pi \text{ cm}^3/\text{cm}$  lè  $r = 10$ . Nan sitiyaasyon nou an,  $\Delta r = -0.03$  cm, ki donk nou estime  $\Delta V = 400\pi \cdot -0.03 = -12\pi$  santimèt kib. Repons lan se  $12\pi$ .

Volim orijinal la sipoze se  $4000\pi/3$ , ki fè  $12\pi$  reprezante  $0.9\%$  nan total la. Remake ke reyon an diminye pa  $0.3\%$ , kidonk pousantaj diminye nan volim lan se egzakteman 3 fwa plis. Sa ap toujou ka a, kèlkeswa reyon orijinal la ak pousantaj varyasyon an!

0.9  $12\pi$

**Pwoblèm 13: Ap retounen dèyè!**

Ankò, nou itilize lefèt ke lè  $r = 10$  cm,  $\frac{dV}{dr} = 400\pi \text{ cm}^3/\text{cm}$ .

La a, nou konnen ke  $\Delta V = 20\pi$  santimèt kib, kidonk nou ka estime ke sa a ta koresponn a

$$\Delta r \approx \frac{\Delta V}{\frac{dV}{dr}} = \frac{1}{20} \text{ cm}.$$

Donk, nou estime  $r \approx 10.05$  cm.

**Pwoblèm 14: Gwo revèy**

Pwoblèm sa a mande pou n fè anpil atansyon sou inite yo! Kowòdone  $x$  nan pwent lan se  $x = 14 \cos \theta$ , kote  $\theta$  se ang ki fòme ak orizontal la. Pou nou itilize rezilta estanda nou yo sou derive fonksyon trigonometrik la, nou dwe asime ke  $\theta$  an radyan!

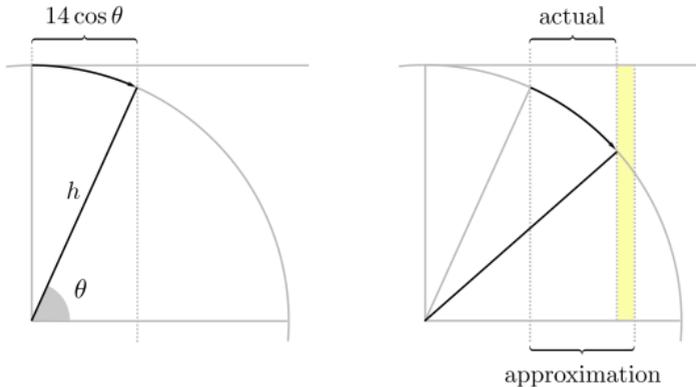
Yon minit alantou revèy la egal a  $\frac{\pi}{30}$  radyan. Lè revèy la chanje soti nan 7:01 pou ale nan 7:02,  $\theta$  chanje soti nan  $\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{30}$  pou ale nan  $\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{30}$ . Nou wè ke

$$\Delta\theta = -\frac{\pi}{30},$$

e sa rive tou pre ang  $\theta = \pi/2$ . Nan pwent sa a, nou kalkile

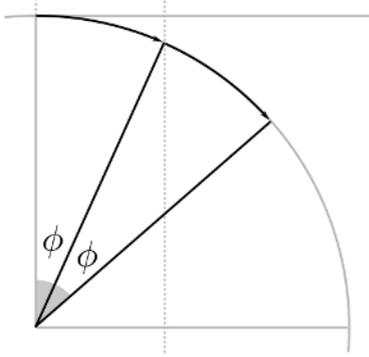
$$\frac{dx}{d\theta} = -14 \sin \theta = -14 \text{ feet/radian},$$

ki donk estimasyon nou pou  $\Delta x$  se  $-14 \cdot -\frac{\pi}{30}$ , oswa  $7\pi/15$  pye.



**Refleksyon**

Kijan ou ta abòde pwoblèm sa a si ang lan ki te mezire a soti nan aks vètikal la?



---

# Règ Pwodwi

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Règ pwodwi

Ki fonksyon nou ka diferansye jiskaprezan?

puisans  $x$

polinòm

sinis ak kosinis

**Objektif yo**

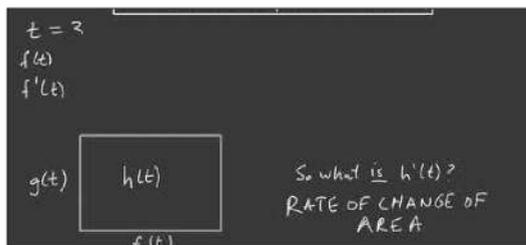
Nan fen sekans sa a, epi apre kèk pratik, ou ta dwe kapab:

- Diferansye (derive) **pwodui** fonksyon yo.



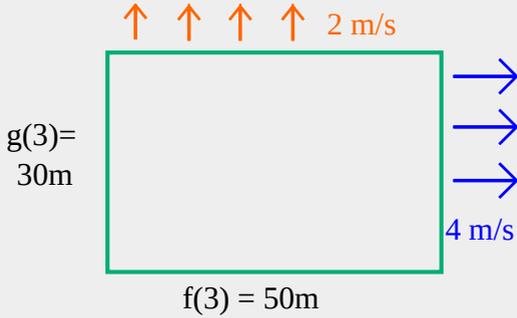
**Pwoblèm 18: Derivasyon pwodwi a**Nan ki inite yo mezire  $h'(t)$ ?**Pwoblèm 19: Èske yo matche?**Èske inite  $h'(t)$  yo koresponn ak inite  $f'(t) \cdot g'(t)$ ? A Wi  B Non

---

**5. Pwodwi derive yo?** Videyo

**Pwoblèm 20: K ap grandi an tèt**

Nan tan  $t = 3$ , nou konnen ke lajè rektang lan se  $f(3) = 50$  mè, epi nou te di ke wotè a ap grandi nan  $g'(3) = 2$  mè pa segonn. Ki vitès nou ap ogmante zòn ki sou tèt rektang lan?



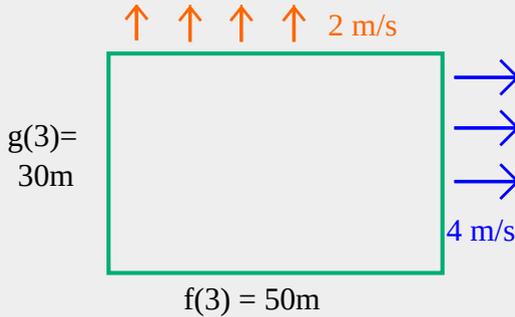
Nan ki inite repons ou an ye?

**6. Zòn kwasans**

Lajè a se 50mèt, epi tèt rektang lan ap monte (deplase) nan 2 mè pa segonn, ki donk, sou tèt la, nou ap ogmante zòn nan nan yon vitès  $50\text{m} \times 2 \text{ m/s}$ , oswa  $100\text{m}^2/\text{s}$ . Inite yo mache pafètman!

**Pwoblèm 21: Kwasans sou bò dwat la**

Sou bò dwat la, nan tan  $t = 3$ , nou gen wotè rektang lan ki se  $g(3) = 30$  mètr, epi nou te di ke lajè a ap grandi nan yon to  $f'(3) = 4$  mètr pa segonn. Ki vitès nou ap ogmante zòn ki sou bò dwat rektang lan?



Nan ki inite repons ou an ye?



**Pwoblèm 22: Zòn kwasans jeneral**

Konbine de repons yo, ki sa to kwasans jeneral zòn rektang lan ye?  
(Sèvi ak menm inite yo kòm sa yo anwo a.)



**7. Règ pwodwi**

Videyo



$t = 3 \text{ s}$   
 $f(3) = 50m$     $g(3) = 30m$     $h'(3) = ?$   
 $f'(3) = 4 \text{ m/s}$     $g'(3) = 2 \text{ m/s}$    Rate of change of area

ON TOP   ON RIGHT  
 $h'(3) = 50m \cdot 2 \text{ m/s} + 30m \cdot 4 \text{ m/s}$   
 $= f(3) \cdot g'(3) + g(3) \cdot f'(3)$   
 $= 220 \text{ m}^2/\text{s}$

## 8. Règ pwodwi

Si  $h(x) = f(x)g(x)$ , lè sa a

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

nan tout pwen kote derive  $f'(g(x))$  ak  $g'(x)$  yo defini.

## 9. Kèk pwoblèm

### Pwoblèm 23: Egzanp règ pwodwi

Jwenn derive  $j(x) = \sqrt{x} \cos x$ .



### Pwoblèm 24: Tonton McDonald

Tonton McDonald gen yon fèm. Pandan sezon sa a, li ap grandi yon melon ki trè gwo - kounye a pwa li se 100 liv e li kontinye ap grandi nan yon to 3 liv pa jou. Sepandan, pri mache a pou melon nan kounye a se 0.40 dola pa liv, e li ap diminye nan yon to de 0.01 dola pa liv pa jou.

An dola, ki valè aktyèl melon Tonton McDonald lan?



Se pou  $w(d)$  reprezante pwa melon an nan jou  $d$ , ak  $p(d)$  reprezante pri mache a pou yon liv melon nan jou  $d$ . Si  $v(d)$  se valè melon Tonton McDonald lan nan jou  $d$ , eksprime  $v(d)$  an tèm de  $w(d)$  ak  $p(d)$ .

$$v(d) = \text{[notepad and pencil icon]}$$

An dola pa jou, nan ki to valè melon Tonton McDonald lan sou mache ap chanje kounye a?



## 10. Règ pwodwi, fòmèlman

 Videyo



$$\begin{aligned}
 h(t) &= f(t) \cdot g(t) \\
 h'(t) &\approx \frac{\Delta h}{\Delta t} \\
 &\text{(ultimately want limit)} \\
 &\text{as } \Delta t \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \Delta h &= \overbrace{(f+\Delta f)(g+\Delta g)}^{\text{new } h} - \overbrace{f \cdot g}^{\text{old } h} \\
 &= f \cdot g + f \Delta g + g \Delta f + \Delta f \Delta g - f \cdot g \\
 \Delta h &= \underline{f \Delta g + g \Delta f} + \Delta f \Delta g \\
 \frac{\Delta h}{\Delta t} &=
 \end{aligned}$$


## 11. Bazik

### Pwoblèm 25: Egzanp 1

Èske nou bezwen sèvi ak règle pwodwi a pou diferansye  $j(x) = \sqrt[3]{x} \cos x$ ?

A Wi  B Non

### Pwoblèm 26: Egzanp 2

Èske nou bezwen sèvi ak règle pwodwi a pou diferansye  $k(x) = \pi x^5$ ?

A Wi  B Non

### Pwoblèm 27: Egzanp 3

Èske nou bezwen sèvi ak règle pwodwi a pou diferansye  $p(x) = \sin(60x)$ ?

A Wi  B Non

**Pwoblèm 28: Ki lè nou ka itilize règ pwodwi a?**

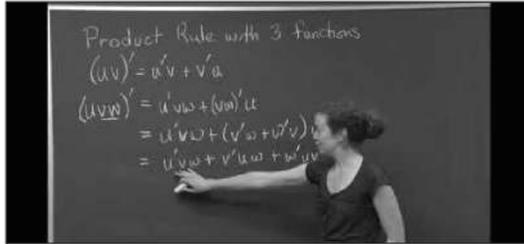
Sipoze nou konnen  $f(10) = 1776$ ,  $g(10) = \pi$ , ak  $h(10) = 1776\pi$ , e ke tout bagay sa yo, fonksyon yo diferansyab. Èske nou ka konkli ke

$$h'(10) = 1776g'(10) + \pi f'(10)?$$

A Wi  B Non

**12. Pratik règ pwodwi**

 Videyo

**13. Rezime**

**Règ pwodwi a**

Si  $h(x) = f(x)g(x)$ , lè sa a

$$h'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x)$$

nan tout pwen kote derive  $f'(g(x))$  ak  $g'(x)$  yo defini.

## Solisyon yo

### Pwoblèm 15: Pwodui derive yo?

Gade videyo anvan an!

### Pwoblèm 16: Prepare sèn nan

Derive yo toujou mezire an inite pwodiksyon pa inite antre. Nan ka sa a, sa se mètrè pa segonn, ki se yon vitès.

$$\frac{m}{s}$$

### Pwoblèm 17: Pwodwi a

Si  $f(t)$  se an mètrè ak  $g(t)$  se an mètrè tou, Lè sa a, pwodwi yo mezire an mètrè kare.

$$m^2$$

### Pwoblèm 18: Derivasyon pwodwi a

Sòti a  $h$  mezire an mètrè kare, epi antre a mezire an segonn, kidonk derive a mezire an mètrè kare pa segonn.

$$\frac{m^2}{s}$$

### Pwoblèm 19: Èske yo matche?

Pwiskè  $f'(t)$  ak  $g'(t)$  tou de mezire an  $m/s$ , pwodui yo mezire an  $m^2/s^2$ . Sa a pa matche ak inite  $h'(t)$ .

### Pwoblèm 20: K ap grandi an tèt

Gade pwochen paj la.

$$100 \frac{m^2}{s}$$

### Pwoblèm 21: Kwasans sou bò dwat la

30 mètrè multipliyè ak 4 mètrè pa segonn se 120 mètrè kare pa segonn.

$$120 \frac{m^2}{s}$$

**Pwoblèm 22: Zòn kwasans jeneral**

Nou ap ogmante zòn nan nan yon vitès de 100 mètr kare pa segonn sou tèt la, ak 120 mètr kare pa segonn sou bò dwat la, kidonk vitès kwasans total la se 220 mètr kare pa segonn.

220

**Pwoblèm 23: Egzanp règ pwodwi**

Fonksyon sa a se pwodwi de fonksyon. Premye faktè a se  $f(x) = \sqrt{x}$  epi dezyèm faktè se  $g(x) = \cos x$ ; nou konnen ki jan yo diferansye tou de sa yo. Aplike règ pwodwi a, nou wè ke

$$j'(x) = f(x)g'(x) + g(x)f'(x) = \sqrt{x} \cdot -\sin x + \cos x \cdot 0.5x^{-1/2}.$$

$$\frac{0.5 \cos(x)}{x^{0.5}} - \sqrt{x} \sin(x)$$

**Pwoblèm 24: Tonton McDonald**

Pri  $v(d)$  melon an nan jou  $d$  se pwa  $w(d)$  multipliyè ak pri pa liv  $p(d)$ . Kounye a sa a se 100 liv fwa 0.40 dola pa liv, oswa 40 dola. Pou jwenn to varyasyon pri aktyèl la,  $v'$ , nou bezwen itilize règ pwodwi a:  $v' = w \cdot p' + p \cdot w'$ . Nou gen tout valè sa yo nan moman aktyèl la, kidonk nou ka mete yo nan fòmil la epi jwenn 0.2 dola pa jou.

40, 0.2

**Pwoblèm 25: Egzanp 1**

Wi, sa se yon pwodui fonksyon  $\sqrt[3]{x}$  ak  $\cos x$ .

A

**Pwoblèm 26: Egzanp 2**

Non. Nou pa ka itilize règ pwodui a, tankou sa se pwodui fonksyon  $\pi$  ak  $x^5$ , men, li pa nesèsè: pwiske  $\pi$  se yon konstan, nou konnen ke derive  $\pi x^5$  se senpleman  $\pi$  multipliyè ak derive  $x^5$ , oswa  $\pi \cdot 5x^4$ .

B

**Pwoblèm 27: Egzanp 3**

Non. Fonksyon  $\sin(60x)$  se pa menm bagay la, tankou pwodui  $\sin x$  ak  $60x$ ; Olye de sa, se konpozisyon de de fonksyon yo. Nou pral aprann kijan pou nou derive konpozisyon nan seksyon Règ Chèn nan!

B

**Pwoblèm 28: Ki lè nou ka itilize règle pwodwi a?**

Sèl bagay nou konnen sou fonksyon  $h$  se valè li nan yon sèl pwen,  $x = 10$ . Sa a pa sifi pou detèmine anyen sou derive li. Pou aplike règle pwodwi a, nou bezwen  $h(x) = f(x)g(x)$  nan tout pwen  $x$  (oswa o mwen nan yon entèval de pwen), pa sèlman nan yon pwen.

**B**

# Règ Kosyan

## 1. Motivasyon

 Videyo



## 2. Règ kosyan an

Ki fonksyon nou ka diferansye jiskaprezan?

puisans  $x$   
 polinom  
 sinis ak kosinis  
 pwodui fonksyon debaz yo

**Objektif**

Nan fen sekans sa a, aprè kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Derive **kosyan fonksyon yo**.
- Jwenn derive tout **fonksyon trigonometrik**, ki gen ladan sekant ak tanjant.
- Derive règ puisans lan pou puisans antye negatif.

### 3. Miz an plas sèn nan

#### Pwoblèm 29: Miz an plas sèn nan

Poze  $f(t)$  ak  $g(t)$  se fonksyon yo, epi poze  $h(t) = f(t)g(t)$ .

Èske  $h'(t)$  egal ak pwodui  $f'(t)$  ak  $g'(t)$ ?

A Wi  B Non

Koulye a  $h(t) = f(t)/g(t)$ . Èske I kòrèk pou n konkli ke  $h'(t)$  se pral kosyan  $f'(t)/g'(t)$ ?

A Wi  B Non

#### Pwoblèm 30: Inite

Di  $t$  mezire an segonn,  $f(t)$  an vòlt, ak  $g(t)$  an mè. Ki inite  $h(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ ?



Ki inite  $\frac{dh}{dt}$ ? Itilize  $s$  pou segonn,  $V$  pou vòlt, ak  $m$  pou mè.

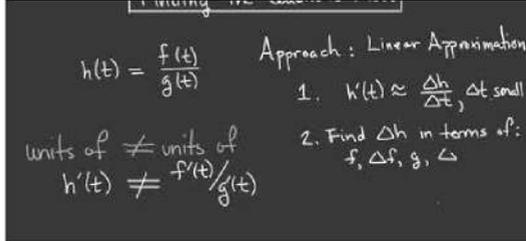


Ki inite yo nan kantite  $\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dg}{dt}}$ ?



## 4. Entwodiksyon règ kosyan an

 Videyo



### Pwoblèm 31: Idantifye varyasyon h

Poze  $h(t) = f(t)/g(t)$ . An tèm de  $f, g, \Delta f$ , ak  $\Delta g$ , ki sa  $\Delta h$  ye?

(Si w pa sonje kòman yo itilize notasyon  $\Delta$ , ou ka vle revize videyo règ pwodwi a.)

A  $\frac{\Delta f}{\Delta g}$   
  B  $\frac{\Delta f}{g}$   
  C  $\frac{f}{g} + \frac{\Delta f}{\Delta g}$   
  D  $\frac{f + \Delta f}{g}$   
  E  $\frac{f + \Delta f}{g + \Delta g}$

F  $\frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} - \frac{f}{g}$

## 5. Pwochen etap yo

### Problèm 32: Idantifikasyon limit 1

Nou pral jwenn yon denominatè komen pou senplifye ekspresyon ou te jwenn lan nan yon sèl tèm:

$$\Delta h = \frac{(f + \Delta f)g}{(g + \Delta g)g} - \frac{f(g + \Delta g)}{(g + \Delta g)g} = \frac{\Delta f \cdot g - f \cdot \Delta g}{g^2 + g \cdot \Delta g}.$$

Natirèlman, nou toujou bezwen divize pa  $\Delta t$  epi pran yon limit lè  $\Delta t$  ap pwoche zewo. Men sa nou jwenn lè nou divize pa  $\Delta t$ :

$$\frac{\Delta h}{\Delta t} = \frac{(g \cdot \Delta f - f \cdot \Delta g)}{\Delta t(g^2 + g \cdot \Delta g)} = \frac{(g \cdot \Delta f - f \cdot \Delta g)}{\Delta t} \cdot \frac{1}{g^2 + g \cdot \Delta g}.$$

Ki limit  $\frac{\Delta f \cdot g - f \cdot \Delta g}{\Delta t}$  pandan  $\Delta t \rightarrow 0$ ?

- A  $g' \cdot f'$   
  B  $g' - f'$   
  C  $f' - g'$   
  D  $f \cdot g - f' \cdot g'$   
  E  $g \cdot f' - f' \cdot g$   
 F  $f \cdot g' - g \cdot f'$   
  G 0  
  H Okenn nan pi wo a

### Problèm 33: Idantifikasyon limit 2

Ki limit  $g^2 + g \cdot \Delta g$  pandan  $\Delta t \rightarrow 0$ ?

- A  $g$   
  B  $g'$   
  C  $g^2$   
  D  $2g^2$   
  E  $g \cdot g'$   
  F  $g^2 + g'$   
  G  $g^2 + g \cdot g'$   
  H 0  
 I Okenn nan pi wo a

### Videyo



If  $h(t) = \frac{f(t)}{g(t)}$ , then  $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta h}{\Delta t}$

$$h'(t) = \frac{f'(t)g(t) - f(t)g'(t)}{(g(t))^2}$$

whenever  $f(t)$  &  $g'(t)$  exist  
 AND  $g(t) \neq 0$

Example:  $\tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$   
 $\frac{d}{dx} \tan(x) = \frac{\cos(x) \cdot \cos(x) - \sin(x) \cdot (-\sin(x))}{\cos^2(x)}$

## 6. Règ kosyan an

Si  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  pou tout  $x$ , lè sa a a

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

nan tout pwen kote  $f$  ak  $g$  yo diferansyab epi  $g(x) \neq 0$ .

### Pwoblèm 35: Règ kosyan an pratik

Poze  $f(x) = \frac{2 + \cos(x)}{x^2 + 1}$ . Kalkile  $f'(x)$ . (Pa eseye senplifye! Repons lan konplike.)



## 7. Règ kosyan an: yon siyifikasyon

Nimeratè règle kosyan an sanble ak règle pwodwi, eksepte youn nan tèm yo soustrè nan lòt la. Sa fè li enpòtan pou sonje ki tèm ki vini an premye! Kèk kesyon k ap vini yo ap ede ou devlope yon entwisyon sou ki tèm yo soustrè ak poukisa.

### Pwoblèm 36: Chanjman nimeratè a

Sipoze ke tou de  $f(x)$  ak  $g(x)$  yo pozitif.

Si  $f(x)$  ap ogmante (kwansan), si w kenbe  $g$  fiks, èske sa ta ogmante rapò  $h(x) = f(x)/g(x)$  oswa diminye li?

A Ogmante  B Diminye  C Ni youn ni lòt

Baze sou repons ou an, epi toujou kenbe  $g$  fiks, èske siy  $f'(x)$  ta dwe menm ak siy  $h'(x)$ , oswa opoze?

A Menm siy  B Siy opoze  C Ni youn ni lòt

**Pwoblèm 37: Chanjman denominatè a**

Ankò, sipoze ke tou de  $f(x)$  ak  $g(x)$  yo pozitif.

Si  $g(x)$  ap ogmante, toujou kenbe  $f$  fiks, èske sa ta ogmante rapò a

$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  oswa diminye l?

- A Ogmante  B Diminye  C Ni youn ni lòt

Baze sou repons ou an, epi toujou kenbe  $f$  fiks, èske siy  $g'(x)$  ta dwe menm ak siy  $h'(x)$ , oswa opoze?

- A Menm siy  B Siy opoze  C Ni youn ni lòt

**Rapèl règ kosyan an**

Ou ka vle jwenn yon mnemonik pou sonje règ kosyan an.

Youn nan fason pou sonje li se mete rim sa a nan yon chante:

Derive ki sou tèt la miltipliye ak anba a,  
mwens sa k anlè miltipliye ak derive sa k anba a,  
koulye a, ou pa bezwen pè,  
men, sou anba a li kare.  
Sa a se kalkil;  
sa a se kalkil;  
sa a se kalkil.

Pataje pwòp teknik ou sou kijan pou sonje règ kosyan an!

---

**8. Règ puisans revize****Pwoblèm 38: Tcheke konsèp**

Si  $f(x)$  se yon non-zewo ak diferansyab, lè sa a derive fonksyon  $1/f(x)$  la se  $1/f'(x)$ .

- A Vre  B Fo

 Videyo


( $n$  positive integer)

$$h(x) = x^{-n} = \frac{1}{x^n} = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad f(x) = 1, \quad g(x) = x^n$$

$$h' = \frac{f'g - g'f}{g^2} = \frac{0 \cdot x^n - (n \cdot x^{n-1}) \cdot 1}{x^{2n}} = -n \cdot x^{n-1-2n} = -n \cdot x^{-n-1}$$

$$\frac{d}{dx} x^{-n} = -n \cdot x^{-n-1}, \quad n \text{ positive integer}$$

**Pwoblèm 39: Pratik règ kosyan 2**

Sonje ke  $\sec x = \frac{1}{\cos x}$ . Jwenn derive  $\sec x$ .




---

**9. Pratique règ kosyan an**
 Videyo


Quotient Rule

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

Find  $\frac{d}{dx}(\tan x)$  using the quotient rule.

(Hint:  $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$ )

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{\cos x} \right) = \frac{\cos^2 x - \sin^2 x}{\cos^2 x}$$

---

**10. Derive fonksyon trigonometrik yo**

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$$

---

## 11. Fondamantal yo

### Pwoblèm 40: Ki règ nou ta dwe itilize?

Ki règ ki pi pratik pou itilize pou diferansye  $\frac{5}{x^4}$ ?

A Règ puisans  B Règ kosyan

Ki règ ki pi pratik pou itilize pou diferansye  $\frac{x^2}{x^3 + 1}$ ?

A Règ puisans  B Règ kosyan

Ki règ ki pi pratik pou itilize pou diferansye  $\frac{x + \sqrt{x}}{\cos(1)}$ ?

A Règ puisans  B Règ kosyan

### Pwoblèm 41: Yon lòt fonksyon

Èske nou ka itilize règ kosyan an pou diferansye  $\sin(1/x)$ ?

A Wi  B Non

---

## 12. Rezime

### Règ kosyan an

Si  $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$  pou tout  $x$ , lè sa a a

$$h'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}$$

nan tout pwen kote  $f$  ak  $g$  yo diferansyab epi  $g(x) \neq 0$ .

**Derive fonksyon trigonometrik yo**

$$\frac{d}{dx} \sin x = \cos x$$

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\frac{d}{dx} \tan x = \frac{1}{\cos^2 x} = \sec^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \cot x = -\frac{1}{\sin^2 x} = -\csc^2 x$$

$$\frac{d}{dx} \sec x = \frac{\sin x}{\cos^2 x} = \sec x \tan x$$

$$\frac{d}{dx} \csc x = -\frac{\cos x}{\sin^2 x} = -\csc x \cot x$$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 29: Miz an plas sèn nan

Si w pa abitye ak sa a, si li pa familye pou ou, ou ta dwe revize segman règ pwodwi a ankò!

### Pwoblèm 30: Inite

Rezilta  $h$  la mezire an  $V/m$  epi antre li yo mezire an  $s$ . Sepandan, derive li yo ta dwe mezire an  $(V/m)/s$ , oswa  $V/(m \cdot s)$ .

Sepandan,  $\frac{df}{dt}$  mezire an  $V/s$  ak  $\frac{dg}{dt}$  mezire an  $m/s$ , kidonk inite tan yo anile

nan  $\frac{\frac{df}{dt}}{\frac{dg}{dt}}$ , ki mezire an  $(V/s)/(m/s) = V/m$ .

$$\frac{V}{m}, \quad \frac{V}{ms}, \quad \frac{V}{m}$$

### Pwoblèm 31: Idantifye varyasyon h

$\Delta h$  egal ak nouvo valè  $h$  la, mwens valè orijinal  $h$  la. nouvèl valè  $f$  la se  $(f + \Delta f)$ , epi nouvèl valè  $g$  a se  $(g + \Delta g)$ , pakonsekan nouvo valè  $h$  la se  $(f + \Delta f)/(g + \Delta g)$ . Nou konnen ke valè orijinal  $h$  la se  $f/g$  orijinal la, ki donk lè nou soustrè li, nou jwenn

$$\Delta h = \frac{f + \Delta f}{g + \Delta g} - \frac{f}{g}.$$

**Pwoblèm 32: Idantifikasyon limit 1**

An n ekri premye ekspresyon an nan yon fòm ki pi sijestif:

$$\frac{\Delta f \cdot g - f \cdot \Delta g}{\Delta t} = \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot g - f \cdot \frac{\Delta g}{\Delta t}.$$

Koulye a nou ka pran limit la pandan  $\Delta t \rightarrow 0$ :

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} \cdot g - f \cdot \frac{\Delta g}{\Delta t} = f' \cdot g - f \cdot g',$$

Yon verifikasyon atantif montre nou ke li pa koresponn ak okenn nan opsyon yo montre yo. Ki donk repons lan se okenn nan pi wo yo.

H

**Pwoblèm 33: Idantifikasyon limit 2**

Pou analize limit ekspresyon sa a, note ke pandan  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta g \rightarrow 0$ , ki donk

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} g^2 + g \cdot \Delta g = g^2 + g \cdot 0 = g^2.$$

C

**Pwoblèm 35: Règ kosyan an pratik**

$$\frac{d}{dx} \frac{2 + \cos(x)}{x^2 + 1} = \frac{-(x^2 + 1) \sin(x) - 2x(2 + \cos(x))}{(x^2 + 1)^2}$$

$$\frac{-2x(\cos(x)+2) + (-x^2-1) \sin(x)}{(x^2+1)^2}$$

**Pwoblèm 36: Chanjman nimeratè a**

Si nimeratè a ap ogmante, sa ta ogmante rapò total la. Sa vle di ke.  $f'$  ta dwe gen menm siy ak  $h'$ .

A

A

**Pwoblèm 37: Chanjman denominatè a**

Si denominatè a ap ogmante, sa ta diminye rapò total la. Sa vle di ke  $g'$  ta dwe gen siy opoze ak  $h'$ .

 B

 B
**Pwoblèm 38: Tcheke konsèp**

Non! Remake ke  $1/f(x)$  se yon kosyan. Pou pran derive li, nou ka itilize règ kosyan an, e nou jwenn

$$\frac{-f'(x)}{f(x)^2}.$$

 B
**Pwoblèm 39: Pratik règ kosyan 2**

Nou itilize règ kosyan an sou  $\frac{1}{\cos x}$ . Remake ke derive nimeratè a se 0. Se konsa, nou jwenn

$$\frac{d}{dx} \sec(x) = \frac{\cos x \cdot 0 - 1 \cdot (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{\sin x}{\cos^2 x}.$$

Yon moun ka re-ekri sa kòm  $\frac{1}{\cos x} \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x$  si yo vle.

**Pwoblèm 40: Ki règ nou ta dwe itilize?**

Dezyèm fonksyon an se li menm sèlman ki mande règ kosyan an.

Pou premye fonksyon an, li posib pou itilize règ kosyan an tou, men li pi fasil pou reekri fonksyon an kòm  $5x^{-4}$ , nan ka sa a nou sèlman bezwen sèvi ak règ puisans lan.

Pou twazyèm fonksyon an, sonje ke denominatè  $\cos 1$  se yon konstan. Ki donk, fonksyon an se  $Kx + K\sqrt{x}$ , kote  $K = \frac{1}{\cos 1}$ , epi nou ka jis itilize règ nou yo sou diferansyasyon yon konstan fwa yon fonksyon.

 A

 B

 A

**Pwoblèm 41: Yon lòt fonksyon**

Remake ke sa a pa yon kosyan ditou. Nou ap pran sinis pou  $1/x$ , pa divize  $\sin x$  ak  $x$ . Nou pral bezwen yon règ konplètman nouvo pou ede nou derive fonksyon sa a!

□ B

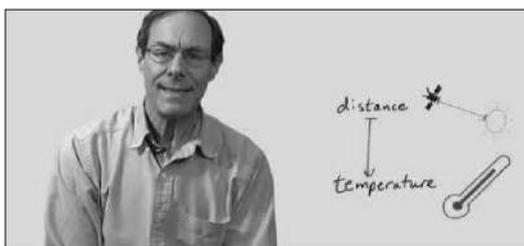
---

# Règ Chèn

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Règ chèn nan

Ki fonksyon nou ka derive jiska kounye a?

puisans  $x$

Fonksyon trigonometrik

Sòm fonksyon debaz yo

Pwodwi fonksyon debaz yo

Kosyan (Rapò) fonksyon debaz yo

**Objektif**

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Derive **konpozisyon** fonksyon yo.

### 3. Chanjman inite

#### Pwoblèm 42: Chanjman inite

Nou souvan vle ajiste yon fonksyon lè nou chanje inite sou antre (komann) oswa soti (rezilta) fonksyon an. Pa egzanp, nou ka vle mezire tan an minit olye de segonn. Nan kèk pwochen pwoblèm sa yo, nou pral wè kijan sa afekte derive yo.

Sipoze ke varyab  $x$  la mezire pozisyon yon bisiklèt sou yon wout, an mè, epi  $t$  sa a mezire kantite tan ki pase depi kòmansman trajè a an minit, pandan ke  $u$  mezire menm tan an an segonn.

Ki relasyon ki genyen ant  $u$  ak  $t$ ?

$u =$

#### Pwoblèm 43: Derivasyon

Pozisyon  $x$  la se yon fonksyon tan. Nou ka ekri li swa kòm yon fonksyon  $u$  oswa  $t$ , piske tou de se varyab tan. Pou fè distenksyon, an n di  $x = f(u)$  epi  $x = g(t)$ .

Sipoze  $f(u) = 2u + 100$ . Ki sa  $\frac{dx}{du}$  ap bay?

Nan ki inite  $\frac{dx}{du}$  mezire?

**Pwoblèm 44: Faktè echèl**

Yo bay fòmil nou an pou  $x$  an tèm de  $u$ , ki sa ki fòmil la pou  $x$  an tèm de  $t$ ?

$$x = g(t) =$$



Ki sa  $\frac{dx}{dt}$  bay?



Nan ki inite  $\frac{dx}{dt}$  mezire?

**Videyo**

Handwritten notes on a chalkboard showing the chain rule derivation:

$$u = 60t$$

$$x = f(u) = 2u + 100 \quad \frac{dx}{du} = f'(u) = 2 \text{ m/s}$$

$$\frac{dx}{dt} = g'(t) = 120 \text{ m/min}$$

$$x = g(t) = f(u)$$

$$g'(t) \neq f'(u)$$

Labels:  $u$  seconds,  $t$  minutes.

**4. Yon lòt pwen de vi**

An n gade yon lòt fason nou ka reflechi sou sa. Sipoze nou gen yon fonksyon ki se yon konpozisyon de de lòt fonksyon,  $h(x) = f(g(x))$ , e nou vle reflechi sou  $h'(2)$ . Sipoze ke

$$g(2) = 9 \quad \text{and} \quad (5.3)$$

$$f(9) = 5, \quad \text{so} \quad (5.4)$$

$$h(2) = 5. \quad (5.5)$$

Anplis de sa, nou pral di ke 2 a refere ak 2 segonn, 9 la refere ak 9 mè, epi 5 lan refere ak 5 kilogram.

(Itilize done sa yo nan tout pwoblèm ki ann apre yo sou paj sa a.)

**Pwoblèm 45: Chanjman kòmman**

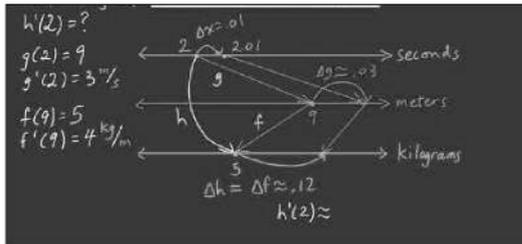
An n sipoze ke  $g'(2) = 3$  mètr pou chak segonn. Ki pi bon estimasyon ou pou  $g(2.01)$ ?

**Pwoblèm 46: Chanjman kòmman 2**

Kounye a an n sipoze ke  $f'(9) = 4$  kilogram pou chak mètr. Ki pi bon estimasyon ou pou  $f(g(2.01))$ ?

**Pwoblèm 47: Mete tout ansanm**

Remake ke ou te jis estime  $f(g(2.01))$ , ki se menm bagay ak  $h(2.01)$ . Nou konnen ke  $h(2) = 5$ , ki donk nou konnen apeprè konbyen  $h$  chanje pandan kòmman (antre) nou te deplase soti nan 2 a 2.01. Avèk sa, ki sa ou panse,  $h'(2)$  ta dwe ye apeprè?

**5. Konpozisyon ak Anchènman****📺 Videyo**

**Pwoblèm 48: konfigirasyon chèn a twa mayon**

Kounye a sipoze ke  $h(x) = j(f(g(x)))$ , epi nou vle reflechi sou  $h'(2)$ . An n di ke  $g(2) = 9$ ,  $f(9) = 5$ , ak  $j(5) = 7$ . Ki valè  $j'$  ki pi enpòtan nan detèmine  $h'(2)$ ?

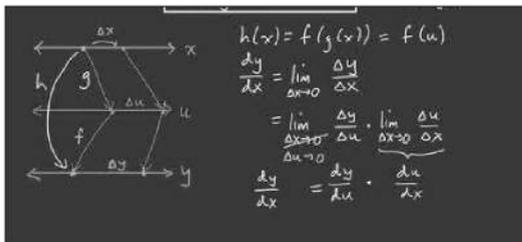
- A  $j'(2)$     B  $j'(5)$     C  $j'(7)$     D  $j'(9)$

**Pwoblèm 49: Chèn a twa mayon**

Pran  $h, j, f, g$  nan kesyon anvan an. Sipoze ke  $g'(2) = 3$  ak  $f'(9) = 4$ . Si  $j'(z) = 2z$  pou tout valè  $z$ , ki sa  $h'(2)$  ap bay?

**6. Derivasyon Règ chèn nan**

 Videyo

**7. Règ chèn nan**

Si  $h(x) = f(g(x))$ , ebyen

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

nan tout pwèn kote derivasyon  $f'(g(x))$  ak  $g'(x)$  yo defini.

Altènativman, si  $y = f(u)$ , ak  $u = g(x)$ , lè sa a

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=g(a)} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a}$$

nan nenpòt pwen  $x = a$  kote derivasyon yo sou bò dwat la defini.

## 8. Egzanp 1

### Pwoblèm 50: Fonksyon Entèn

Nou vle derive  $p(x) = \cos^3 x$ . Nou ka itilize règ chèn lan si nou rekonèt  $p(x)$  kòm yon konpozisyon  $f(g(x))$ . Kiyès nan fonksyon ki annapre yo ta dwe jwe wòl fonksyon entèn lan  $g(x)$ ?

- A  $x$   
  B  $\cos x$   
  C  $x^3$   
  D  $\cos^3 x$   
  E Okenn nan yo.

### Videyo



$p(x) = \cos^3 x$   
 To calculate  $p'(x)$ :  
 First take cosine of  $x$ . ← inner  
 Then cube the result. ← outer funct.

$$h(x) = f(g(x)) = f(u)$$

$$h'(x) = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

$$= f'(u) \cdot g'(x)$$

$y = p(x) = u^3$        $u = \cos x$   
 $p'(x) = 3u^2 \cdot u' = 3(\cos x)^2 \cdot (-\sin x)$   
 $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \cdot \frac{du}{dx}$

### Pwoblèm 51: Egzanp 2

An n poze  $f(x) = \sqrt{x^3 + 2x + 1}$ . Kalkile  $f'(1)$ .



### Pwoblèm 52: Egzanp 3

An n poze  $g(x) = \sin(x^2 + 2x)$ . Kalkile  $g'(x)$ .



## 9. Fonksyon ki pi konplike

 Videyo



How would you compute  $f(x)$ ?

$$f(x) = \sqrt{x} \tan(x^2)$$

$$= g(x) \cdot h(x)$$

$$f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + h'(x) \cdot g'(x)$$

$$= x^{1/2} (\tan(x^2))' + \tan(x^2) \cdot (x^{1/2})'$$

$g(x) = \sqrt{x} = x^{1/2}$  (POWER)  
 $h(x) = \tan(x^2) = h(g)$  (COMPOSE w/ Tan)  
 MULTIPLY  
 $f(x) = x^{1/2} \cdot \tan(x^2)$

### Pwoblèm 53: Ki sa ki pase ala fen?

An n reflechi sou diferansyasyon yon fonksyon menm jan an,  
 $g(x) = \sqrt{x \tan x}$ .

Premyèman, nou analize kijan pou kalkile  $g(x)$  li menm. Ki dènye etap nan konfigirasyon ekspresyon n ap evalue a?

- A Miltipliye de fonksyon ki pi senp   
  B Konpoze ak fonksyon rasin kare a  
 C Konpoze ak fonksyon tanjant lan   
  D Okenn nan sa yo

Etan done yo bay repons kesyon anvan an, ki règ diferansyasyon nou pral bezwen aplike anvan pou nou ka diferansye  $g$ ?

- A Règ pwodwi   
  B Règ Kosyan   
  C Règ chèn   
  D Okenn nan sa yo

 Videyo



$$f(x) = \sqrt{x \tan x}$$

$$g(x) = \sqrt{x \tan x} = u^{1/2} \quad u = x \tan x$$

CHAIN RULE

$$g'(x) = \frac{1}{2} u^{-1/2} \cdot u'$$

$$= \frac{1}{2} (x \tan x)^{-1/2} \cdot (x \tan x)'$$

PRODUCT RULE

$$= \frac{1}{2} (x \tan x)^{-1/2} \cdot (x \tan x)'$$

## 10. Egzèsis

### Pwoblèm 54: Ki sa ki pase ala fen 2?

Kòm sa te mansyone nan videyo anvan an, pou detèmine kijan pou derive yon fonksyon konplike, nou idantifye dènye etap ki nesèsè pou evalye fonksyon an. Si dènye etap la se yon operasyon aritmetik, tankou pran yon pwodwi oswa yon kosyan, Lè sa a, nou aplike règ pwodwi a oswa règ kosyan an. Si dènye etap la se konpoze ak yon "fonksyon debaz," tankou yon fonksyon rasin kare oswa sin, Lè sa a, nou aplike règ chèn lan.

Detèmine dènye etap la lè w ap evalye fonksyon sa yo. (Remake ke ou ap evalye fonksyon an, pa yon derive nan kesyon sa yo!)

$$f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$$

A Pran yon pwodwi    B Pran yon kosyan    C Aplike yon fonksyon debaz

D Okenn nan sa yo

$$g(x) = \sqrt[3]{\sin(x^3)}$$

A Pran yon pwodwi    B Pran yon kosyan    C Aplike yon fonksyon debaz

D Okenn nan sa yo

$$j(x) = (x + \sqrt{x})^{100}$$

A Pran yon pwodwi    B Pran yon kosyan    C Aplike yon fonksyon debaz

D Okenn nan sa yo

$$k(x) = \cos x \sin^4 x$$

A Pran yon pwodwi    B Pran yon kosyan    C Aplike yon fonksyon debaz

D Okenn nan sa yo

$$p(x) = \sqrt{2x + 1}$$

A Pran yon pwodwi    B Pran yon kosyan    C Aplike yon fonksyon debaz

D Okenn nan sa yo

$$q(x) = \tan(3x^2 + \sin(17x)) \left(\frac{\cos x}{x}\right)^{13}$$

- A Pran yon pwodwi    B Pran yon kosyan    C Aplike yon fonksyon debaz
- D Okenn nan sa yo

**Pwoblèm 55: Egzanp 6**

An n poze  $f(x) = \sin\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right)$ . Kalkile  $f'(x)$ .

**Pwoblèm 56: Egzanp 7**

Poze  $k(x) = \cos x \sin^4 x$ . Kalkile  $k'(x)$ .




---

## 11. Règ Kosyan vs Règ pwodwi ak Règ chèn

**Pwoblèm 57: Ki règ?**

Pou diferansye fonksyon  $h(x) = \frac{1}{x^2 + x}$  la, èske nou ap bezwen Règ Chèn oswa Règ Kosyan an?

- A Nou dwe itilize Règ chèn nan    B Nou dwe itilize Règ Kosyan
- C Nou ka itilize nenpòt règ    D Nou pa bezwen sèvi ak youn nan yo

** Videyo**

$$\begin{aligned}
 h(x) &= \frac{1}{x^2+x} = r(u) & u &= x^2+x & r'(u) &= \frac{-1}{u^2} \\
 h'(x) &= r'(u) \cdot u' \\
 &= \frac{-1}{u^2} \cdot (2x+1) \\
 &= \frac{-1}{(x^2+x)^2} \cdot (2x+1)
 \end{aligned}$$

## 12. Pwoblèm revizyon

### Pwoblèm 58: Revizyon 1

Vrè oswa Fo : Si  $g(x) = f(x)^2$ , lè sa a  $g'(x) = 2f(x)$ .

A Vrè  B Fo

### Pwoblèm 59: Revizyon 2

Sipoze ke nou konnen sa ki annapre yo sou fonksyon  $f$  ak  $g$ :

$$f(3) = 5 \quad f'(3) = 3$$

$$f(4) = 2 \quad f'(4) = -3$$

$$f(5) = 1 \quad f'(5) = 7$$

$$g(3) = 4 \quad g'(3) = 5$$

$$g(5) = 3 \quad g'(5) = 4$$

Si  $h(x) = g(f(x))$ , ki sa  $h'(3)$  bay?



Si  $j(x) = f(g(x))$ , ki sa  $j'(3)$  bay?



**Pwoblèm 60: Revizyon 3**

Nan yon sikwi ak rezistans 10 ohms, puisans  $P$  (mezi an wat) egal ak  $10I^2$ , kote  $I$  se kouran an mezire an anpè. Lè  $I = 6$  anpè, ki sa ki to varyasyon  $P$  pa rapò ak  $I$ ?



Nan ki inite yo mezire repons ou a?



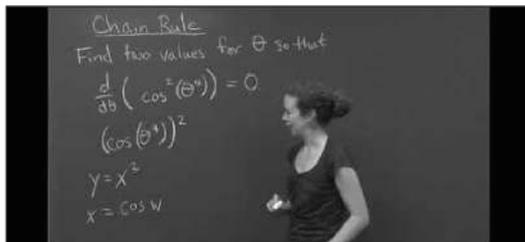
Si nou siplèman tè konnen ke lè  $I=6$ , kouran an ap ogmante a 0.2 anpè pa minit, a ki vitès (anrapò ak tan) pouvwa a ap ogmante nan moman sa a?



Nan ki inite yo mezire repons ou a?

**13. Pratike règ chèn lan**

 Videyo

**14. Rezime**

**Règ chèn nan**

Si  $h(x) = f(g(x))$ , ebyen lè sa a

$$h'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

nan tout pwen kote derive  $f'(g(x))$  ak  $g'(x)$  yo defini.

Altènativman, si  $y = f(u)$ , ak  $u = g(x)$ , lè sa a

$$\left. \frac{dy}{dx} \right|_{x=a} = \left. \frac{dy}{du} \right|_{u=g(a)} \left. \frac{du}{dx} \right|_{x=a}$$

nan nenpòt pwen  $x = a$  kote derive a-dwat la defini.

## Solisyon yo

### Pwoblèm 42: Chanjman inite

Puiske gen 60 segonn nan yon minit,  $u$  pral 60 fwa  $t$ . Pa egzanp, si  $t = 2$  minit, Lè sa a  $u = 120$  segonn.

$$60t$$

### Pwoblèm 43: Derivasyon

Diferansasyon  $x = 2u + 100$  pa rapò ak  $u$  bay  $\frac{dx}{du} = 2$ . Inite yo se inite  $x$  pou chak inite  $u$ , oswa mètr pa segonn.

$$2 \frac{m}{s}$$

### Pwoblèm 44: Faktè echèl

Lè nou ranplase  $u$ , nou jwenn  $x = 120t + 100$ . Derive pa rapò ak  $t$  sa bay  $\frac{dx}{dt} = 120$ . Inite yo ta dwe inite  $x$  pou chak inite  $t$ , oswa mètr pou chak minit.

$$120t + 100, 120, m/min$$

### Pwoblèm 45: Chanjman kòmman

kòmman (antre a) lan pou  $g$  chanje pa  $+0.01$  segonn. Pwiske derive a nan  $x = 2$  se 3 mètr pou chak segonn, nou ka estime yon chanjman nan rezilta (sòti) a ki se  $+0.03$  mètr. Ki donk, nou ta estime  $g(2.01) \approx 9.03$  mètr.

### Pwoblèm 46: Chanjman kòmman 2

Nou ap estime chanjman ki soti nan  $g(2)$  a  $g(2.01)$ , ki se antre (kòmman) pou  $f$ , pou li se  $+0.03$  mètr. Pwiske derive  $f$  lan la a se 4 kilogram pou chak mètr, nou ka estime yon chanjman nan sòti (rezilta)  $f$  ki se  $+0.12$  kilogram. Kidonk, nou ta estime  $f(g(2.01)) \approx 5.12$  kilogram.

### Pwoblèm 47: Mete tout ansanm

Chanjman ki soti nan 2 a 2.01 segonn nan antre pou  $h$  te lakòz yon chanjman (apeprè) 0.12 kilogram nan rezilta (sòti) pou  $h$ . Sa vle di ke to varyasyon  $h$  toupre  $x = 2$  se apeprè  $0.12/0.01$ , oswa 12, kilogram pou chak segonn.

### Pwoblèm 48: konfigirasyon chèn a twa mayon

Antre a pou  $j$  se  $f(g(x))$ . Lè  $x = 2$ ,  $f(g(x)) = 5$ . Ki donk,  $j'(5)$  se valè ki pi enpòtan an.

□

**Pwoblèm 49: Chèn a twa mayon**

Chèn fonksyon pou  $h$  nan antre 2 se kon sa:  $g$  pran 2 topou l rive 9,  $f$  pran 9 pou l rive 5, e finalman  $j$  pran 5 pou l rive 7. Derivasyon  $h$  nan 2 se pwodwi derivasyon  $g'(2)$ ,  $f'(9)$  ak  $j'(5)$ . Sa a se 120.

**Pwoblèm 50: Fonksyon Entèn**

Fonksyon  $p$  a aplike fonksyon kib la sou fonksyon kosinis la. Nan lòt mo, si  $f(u) = u^3$ , Lè sa a  $p(x) = f(\cos(x))$ . Fonksyon entèn lan se donk  $\cos x$  la.

B

**Pwoblèm 51: Egzanp 2**

Sa a se fonksyon rasin kare aplike sou yon polinòm. An n poze  $u = x^3 + 2x + 1$ ; ebyen lè sa  $f(x) = \sqrt{u}$ , kidonk derive a se

$$f'(x) = \frac{1}{2} u^{-1/2} \cdot u' = \frac{1}{2\sqrt{x^3 + 2x + 1}} (3x^2 + 2).$$

Lè nou ranplase  $x = 1$  sa a bay 1.25.

**Pwoblèm 52: Egzanp 3**

Poze  $u = x^2 + 2x$ ; lè sa  $g(x) = \sin(u)$ . Ki donk,

$$g'(x) = \cos u \frac{du}{dx} = \cos(x^2 + 2x)(2x + 2).$$

**Pwoblèm 53: Ki sa ki pase ala fen?**

Dènye bagay nou fè pou kalkile  $g$  se konpoze ak fonksyon rasin kare, ki donk nou ta dwe itilize Règ chèn pou kòmanse.

B

A

**Pwoblèm 54: Ki sa ki pase ala fen 2?**

Lè n ap kalkile  $f$ , dènye bagay nou fè se aplike fonksyon sinis la nan yon ekspresyon konplike. Nou ta dwe kòmanse ak règ chèn lan pou derive (diferansye) li.

Menm jan an tou,  $g$  ap aplike fonksyon rasin kib la nan yon ekspresyon konplike. Sa a mande tou règ chèn lan.

Okòmansman, menm bagay la ale tou pou  $j$  ak  $p$ ; pou chak, dènye bagay ki kalkile a se yon fonksyon puisans debaz aplike sou yon ekspresyon ki pa senp.

Dènye bagay nou fè lè nou kalkile  $k$  oswa  $q$  se pran yon pwodwi, ki donk nou ta dwe kòmanse ak règ pwodwi a lè n ap derive l.

**Pwoblèm 55: Egzanp 6**

Nou ka ekri sa a kòm  $\sin u$ , kote  $u = \frac{x}{x^2 + 1}$ . Se poutèt sa, lè n itilize Règ chèn nan, derive  $f$  la se

$$\begin{aligned} f'(x) &= \cos u \cdot \frac{du}{dx} \\ &= \cos\left(\frac{x}{x^2 + 1}\right) \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}, \end{aligned}$$

kote nou itilize Règ Kosyan an pou kalkile  $\frac{du}{dx}$ .

**Pwoblèm 56: Egzanp 7**

Sa a se pwodwi  $\cos x$  avèk  $\sin^4 x$ , ki donk nou ka itilize Règ pwodwi a an premye:

$$k'(x) = \cos x (\sin^4 x)' + (\cos x)' \sin^4 x.$$

Pou kalkile derive  $\sin^4 x$ , nou itilize Règ chèn nan. Nou fini ak:

$$\begin{aligned} k'(x) &= \cos x (4 \sin^3 x \cos x) - \sin x \sin^4 x \\ &= 4 \cos^2 x \sin^3 x - \sin^5 x. \end{aligned}$$

**Pwoblèm 57: Ki règ?**

Nou ka itilize nenpòt règ. Sa a se yon kosyan, ki donk nou ka itilize règ kosyan an, men li se yon konpozisyon tou, pwiske n ap aplike fonksyon resipwòk  $f(u) = 1/u$  la sou fonksyon  $g(x) = x^2 + x$  la.

**Pwoblèm 58: Revizyon 1**

Nou ap bezwen itilize règ chèn nan isit la, paske nou ap aplike fonksyon kare a sou yon lòt fonksyon  $f$ . Derive fonksyon  $g$  a se  $2f(x)f'(x)$ .

**Pwoblèm 59: Revizyon 2**

Soti nan règ chèn nan,  $h'(3) = g'(f(3))f'(3) = g'(5)f'(3) = 12$ .

Menm jan an,  $j'(3) = f'(g(3))g'(3) = f'(4)g'(3) = -15$ .

**Pwoblèm 60: Revizyon 3**

Si  $P = 10I^2$ , lè sa a  $\frac{dP}{dI} = 20I$  wat pou chak anpè. Lè  $I = 6$ , sa a se 120 wat pou chak anpè.

Si m bezwen yon to varyasyon pa rapò ak tan, lè sa a n ap bezwen konvèti wat pou chak anpè an wat pou chak minit.

Nou ka fè sa lè nou miltipliye pa pousantaj ogmantasyon kouran an pa rapò ak tan.

$\frac{dI}{dt} = 0.2$  anpè pou chak minit. Ki donk  $\frac{dP}{dt} = \frac{dP}{dI} \cdot \frac{dI}{dt} = 120 \cdot 0.2 = 24$  wat pou chak minit.

---

# Diferansyasyon enplisit

---

## 1. Motivasyon

 Videyo




---

## 2. Diferansyasyon enplisit

Ki fonksyon nou ka diferansye jiskaprezan?

puisans  $x$   
 polinòm  
 fonksyon trigonometrik  
 pwodwi fonksyon debaz yo  
 kosyan fonksyon debaz yo  
 konpozisyon fonksyon debaz yo

**Objektif**

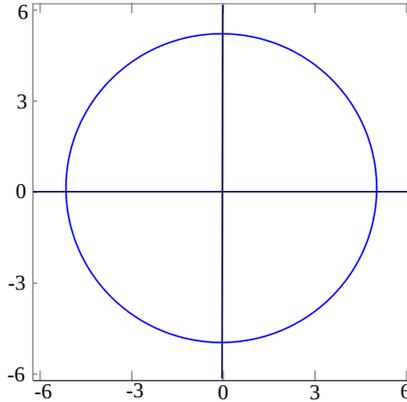
Nan fen sekans sa a, epi apre kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Rekonèt **fonksyon enplisit**.
- **Aplike règ chèn lan** pou derive fonksyon enplisit yo.
- Konprann poukisa **règ puisans pou ekspozan fraksyonè** yo valab:

$$\frac{d}{dx} x^{m/n} = (m/n)x^{m/n-1}.$$

### 3. Diferansyasyon sèk la

Ekwasyon  $x^2 + y^2 = 25$  la dekri yon sèk ki gen yon reyon 5.



Koub sa a pa satisfè tès liy vètikal la—gen de valè  $y$  pou prèske chak valè  $x$ . Men, ou ka toujou rezoud pou  $y$ . Remake ou p ap kapab jwenn yon sèl ekwasyon. Ou pral jwenn de—youn pou semi-sèk ki anwo a, ak youn pou semi-sèk ki anba a.

#### Pwoblèm 61: Fè l eksplisit

Rezoud  $x^2 + y^2 = 25$  pou jwenn yon fòmil eksplisit pou  $y$  an tèm de  $x$ . Ou pral gen de ekspresyon! Mete ekspresyon pozitif la nan premye bwat la, ak ekspresyon negatif la nan dezyèm bwat la.

mwatye anlè:



mwatye anba:



#### Pwoblèm 62: Diferansyasyon

Pou chak ekwasyon ki anwo a, jwenn  $\frac{dy}{dx}$  epi antre nan bwat ki koresponn lan anba a.

(Antre derive fonksyon an tèt la nan bwat repons ki anlè a; derive fonksyon anba a nan bwat repons ki pi ba a.)

Derive mwatye anwo a:

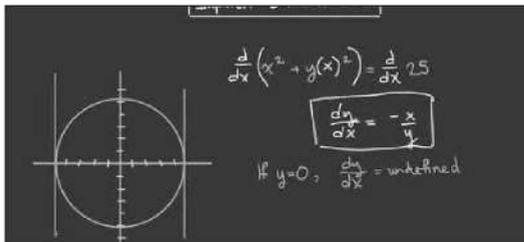


Bottom half derivative:



## 4. Diferansye enplititman sèk la

 Videyo



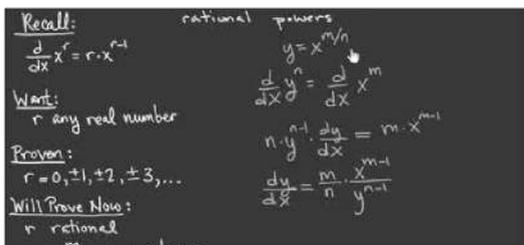
**Pwoblèm 63: Jwenn pant liy tanjant lan**

Ki pant liy tanjant pou sèk  $x^2 + y^2 = 25$  nan pwen  $(-3, 4)$ ?



## 5. Règ puisans pou ekspozan rasyonèl

 Videyo



**Note on video:** Nan videyo ki anwo a, nou sipoze ke  $n \neq 0$  pou yo defini kosyan an, ak  $n \neq 1$  pou kosyan an pa trivial.

## 6. Fonksyon enplitit yo

Lide ki dèyè pwoblèm anvan an se ke fè derivasyon dirèk pou  $y = x^{m/n}$  te difisil. Men, fè derivasyon pou fonksyon *enplitit*  $y^n = x^m$  te pi fasil. Sa rive chak fwa fonksyon ou pi senp pou deki enplititman. Yon fonksyon enplitit se yon

ekwasyon ki enplike tou de  $x$  ak  $y$  (oswa nenpòt de varyab). Ou *kapab* rezoud  $y$  kòm yon fonksyon de  $x$ , men anpil fwa, kalkil sa a konplike (oswa enposib). Si yon fonksyon pa enplisit, nou di li eksplisit.

### Egzanp

- $y^3 = x^2$  enplisit.
- $y = x^{2/3}$  eksplisit.
- $y^2 = x$  se yon deskripsyon enplisit pou de fonksyon yo  $y = \pm\sqrt{x}$ .

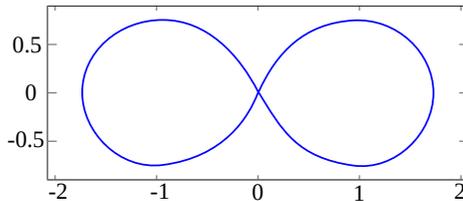
### Pwoblèm 64: Enplisit oswa Eksplisit

Kilès nan ekwasyon sa yo ki bay  $y$  kòm yon fonksyon enplisit de  $x$ ? (cheke tout sa ki aplike.)

- A  $y = x^3$     B  $y^3 = x$     C  $yx = 1$     D  $y + x = 1$     E  $\sin(y) = \cos(x)$

## 7. Egzanp pratik: Yon koub ekipotansyèl

Fonksyon enplisit ki dekri koub sa a se  $x^4 - 3x^2 + y^4 + y^2 + 2x^2y^2 = 0$ .



### Kontèks pou koub sa a

Sipoze nou gen de chaj ponktyèl nan  $(\pm 1, 0)$ . Pwen kote enèji potansyèl yon elektwon ta egal ak enèji potansyèl nan orijin an se yon koub yo rele "lemniskat".

Nou kapab poze anpil kesyon sou koub sa a. Pa egzanp:

1. Ki pant liy tanjant lan nan pwen  $\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ ?
2. Ki pwen sou koub sa a kote liy tanjant lan orizontal?

Pou reponn tou de kesyon sa yo, li nesèsè pou jwenn  $\frac{dy}{dx}$ . Olye nou rezoud pou  $y$ , nou pral itilize derivasyon enplisit. Men kèk kesyon pou ede ou kòmanse reponn kesyon sa yo.

### Problèm 65: Diferansyasyon premye pati a

Nou vle derive tou de bò nan ekwasyon an  $x^4 - 3x^2 + y^4 + y^2 + 2x^2y^2 = 0$  pa rapò ak  $x$ . Dènye tèm nan bò gòch la ap konplike, men kat premye yo pa twò difisil.

Vrè oswa fo:

$$\frac{d}{dx}(x^4 - 3x^2 + y^4 + y^2) = 4x^3 - 6x + 4y^3 + 2y.$$

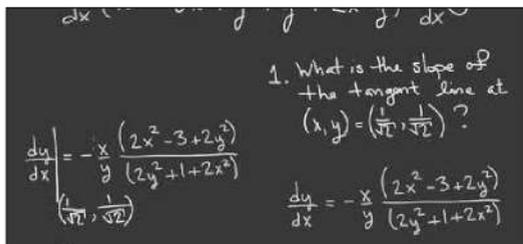
A Vrè  B Fo

### Problèm 66: Diferansyasyon dènye tèm nan

Lè w ap eseye derive  $2x^2y^2$  pa rapò ak  $x$ , kiyès nan bagay sa yo nou bezwen? Tcheke tout sa ki aplike.

A Règ puisans  B Règ Pwodui  C Règ Kosyan  D Règ Chèn

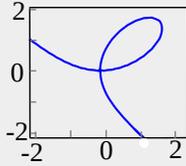
### Videyo



## 8. Egzèsis

**Pwoblèm 68: Diferansyasyon pa rapò ak nenpòt varyab**

Konsidere koub la ki defini pa  $y^3 + x^3 = 3xy$ .



Panse a  $y = y(x)$  epi fè diferansyasyon an pou jwenn  $\frac{dy}{dx}$ .

$$\frac{dy}{dx} =$$

**9. Egzanp pratik**

 Videyo



## 10. Plis Pwoblèm Pratik

### Pwoblèm 69: Pratik 1

Jwenn derive  $y^2 = x$  kòm yon fonksyon de  $y$ .

Kounye a, jwenn derive kòm yon fonksyon de  $x$ . Antre fonksyon pozitif la an premye.

$$\frac{dy}{dx} = \text{[input field]}$$

Lè  $y > 0$ :  $\frac{dy}{dx} = \text{[input field]}$

Lè  $y < 0$ :  $\frac{dy}{dx} = \text{[input field]}$

### Pwoblèm 70: Pratik 2

Jwenn derive  $\frac{dy}{dx}$  pou fonksyon  $x^2 + 4xy = 2y^2 + 5$ .

$$\frac{dy}{dx} = \text{[input field]}$$

### Pwoblèm 71: Pratik 3

Jwenn derive  $\frac{du}{dy}$  pou fonksyon  $u = \sin(y^2 + u)$ .

$$\frac{du}{dy} = \text{[input field]}$$

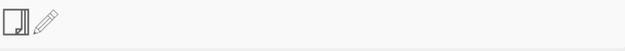
### Pwoblèm 72: Pratik 4

Jwenn derive  $\frac{dw}{dv}$  pou fonksyon  $w^2v^3 = w^3v^2$ .

$$\frac{dw}{dv} = \text{[input field]}$$

**Pwoblèm 73: Pratik 5**

Jwenn derive  $\frac{dy}{dx}$  pou fonksyon  $xy = y^3$ .

$$\frac{dy}{dx} =$$


**Pwoblèm 74: Revizyon sou Sèk la**

Nan sèk  $x^2 + y^2 = 25$  la, nou te wè ke  $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ . Ki sa  $\frac{d^2y}{dx^2}$  bay nan pwen  $(-3, 4)$ ?



---

**11. Rezime****Fonksyon enplisit**

Fè diferansyasyon imedyatman pou  $y = x^{m/n}$  difisil. Men fè diferansyasyon sou fonksyon *enplisit*  $y^n = x^m$  te yon ti kras pi fasil. Se sa k rive chak fwa fonksyon ou an pi fasil pou dekri kòm fonksyon enplisit.

Yon **fonksyon enplisit** se yon ekwasyon ki gen ladan tou de  $x$  ak  $y$  (oswa nenpòt de varyab reyèl); ou ka rezoud pou  $y$  kòm yon fonksyon de  $x$ , men souvan, kalkil sa a konplike (oswa enposib). Si yon fonksyon pa enplisit, nou di li eksplisit.

## Solisyon yo

### Pwoblèm 61: Fè l eksplisit

Nou kapab rezoud pou  $y$  epi nou jwenn  $y = \pm\sqrt{25 - x^2}$ .

### Pwoblèm 62: Diferansyasyon

Nou aplike règle chèn nan pou diferansye. Ann ale devan pou diferansye  $y = \sqrt{25 - x^2}$ . Premye bagay pou n fè se re-ekri l an tèm de puisans fraksyonè.

$$y = (25 - x^2)^{1/2}$$

Answit nou aplike règle chèn nan. Li ta ka ede w ekri  $u = 25 - x^2$ , ki donk  $y = u^{1/2}$ . Lè sa a

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \quad (5.6)$$

$$= \frac{1}{2} u^{-1/2} \frac{du}{dx} \quad (5.7)$$

$$= \frac{1}{2} u^{-1/2} \frac{du}{dx} \quad (5.8)$$

$$= \frac{1}{2} (25 - x^2)^{-1/2} (-2x) \quad (5.9)$$

$$= -x(25 - x^2)^{-1/2} \quad (5.10)$$

$$= \frac{-x}{\sqrt{25 - x^2}} \quad (5.11)$$

### Pwoblèm 63: Jwenn pant liy tanjant lan

Nou konnen ke pant liy tanjant lan se valè  $\frac{dy}{dx}$  nan  $(-3, 4)$ , ki se  $-x/y = 3/4$ .

### Pwoblèm 64: Emplisit oswa Eksplisit

Premye ekwasyon an eksplisit. Tout lòt yo enplisit! Menm  $y + x = 1$  se yon fonksyon ki defini enplisitman. Sepandan, li trè fasil pou ekri l kòm  $y = 1 - x$ , yon fonksyon eksplisit.

**Pwoblèm 65: Diferansyasyon premye pati a**

Règ chèn nan pa t aplike kòrèkteman! Pa egzanp,

$$\frac{d}{dx}(y^4) = \frac{d}{dy}(y^4) \frac{dy}{dx} = 4y^3 \frac{dy}{dx}.$$

$$\text{Ki donk } \frac{d}{dx}(x^4 - 3x^2 + y^4 + y^2) = 4x^3 - 6x + 4y^3 \frac{dy}{dx} + 2y \frac{dy}{dx}.$$

□

**Pwoblèm 66: Diferansyasyon dènye tèm nan**

Pou derive tèm sa a, nou itilize règ pwodwi a paske  $2x^2 \cdot y^2$  se yon pwodwi de fonksyon. Nou itilize règ puisans lan pou derive  $2x^2$ , epi nou itilize règ puisans la ansanm ak règ chèn nan pou derive  $y^2$ . Sèl règ ki pa aplike isit la se règ kosyan an!

**Pwoblèm 68: Diferansyasyon pa rapò ak nenpòt varyab**

Sonje ke, nou ka diferansye (derive) pa rapò ak *nenpòt* varyab. Isi a nou vle diferansye pa rapò ak  $x$ .

$$\frac{d}{dx}(y^3 + x^3) = \frac{d}{dx} 3xy \quad (5.12)$$

$$3y^2 \frac{dy}{dx} + 3x^2 = 3y + 3x \frac{dy}{dx} \quad (5.13)$$

$$(3y^2 - 3x) \frac{dy}{dx} = 3y - 3x^2 \quad (5.14)$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{3y - 3x^2}{3y^2 - 3x} \quad (5.15)$$

**Pwoblèm 69: Pratik 1**

Premyèman, nou jwenn  $dy/dx$  kòm yon fonksyon de  $y$ .

$$\frac{d}{dx}y^2 = \frac{d}{dx}x \quad (5.16)$$

$$2y \frac{dy}{dx} = 1 \quad (5.17)$$

$$\frac{dy}{dx} = 1/2y \quad (5.18)$$

Kounye a nou ranplase  $y = \pm\sqrt{x}$  pou n jwenn de fòmil eksplisit pou  $\frac{dy}{dx}$  an tèm de  $x$ :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}}, \quad y > 0, \quad \text{and} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-1}{2\sqrt{x}}, \quad y < 0.$$

**Pwoblèm 70: Pratik 2**

$$\frac{d}{dx}(x^2 + 4xy) = \frac{d}{dx}(2y^2 + 5) \quad (5.19)$$

$$2x + 4y + 4x \frac{dy}{dx} = 4y \frac{dy}{dx} + 0 \quad (5.20)$$

$$2x + 4y = (4y - 4x) \frac{dy}{dx} \quad (5.21)$$

$$\frac{x + 2y}{2y - 2x} = \frac{dy}{dx} \quad (5.22)$$

**Pwoblèm 71: Pratik 3**

$$\frac{d}{dy}u = \frac{d}{dy}\sin(y^2 + u) \quad (5.23)$$

$$\frac{du}{dy} = \cos(y^2 + u) \left( 2y + \frac{du}{dy} \right) \quad (5.24)$$

$$\frac{du}{dy} = \frac{2y \cos(y^2 + u)}{1 - \cos(y^2 + u)} \quad (5.25)$$

**Pwoblèm 72: Pratik 4**

$$\frac{d}{dv} w^2 v^3 = \frac{d}{dv} w^3 v^2 \quad (5.26)$$

$$2wv^3 \frac{dw}{dv} + 3w^2 v^2 = 3w^2 v^2 \frac{dw}{dv} + 2w^3 v \quad (5.27)$$

$$(2wv^3 - 3w^2 v^2) \frac{dw}{dv} = 2w^3 v - 3w^2 v^2 \quad (5.28)$$

$$\frac{dw}{dv} = \frac{2w^3 v - 3w^2 v^2}{2wv^3 - 3w^2 v^2} \quad (5.29)$$

**Pwoblèm 73: Pratik 5**

$$\frac{d}{dx} xy = \frac{d}{dx} y^3 \quad (5.30)$$

$$y + x \frac{dy}{dx} = 3y^2 \frac{dy}{dx} \quad (5.31)$$

$$y = (3y^2 - x) \frac{dy}{dx} \quad (5.32)$$

$$\frac{y}{3y^2 - x} = \frac{dy}{dx} \quad (5.33)$$

**Pwoblèm 74: Revizyon sou Sèk la**

Enplisitman diferansye! Nan pwoblèm anvan an, nou te wè ke  $\frac{dy}{dx} = -x/y$ . Konsa, nou diferansye tou de bò yo pa rapò ak  $x$  pandan n aplike règle kosyan ak règle chèn lan.

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \frac{dy}{dx} &= \frac{d}{dx} (-x/y) \\ \frac{d^2 y}{dx^2} &= -\frac{y - x \frac{dy}{dx}}{y^2} \\ &= \frac{-y + x \frac{dy}{dx}}{y^2} \\ &= \frac{-4 - 3(3/4)}{16} \\ &= \frac{-25}{64} \end{aligned}$$

---

# Fonksyon envès

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Fonksyon envès ak derive yo

**Ki fonksyon nou ka diferansye jiskaprezan?**

puisans  $x$   
polinòm  
fonksyon trigonometrik  
pwodwi fonksyon debaz yo  
kosyan fonksyon debaz  
konpozisyon fonksyon debaz yo  
fonksyon enplisit

### Objektif

A la fen de sekans sa a, epi apre kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Kalkile epi evalue fonksyon envès yo.
- Jwenn graf fonksyon envès yo lè w reflète graf fonksyon an atravè dyagonal la.
- Jwenn derive fonksyon **envès** la.

### 3. Kisa yon fonksyon envès ye?

#### Pwoblèm 75: Rasin kibik

Si  $f(x) = x^3$ , la a nou gen kèk valè pou  $f$ :

$$f(-11) = -1331$$

$$f(12) = 1728$$

$$f(-13) = -2197.$$

An n sipoze  $g(y) = \sqrt[3]{y}$ . Ki sa  $g(-2197)$  bay?



#### Videyo



$f(x) = x^3$      $g(y) = \sqrt[3]{y}$  = the number  $x$  whose cube is  $y$   
 $y = x^3 \iff x = \sqrt[3]{y}$      $(\sqrt[3]{y})^3 = y$      $\sqrt[3]{x^3} = x$   
 $y = f(x) \iff x = g(y)$      $f(g(y)) = y$      $g(f(x)) = x$   
 $(-13)^3 = -2197$   
 $\sqrt[3]{-2197} = -13$

### 4. Definisyon fonksyon envès

Si fonksyon  $f$  ak  $g$  satisfè  $g(f(x)) = x$  ak  $f(g(y)) = y$ , lè sa a nou di  $g$  se envès  $f$ , epi nou endike l ak  $f^{-1}$ . (Se menm jan an tou,  $f = g^{-1}$ .)

Si yon fonksyon  $f$  gen yon fonksyon envès  $f^{-1}$ , lè sa a  $f^{-1}(b) = a$  si e sèlman si  $f(a) = b$ .

---

## 5. Kesyon sou envès

### Pwoblèm 76: Jwenn yon envès

Sipoze ke nou konnen valè sa k ann apre yo pou yon fonksyon  $g$ :

$$g(0) = 1/2$$

$$g(1/2) = 1$$

$$g(3/2) = 2$$

$$g(2) = 5$$

Si  $g$  gen yon fonksyon envès, twouve  $g^{-1}(2)$ .



### Pwoblèm 77: Jwenn yon lòt envès

Fonksyon  $f(x) = 6x - 16$  la gen yon fonksyon envès. Jwenn  $f^{-1}(4)$ .



---

## 6. Graf envès yo

### Pwoblèm 78: Pwen sou yon graf

Sipoze nou konnen  $f$  gen yon fonksyon envès e ke pwen  $(2, 5)$  la sou graf  $f$  la. Ki pwen nou konnen ki sou graf  $f^{-1}$  la?

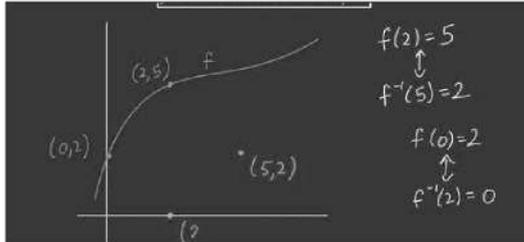
(Antre repons ou an nan fòm  $(a, b)$  kote ke  $b$  se valè  $f^{-1}(a)$ .)



**Pwoblèm 79: Desine yon imaj**

Desine de pwen yo. Ki relasyon ki genyen ant nouvo pwen an ak pwen orijinal la?

- A Wotasyon pa 90 degre alantou orijin lan
- B Wotasyon pa 180 degre alantou orijin lan     C Refleksyon atravè aks-x la
- D Refleksyon atravè aks-y la     E Refleksyon atravè dyagonal  $y = x$
- F Okenn nan sa yo

**📺 Videyo****7. Èske chak fonksyon gen yon envès?**

**Pa gen envès?**

Ou ka remake ke nou toujou ap di, "**Si**  $f$  gen yon envès..." Kesyon sa yo ki vin apre yo eksplike sa ki ta ka mal pase.

**Pwoblèm 80: Rasin kare**

An n poze  $h(x) = x^2$ , epi  $j(x) = \sqrt{x}$ .

Note ke  $h(-2) = 4$ . Ki sa  $j(4)$  bay?

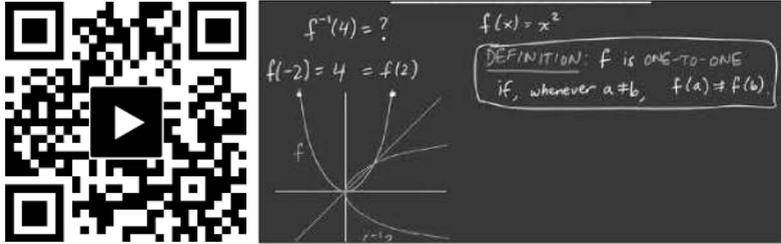
$j(4) =$

Èske  $j(h(-2)) = -2$ ?

- A Wi     B Non

## 8. Ki fonksyon ki gen envès?

 Videyo



## 9. Definisyon ak pwoblèm sou fonksyon enjektif

### Definisyon fonksyon enjektif

Yon fonksyon  $f$  se yon fonksyon **enjektif** si  $f(a) \neq f(b)$  kèlkeswa  $a \neq b$ . Li enjektif si e sèlman si grafik li satisfè tès liy orizontal la (pa gen liy orizontal ki entèsekte grafik li nan plis pase yon pwen).

### Pwoblèm 81: Montre ke yon fonksyon enjektif

Poze  $h(x) = 3 - \frac{2}{x}$ . Montre ke  $h$  la enjektif pandan w ap jwenn fòmil pou  $h^{-1}(y)$ .

$$h^{-1}(y) = \text{[input field with pencil icon]}$$

### Pwoblèm 82: Kiyès nan sa yo ki enjektif sou tout entèval liy reyèl la?

Klike fonksyon ki enjektif yo sou tout liy reyèl la. Ka gen plis pase youn.

$f(x) = 5$      $g(x) = \sin x$      $h(x) = -3x^3 + x + 2$

$j(x) = -3x^3 - x + 2$      $k(x) = -4 + 5x + \cos(3x)$

### Domèn ak ranje, notasyon entèval

Sonje byen ke **domèn** yon fonksyon  $f$  se ansanm valè ki aksepte kòm antre (kòmman). Pa egzanp, domèn fonksyon  $f(x) = 1/x$  se tout nonb reyèl ki pa egal ak zewo.

Tandiske **ranje** fonksyon  $f$  se ansanm tout valè posib ki ka sòti (rezilta). Pa

egzanp, ranje fonksyon  $g(x) = x^2$  la se ansanm tout nonb reyèl ki pa negatif.

Nou souvan itilize notasyon entèval pou eksprime ansanm nonb tankou domèn ak ranje. Yon **entèval fèmen**, ki endike pa  $[a, b]$ , se ansanm nonb  $x$  yo tèl ke  $a \leq x \leq b$ .

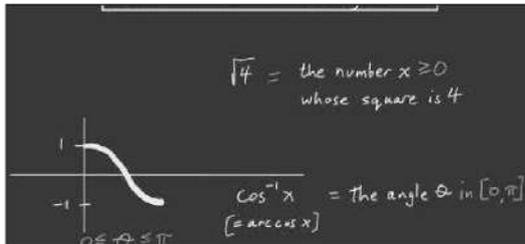
Yon **entèval ouvè**, endike pa  $(a, b)$ , se ansanm nonb  $x$  yo tèl ke  $a < x < b$ .

Youn kapab gen yon entèval mwatye ouvè, mwatye fèmen. Pa egzanp,  $[-1, 3)$  se ansanm nonb  $x$  yo tankou  $-1 \leq x < 3$ . Ou ka itilize tou  $\pm\infty$  kòm limit:  $(-\infty, 0)$  se ansanm nonb  $x$  yo tankou  $-\infty < x < 0$  (sa vle di ansanm nonb reyèl negatif yo).

Notasyon sa a ki itilize parantèz won pou entèval ouvè a pa inivèsèl; anpil matematisyen itilize kwochè kare ranvèse olye de parantèz won. Pa egzanp, yo ta make entèval  $3 < x < 7$  kòm  $]3, 7[$  olye de  $(3, 7)$ . Sepandan, nan kou sa a, nou pral kontinye itilize parantèz won pou entèval ouvè yo.

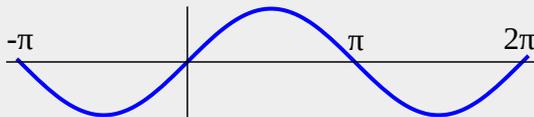
## 10. Envès Pasyèl

 Videyo



### Pwoblèm 83: Definisyon arcsin

Men grafik  $\sin \theta$ .



Si nou vle limite  $\theta$  a yon sèten entèval pou nou ka defini yon envès pasyèl pou fonksyon sa a, ki entèval ki ta pi bon pou chwazi?

- A  $(-\infty, \infty)$ 
 B  $[0, \infty)$ 
 C  $[-\pi/2, \pi/2]$ 
 D  $(-\pi/2, \pi/2)$ 
 E  $[0, \pi]$   
 F  $[0, 2\pi]$ 
 G  $[-1, 1]$

## 11. Envès fonksyon trigonometrik

$$\arcsin x = \theta \text{ nan } [-\pi/2, \pi/2] \quad \text{tèl ke } \sin \theta = x.$$

$$\arccos x = \theta \text{ nan } [0, \pi] \quad \text{tèl ke } \cos \theta = x.$$

$$\arctan x = \theta \text{ nan } (-\pi/2, \pi/2) \quad \text{tèl ke } \tan \theta = x.$$

### Pwoblèm 84: Domèn

Ki domèn definisyon fonksyon  $\arcsin(x)$  lan?

A  $x$  nan  $(-\infty, +\infty)$     B  $x$  nan  $[0, +\infty)$     C  $x$  nan  $[-\pi/2, \pi/2]$

D  $x$  nan  $(-\pi/2, \pi/2)$     E  $x$  nan  $[0, \pi]$     F  $x$  nan  $[0, 2\pi]$

G  $x$  nan  $[-1, 1]$     H Okenn nan sa yo

Ki domèn definisyon fonksyon  $\arccos(x)$  lan?

A  $x$  nan  $(-\infty, +\infty)$     B  $x$  nan  $[0, +\infty)$     C  $x$  nan  $[-\pi/2, \pi/2]$

D  $x$  nan  $(-\pi/2, \pi/2)$     E  $x$  nan  $[0, \pi]$     F  $x$  nan  $[0, 2\pi]$

G  $x$  nan  $[-1, 1]$     H Okenn nan sa yo

Ki domèn definisyon fonksyon  $\arctan(x)$  lan?

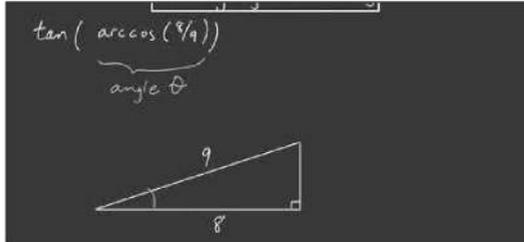
A  $x$  nan  $(-\infty, +\infty)$     B  $x$  nan  $[0, +\infty)$     C  $x$  nan  $[-\pi/2, \pi/2]$

D  $x$  nan  $(-\pi/2, \pi/2)$     E  $x$  nan  $[0, \pi]$     F  $x$  nan  $[0, 2\pi]$

G  $x$  nan  $[-1, 1]$     H Okenn nan sa yo

**Pwoblèm 85: Fonksyon Trigonometrik Envès**Ki sa  $\arccos(-1)$  bay?Ki sa  $\arcsin(-1)$  bay?Ki sa  $\arctan(-1)$  bay?**12. Fonksyon trigonometrik pou fonksyon arc-trig**

Videyo

**Pwoblèm 86: Sinis arctan**Kalkile  $\sin(\arctan(3/4))$  egzakteman.

## 13. Derive fonksyon envès

### Pwoblèm 87: Fonksyon lineyè

Poze  $y = \frac{5}{2}x - 3$ . Sa a se yon fonksyon lineyè avèk pant  $\frac{5}{2}$ . Pou rezoud ekwasyon an pou  $x$  epi jwenn yon fòmil pou fonksyon envès la; ou ta dwe jwenn yon fonksyon lineyè. Ki sa pant li ye?



### Pwoblèm 88: Inite

Sipoze  $f$  se yon fonksyon ki gen antre(komann) li mezire an mètr epi rezilta li mezire an lit. Sipoze  $g$  se yon envès oswa yon envès pasyèl pou  $f$ .

Ki inite  $f'$  genyen?



Ki inite  $g'$  genyen?

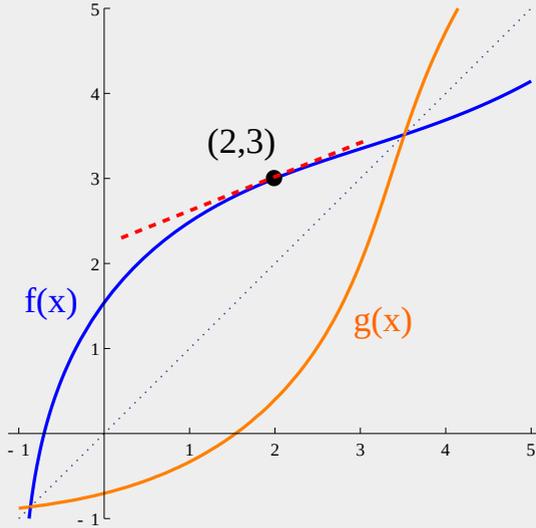
(Itilize  $m$  pou mètr epi  $L$  pou lit.)



**Pwoblèm 89: Ki derive ki gen rapò?**

Sipoze ke  $f(2) = 3$ . Ki donk pwen  $(2, 3)$  sou graf  $f$  la, ak  $f'(2)$  se pant liy tanjant lan ki la.

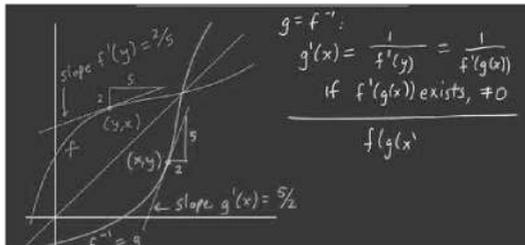
Sipoze ke  $f$  gen yon fonksyon envès  $g$ . Sonje ke graf  $g$  a se graf  $f$  la reflete atravè liy  $x = y$  lan.



Sa a sijere ke  $f'(2)$  gen rapò ak kiyès nan sa ki swiv la?

- A  $g'(2)$
- B  $g'(1/2)$
- C  $g'(3)$
- D  $g'(1/3)$
- E Okenn nan sa yo anwo a

**Videyo**



**14. Derive yon fonksyon envès**

Si  $g$  se yon envès (konplè oswa pasyèl) de yon fonksyon  $f$ , lè sa a

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

nan tout  $x$  kote  $f'(g(x))$  egziste e ki pa egal a zewo.

## 15. Pratik sou derive envès

### Pwoblèm 90: Derive yon envès

Sipoze ke  $g = f^{-1}$ . Si  $g(3) = 2$ , ki sa  $g'(3)$  bay? Eksprime repons ou an sèlman an tèm de  $f$ , non pa  $g$ .

$$g'(3) = \text{[input field]}$$

### Pwoblèm 91: Jwenn derive yon envès

Sipoze ke

$g(0) = 1/2$	$g'(0) = 3$
$g(1/2) = 1$	$g'(1/2) = 7$
$g(3/2) = 2$	$g'(3/2) = 4$
$g(2) = 5$	$g'(2) = 1/2$ .

An n poze  $h$  la pou envès  $g$ . Jwenn  $h'(2)$ .

$$h'(2) = \text{[input field]}$$

### Pwoblèm 92: Jwenn derive yon envès 2

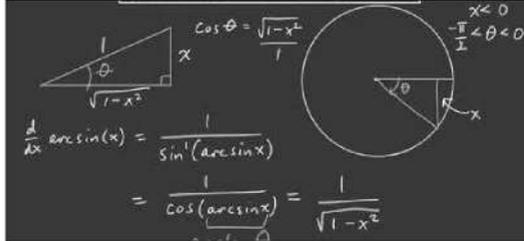
Fonksyon  $f(x) = -2x^3 - 7x + 5$  la enjektif epi li gen yon fonksyon envès. (Kijan ou ta verifye sa?) Poze  $g = f^{-1}$ . Jwenn  $g(5)$  ak  $g'(5)$ .

$$g(5) = \text{[input field]}$$

$$g'(5) = \text{[input field]}$$

## 16. Derive fonksyon trig envès

 Videyo



**Nòt sou videyo a:** Nan videyo a, kantite  $\sin'(\arcsin x) = \cos(\arcsin x)$ . Obsève ke sa a pa menm ak  $(\sin(\arcsin x))'$  ki mande pou aplike règ chèn pou evalye l.

**Derive yon fonksyon envès pandan n ap sèvi ak diferansyasyon enplisit**

Sa a se yon lòt fason pou jwenn derive  $\theta = \arcsin x$ . Relasyon ki genyen ant  $\theta$  ak  $x$  yo bay li ak

$$\sin \theta = x.$$

Diferansyasyon toude bò yo pa rapò ak  $x$  bay:

$$\frac{d}{dx} \sin \theta = \frac{d}{dx} x$$

$$\cos \theta \frac{d\theta}{dx} = 1$$

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos \theta}$$

Nou konnen ke

$$\cos^2 \theta + x^2 = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1,$$

ki donk  $\cos \theta = \pm \sqrt{1 - x^2}$ . Pwiske  $\theta$  dwe chita nan  $[-\pi/2, \pi/2]$ ,  $\cos \theta$  pozitif. Pakonsekan

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{1}{\cos \theta} = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

Nou ka menm jan an jwenn derive  $\theta = \arccos x$ . Relasyon ki genyen ant  $\theta$  ak  $x$  nou jwenn li ak

$$\cos \theta = x.$$

Diferansyasyon toude bò yo pa rapò ak  $x$  bay:

$$\frac{d}{dx} \cos \theta = \frac{d}{dx} x$$

$$-\sin \theta \frac{d\theta}{dx} = 1$$

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta}$$

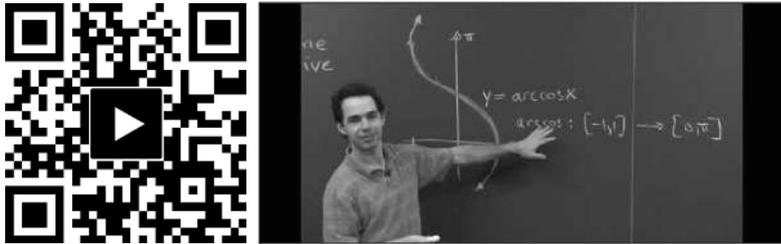
Nou konnen ke

$$\sin^2 \theta + x^2 = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1,$$

ki donk  $\sin \theta = \pm \sqrt{1 - x^2}$ . Pwiske  $\theta$  dwe chita nan  $[0, \pi]$ ,  $\sin \theta$  pozitif. Pakonsekan

$$\frac{d\theta}{dx} = -\frac{1}{\sin \theta} = -\frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$$

 Videyo



## 17. Arctan

**Problèm 93: Kote arctan diferansyab?**

Nan ki pwen arctan  $x$  la diferansyab?

- A Tout nonb reyèl  $x$ 
 B Tout  $x > 0$ 
 C Tout  $x \neq 0$ 
 D  $-1 \leq x \leq 1$   
 E  $-\pi/2 < x < \pi/2$ 
 F Okenn nan sa yo

**Pwoblèm 94: Jwenn derive a**

Kalkile  $\frac{d}{dx} \arctan x$ .

**18. Pratik final****Derive fonksyon trig envès yo**

Nou gen plis fonksyon debaz ke nou ka derive(diferansye) kounye a.

$$\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos x = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}$$

**Pwoblèm 95: Pratik derive 1**

An n poze  $f(x) = \arctan(3x)$ . Ki sa  $f'(-1)$  bay?

**Pwoblèm 96: Pratik derive 2**

An n poze  $g(x) = x^2 \arccos x$ . Ki sa  $g'\left(\frac{1}{2}\right)$  bay?

Itilize yon ekspresyon egzak olye yon desimal.



**Pwoblèm 97: Yon fonksyon konstan**

Poze  $h(x) = \arcsin x + \arccos x$ . Note ke

$$h'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = 0.$$

Sa a di nou ke  $h(x)$  la aktyèlman se yon fonksyon konstan. Ki sa ki valè li?

Itilize yon ekspresyon egzak olye yon desimal.

**19. Rezime****Definisyon yon fonksyon envès**

Si fonksyon  $f$  ak  $g$  satisfè  $g(f(x)) = x$  ak  $f(g(y)) = y$ , lè sa a nou di  $g$  se envès  $f$ , epi nou endike li pa  $f^{-1}$ . (Menm jan an tou,  $f = g^{-1}$ .)

Si yon fonksyon  $f$  gen yon fonksyon envès  $f^{-1}$ , lè sa a  $f^{-1}(b) = a$  si e sèlman si  $f(a) = b$ .

**Definisyon enjektif**

Yon fonksyon  $f$  **enjektif** si  $f(a) \neq f(b)$  kèlkeswa  $a \neq b$ . Li se yon fonksyon enjektif si e sèlman si graf li a satisfè tès liy orizontal la (pa gen okenn liy orizontal ki entèsekte graf li a nan plis pase yon sèl pwen).

**Domèn ak ranje, notasyon entèval**

Sonje ke **domèn** yon fonksyon  $f$  se ansanm valè ki ka itilize kòm antre (kòmman). Pa egzanp, domèn fonksyon  $f(x) = 1/x$  se ansanm tout reyèl ki pa zewo.

**Ranje**  $f$  la se ansanm tout valè ki ka soti kòm rezilta. Pa egzanp, ranje fonksyon  $g(x) = x^2$  se ansanm tout nonb reyèl ki pa negatif.

Nou souvan itilize notasyon entèval pou ekspri ansanm nonb tankou domèn ak ranje. Yon **entèval fèmen**, reprezante pa  $[a, b]$ , se ansanm nonb  $x$  tèl ke  $a \leq x \leq b$ .

Yon **entèval ouvè**, reprezante pa  $(a, b)$ , se ansanm nonb  $x$  tèl ke  $a < x < b$ .

Youn ka gen yon entèval ki mwatye ouvè, mwatye fèmen. Pa egzanp,  $[-1, 3)$  se ansanm nonb  $x$  ki satisfè kondisyon  $-1 \leq x < 3$ . Youn ka itilize  $\pm\infty$  kòm ekstrmite (limit):  $(-\infty, 0)$  se ansanm nonb  $x$  ki satisfè kondisyon  $-\infty < x < 0$  (sa vle di ansanm nonb negatif yo).

Notasyon sa a ki itilize parantèz won pou entèval ouvè a pa inivèsèl; anpil matematisyen itilize kare ki ranvèsè olye de sa. Pa egzanp, yo ta montre entèval

$3 < x < 7$  kòm  $]3, 7[$  olye de  $(3, 7)$ . Nan kou sa a, toutfwa, nou pral rete kole ak parantèz won pou entèval ouvè yo.

### Envès fonksyon trigonometrik

$$\arcsin x = \theta \text{ nan } [-\pi/2, \pi/2] \text{ ki satisfè kondisyon } \sin \theta = x.$$

$$\arccos x = \theta \text{ nan } [0, \pi] \text{ ki satisfè kondisyon } \cos \theta = x.$$

$$\arctan x = \theta \text{ nan } (-\pi/2, \pi/2) \text{ ki satisfè kondisyon } \tan \theta = x.$$

### Derive fonksyon envès

Si  $g$  se yon envès (konplè oswa pasyèl) de yon fonksyon  $f$ , lè sa a

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

nan tout  $x$  kote  $f'(g(x))$  egziste e ki pa egal a zewo.

### Derive fonksyon arctrig

Kote li defini,

$$\frac{d}{dx} \arcsin(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arccos(x) = \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\frac{d}{dx} \arctan(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 76: Jwenn yon envès

$g^{-1}(2)$  se nonb  $x$  ki fè ke  $g(x) = 2$ . Nou wè nan tablo a ke  $g(3/2) = 2$ , ki donk  $g^{-1}(2) = 3/2$ .

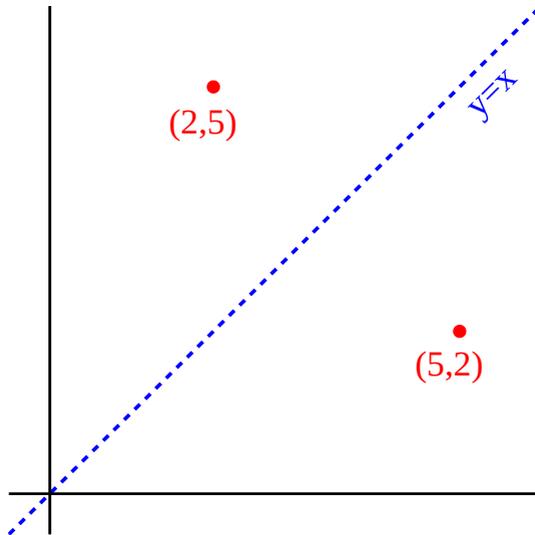
### Pwoblèm 77: Jwenn yon lòt envès

$f^{-1}(4)$  se nonb  $x$  ki fè ke  $f(x) = 4$ . Rezolisyon  $6x - 16 = 4$  bay  $x = 10/3$ .

### Pwoblèm 78: Pwen sou yon graf

Lefètke pwen  $(2, 5)$  la sou graf  $f$  la, sa vle di  $f(2) = 5$ . Kidonk  $f^{-1}(5) = 2$ , e sa vle di pwen  $(5, 2)$  la sou graf  $f^{-1}$  la.

### Pwoblèm 79: Desine yon imaj



E

**Pwoblèm 80: Rasin kare**

$h(-2) = 4$ , men  $j(4) = \sqrt{4} = 2$ . Sa a di nou ke  $j$  ak  $h$  yo pa envès youn ak lòt!

□

2

**Pwoblèm 81: Montre ke yon fonksyon enjektif**

$x = h^{-1}(y)$  se solisyon ekwasyon  $h(x) = y$ .

$$x = h^{-1}(y) \Leftrightarrow h(x) = y$$

Rezoud:

$$\begin{aligned} h(x) &= 3 - \frac{2}{x} = y \\ -\frac{2}{x} &= y - 3 \\ -\frac{x}{2} &= \frac{1}{y - 3} \\ x &= \frac{-2}{y - 3} \end{aligned}$$

Sa a montre ke se yon sèl  $x$  ki satisfè ekwasyon an, ki donk  $h$  enjektif, epi li bay fòmil  $h^{-1}(y) = \frac{-2}{y - 3}$ .

**Pwoblèm 82: Kiyès nan sa yo ki enjektif sou tout entèval liy reyèl la?**

Pou  $f(x) = 5$ , chak entran (komann) bay menm rezilta. Sa a pa enjektif.

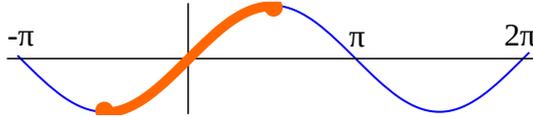
Pou  $g(x) = \sin x$ , nou konnen ke  $g(0) = g(\pi) = 0$ . Sa a pa enjektif.

Touledè  $h(x)$  ak  $j(x)$  yo kibik. Derive  $h'(x) = -9x^2 + 1$  li pafwa negatif epi pafwa pozitif, ki donk grafik  $h$  desann, monte ak desann - li pa satisfè tès liy orizontal la, epi  $h$  la pa enjektif. Sepandan,  $j'(x) = -9x^2 - 1$  la toujou negatif, ki donk  $j$  a toujou dekwasant epi li enjektif.

Se menm jan an,  $k'(x) = 5 - 3 \sin(3x)$  toujou pozitif, pwis ke  $\sin(3x)$  ka sèlman 1 o maksimòm. Pa konsekan  $k$  toujou kwasant epi li enjektif.

**Pwoblèm 83: Definisyon arcsin**

Si nou limite domèn nan a  $[-\pi/2, \pi/2]$ , fonksyon an vin enjektif epi nou toujou genyen tout ranje fonksyon sinis la ki soti nan  $-1$  pou ale nan  $1$ . Nou vle enkli limit yo paske se sa yo ki ang  $\theta$  ki gen  $\sin \theta = \pm 1$ .



□

**Pwoblèm 84: Domèn**

Domèn fonksyon trigonometrik envès yo ta dwe menm ak ranje fonksyon trigonometrik ki koresponn yo. Se poutèt sa,  $\arcsin x$  ak  $\arccos x$  gen domèn  $[-1, 1]$  (sonje ke nou ap itilize notasyon entèval isit la), pandan ke  $\arctan x$  gen yon domèn ki konpoze de tout nonb reyèl.

**Pwoblèm 85: Fonksyon Trigonometrik Envès**

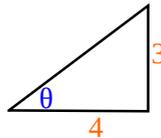
Pwiske  $\cos \pi = -1$ , ak  $\pi$  se yon ang nan entèval ki aksepte a  $[0, \pi]$ , nou wè ke  $\arccos(-1) = \pi$ .

Pwiske  $\sin(-\frac{\pi}{2}) = -1$ , ak  $-\frac{\pi}{2}$  se yon ang nan entèval ki aksepte a  $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ , nou wè ke  $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$ .

Pwiske  $\tan(-\frac{\pi}{4}) = -1$ , ak  $-\frac{\pi}{4}$  se yon ang nan entèval ki aksepte a  $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ , nou wè ke  $\arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$ .

**Pwoblèm 86: Sinis arctan**

$\arctan(3/4)$  se yon ang egi  $\theta$  ki gen tanjan egal ak  $3/4$ . Nou ka trase  $\theta$  nan triyang rektangilè sa a.



Ipotenis triyang sa a se  $5$ , ki donk sinis  $\theta$  se  $3/5$ .

**Pwoblèm 87: Fonksyon lineyè**

Rezoud pou  $x$  bay

$$x = \frac{2}{5}(y + 3) = \frac{2}{5}y + \frac{6}{5}.$$

Sa gen yon pant  $\frac{2}{5}$ . Remake ke sa a se respwòk pant fonksyon orijinal la

**Pwoblèm 88: Inite**

Derive  $f$  mezire an lit pou chak mè. Puiske  $g$  se yon envès (pasyèl), yo mezire rezilta  $g$  an mè epi yo mezire antre  $g$  an lit. Sa a di nou ke yo mezire  $g'$  an mè pou chak lit – inite respwòk yo pou  $f'$ .

$$\frac{L}{m}, \frac{m}{L}$$

**Pwoblèm 89: Ki derive ki gen rapò?**

Liy tanjant graf  $f$  la nan  $(2, 3)$  se refleksyon liy tanjant sou graf  $g$  a nan  $(3, 2)$ . Sa a di nou ke  $f'(2)$  ak  $g'(3)$  – pant liy sa yo – yo gen yon relasyon. Gade videyo apre a pou plis detay!

**Pwoblèm 90: Derive yon envès**

Fòmil nou derive a pou derive yon envès di nou ke  $g'(3) = 1/f'(g(3)) = 1/f'(2)$ .

**Pwoblèm 91: Jwenn derive yon envès**

Premyèman, note sa paske  $g(3/2) = 2$ , nou gen  $h(2) = 3/2$ . Se poutèt sa

$$h'(2) = \frac{1}{g'(3/2)} = \frac{1}{4}.$$

**Pwoblèm 92: Jwenn derive yon envès 2**

(Nou ka di ke  $f$  la enjektif paske derive li a  $f'(x) = -6x^2 - 7$  toujou negatif, kidonk fonksyon an toujou ap desann (dekwat).)

Nou gen  $f(0) = 5$ , ki donk  $g(5) = 0$ . Pakonsekan

$$g'(5) = \frac{1}{f'(0)} = -\frac{1}{7}.$$

**Pwoblèm 93: Kote arctan diferansyab?**

Nou pral itilize fòmil

$$g'(x) = \frac{1}{f'(g(x))}$$

kote  $g$  se yon envès (total oswa pasyèl) yon fonksyon. Defini  $f(x) = \tan x$  kon sa  $g(x) = \arctan x$ . Derive tanjan lan se kare sekant lan, ki donk nou genyen  $f'(\theta) = \sec^2 \theta$  pou nenpòt antre (kòman)  $\theta$ . An patikilye,  $f'(g(x)) = \sec^2(\arctan(x))$ . Ki donk, fòmil ki pi wo a bay

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{\sec^2(\arctan(x))}.$$

Kounye a, nou jis bezwen verifye ke  $\sec^2(\arctan(x))$  pa egal zewo pwiske li parèt nan denominatè a. Ranje  $\tan \theta$  se tout nonb reyèl, ki donk domèn  $\arctan x$  se tout nonb reyèl tou. Anplis de sa,  $\sec^2 \theta$  pa egal zewo nan chak pwèn nan domèn restriksyon  $\tan \theta$ , ki se  $(-\pi/2, \pi/2)$ . Ki donk  $\arctan x$  la diferansyab tout kote.

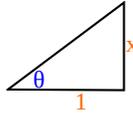
□

**Pwoblèm 94: Jwenn derive a**

Sipoze ke  $\arctan x = \theta$ . Lè sa a

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} \arctan x &= \frac{1}{\tan'(\theta)} \\ &= \frac{1}{\sec^2 \theta} \\ &= \cos^2 \theta.\end{aligned}$$

Pou kalkile  $\cos \theta$ , trase yon triyang rektang avèk  $\theta$  tankou youn nan ang yo.



Ang sa a gen tanjant apwopriye a, epi nou ka itilize teyorèm Pythagore a pou dekouvri ke ipotenz la gen longè  $\sqrt{1+x^2}$ . Donk  $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ , kon sa

$$\frac{d}{dx} \arctan x = \frac{1}{1+x^2}.$$

**Pwoblèm 95: Pratik derive 1**

Lè n itilize règ chèn nan:

$$f'(x) = \frac{1}{1+(3x)^2} \cdot 3,$$

ki donk  $f'(-1) = 3/10$ .

**Pwoblèm 96: Pratik derive 2**

Lè n itilize règ pwodui a:

$$g'(x) = 2x \arccos x + x^2 \cdot \left( \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} \right),$$

ki donk

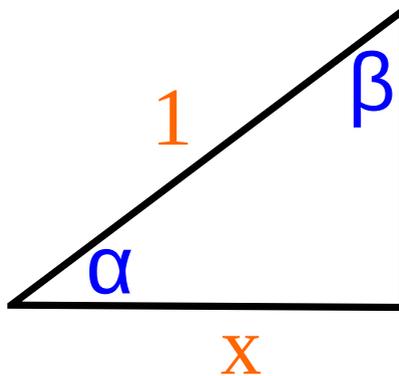
$$g' \left( \frac{1}{2} \right) = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}/2} = \frac{\pi}{3} - \frac{1}{2\sqrt{3}}.$$

**Pwoblèm 97: Yon fonksyon konstan**

Nou ka jis kalkile  $h$  nan yon sèl valè.

$$h(0) = \arcsin 0 + \arccos 0 = 0 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}.$$

Gen plizyè fason pou wè ke sòm  $\arccos x$  ak  $\arcsin x$  konstan. Youn nan fason sa a se avèk triyang sa a (ki mache pou  $x$  pozitif):



Remake ke  $\alpha = \arccos x$  ak  $\beta = \arcsin x$ . Men, kòm de ang egi nan yon triyang rektang, sòm yo dwe  $\pi/2$ .

---

# Fonksyon eksponansyèl

---

## 1. Motivasyon

 Videyo




---

## 2. Fonksyon eksponansyèl yo ak derive yo

Ki fonksyon nou ka derive jiskaprezan?

pwisans  $x$

Polinòm

Fonksyon trigonometrik

Pwodui fonksyon debaz

Kosyan fonksyon debaz

Konpozisyon fonksyon debaz

Envès fonksyon debaz

**Objektif**

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Derive **fonksyon eksponansyèl la**.
- Defini nonb  $e$  a an tèm de valè derive  $\left. \frac{d}{dx} e^x \right|_{x=0}$ .

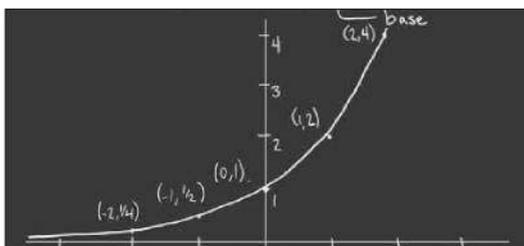
---

## 3. Pwopriyete ekspozan yo

Sipoze  $a$  se yon nonb reyèl pozitif.

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

 Videyo



**Pwoblèm 98: Eskis yon fonksyon eksponansyèl**

Eskise graf  $(\frac{1}{2})^x$  la.




 Select
 Function  $f(x)$ 
 Delete
 Undo
 Redo

Made with  at MIT | [Info & Legal](#)

**Pwopriyete Fonksyon Ekspònansyèl**

Fonksyon  $f(x) = a^x$  la gen baz  $a$  pou yon nonb reyèl pozitif  $a$ .

- Fonksyon  $a^x$  la se yon fonksyon kontini.
- Domèn  $a^x$  la se tout nonb reyèl.
- Entèval  $a^x$  la se tout nonb reyèl pozitif.

## 4. Jwenn derive a

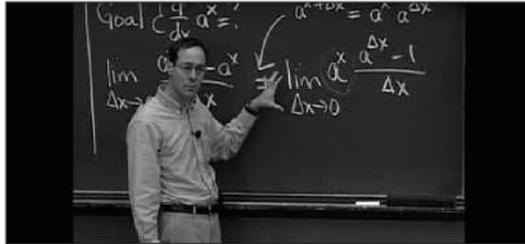
### Pwoblèm 99: Èske nou ka itilize règ puisans lan?

Fonksyon  $f(x) = 2^x$  la se yon egzantp de fonksyon eksponansyèl. Nonb 2 a yo rele li *baz la*. Epi varyab  $x$  la se *ekspozan*.

Èske règ puisans lan aplike nan fonksyon  $f(x) = 2^x$ ?

A Wi  B Non

### Videyo



## 5. Derive yon fonksyon eksponansyèl

Derive yon fonksyon eksponansyèl se

$$\frac{d}{dx} a^x = M(a)a^x, \quad (5.34)$$

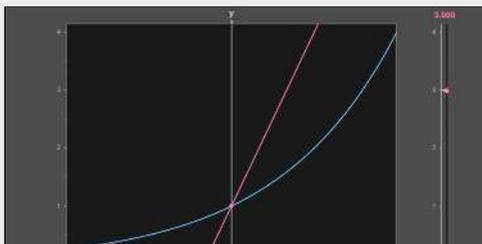
kote nonb mistè a  $M(a)$  se pant liy tanjan lan nan zewo:

$$M(a) = \frac{d}{dx} a^x \Big|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

**Pwoblèm 100: Estime derive a nan 0**

Yo montre graf  $f(x) = 2^x$  la anba a. Sèvi ak mathlet la pou estime valè  $f'(0)$ .

 Mathlet



$f'(0) \approx$

**6. Rezilta nimerik****Pwoblèm 101: Yon lòt eksponansyèl**

Nou te jwenn ke derive a pou  $f(x) = 2^x$  nan  $x = 0$  se apeprè 0.69. Sa a se yon nonb etranj si ou pa janm wè li anvan.

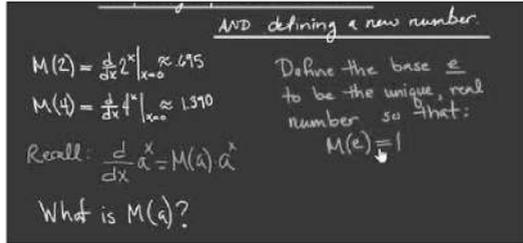
An n eseye yon lòt eksponansyèl. Poze  $g(x) = 4^x$ . Kijan  $g(x)$  ka konpare ak  $f(x)$ ?

Premyèman, an n konpare  $g(0)$  ak  $f(0)$ . Ki relasyon ki genyen ant yo?

A  $f(0) > g(0)$   B  $f(0) < g(0)$   C  $f(0) = g(0)$

Ki relasyon ki genyen ant  $g'(0)$  ak  $f'(0)$ ?

A  $f'(0) > g'(0)$   B  $f'(0) < g'(0)$   C  $f'(0) = g'(0)$

 Videyo


## 7. Definisyon nonb e

Baz  $e$  a se inik nonb reyèl kote ke  $M(e) = \frac{d}{dx} e^x \Big|_{x=0} = 1$ . Answit

$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \quad (5.35)$$

### Pwoblèm 102: Derive a nan 0

Vrè oswa fo: Si  $p(x) = e^x$ , lè sa a  $p'(0) = p(0)$ .

A Vrè  B Fo

### Pwoblèm 103: Verifikasyon derive

Ki sa  $\frac{d}{dx} e^x \Big|_{x=-1}$  bay? Antre e pou  $e$ .



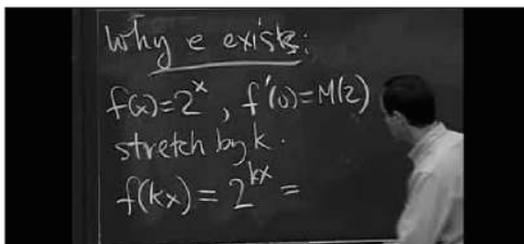
### Pwoblèm 104: Derive pwisans elve

Ki sa  $\frac{d^{17}}{dx^{17}} e^x \Big|_{x=-1}$  bay? Antre e pou  $e$ .



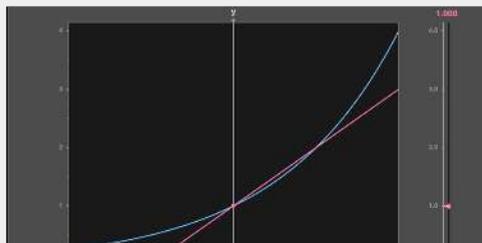
## 8. Poukisa e egziste

 Videyo



Pwoblèm 105: Apwoksimasyon nimerik

 Mathlet



Itilize mathlet la pou jwenn yon apwoksimasyon nimerik pou  $e$ :



## 9. Pratik siplemantè

Pwoblèm 106: Estimasyon

Si ou kalkile  $e^{4.5}$  ou jwenn yon nonb ki prè de 90. San ou pa itilize yon kalkilatri, estime  $e^{4.55}$ .

(Antre yon nonb avèk yon sèl chif desimal.)



**Pwoblèm 107: Yon fonksyon ki gen rapò**

Vrè oswa Fo : Si  $g(x) = e^{5x}$ , lè sa a  $g'(x) = e^{5x}$ .

A Vrè  B Fo

**Pwoblèm 108: Yon lòt fonksyon ki gen rapò**

Vrè oswa Fo : Si  $r(x) = e^{x+5}$ , lè sa a  $r'(x) = r(x)$ .

A Vrè  B Fo

**Pwoblèm 109: Yon katenè**

Fòm yon kòd ki pandye soti nan de pwen ki gen menm wotè rele yon katenè.



*Catenè a.*

Koub sa a se yon graf pou  $g(x) = 0.5a(e^{x/a} + e^{-x/a})$  pou yon konstan  $a$ .  
Jwenn derive fonksyon  $g$  si  $a = 2$ .



---

**10. Rezime****Pwopriyete ekspozan yo**

Sipoze  $a$  se yon nonb reyèl pozitif.

- $a^0 = 1$
- $a^1 = a$
- $a^m a^n = a^{m+n}$
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^{m/n} = \sqrt[n]{a^m}$

**Pwopriyete fonksyon eksponansyèl yo**

Fonksyon  $f(x) = a^x$  la gen baz  $a$  pou yon nonb reyèl pozitif  $a$ .

- Fonksyon  $a^x$  la se yon fonksyon kontini.
- Domèn  $a^x$  la se tout nonb reyèl.
- Entèval  $a^x$  la se tout nonb reyèl pozitif.

**Derive yon fonksyon eksponansyèl**

Derive yon fonksyon eksponansyèl se

$$\frac{d}{dx} a^x = M(a)a^x, \quad (5.42)$$

kote nonb mistè  $M(a)$  a se pant liy tanjant lan nan zewo:

$$M(a) = \left. \frac{d}{dx} a^x \right|_{x=0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x}.$$

**Definisyon  $e$** 

Baz  $e$  se inik nonb reyèl ki fè  $M(e) = \left. \frac{d}{dx} e^x \right|_{x=0} = 1$ . Lè sa a

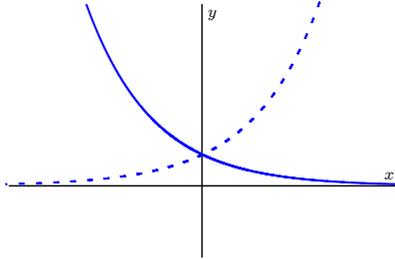
$$\frac{d}{dx} e^x = e^x. \quad (5.43)$$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 98: Eskis yon fonksyon eksponansyèl

Ou ta ka trase pwen yo epi rekonèt tandans lan. Yon lòt opsyon, note ke

$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x = (2^{-1})^x = 2^{-x}$ . Se konsa, graf  $2^{-x}$  ou ka jwenn li lè w reflete graf  $2^x$  atravè aks- $y$ !



Fonksyon  $y = 2^{-x}$  trase an ble avèk yon liy pweniyè ki montre graf  $y = 2^x$  la. Remake ke  $2^{-x}$  ap pwoche 0 pandan  $x$  ap vin pi pre enfini, li ap pwoche  $\infty$  pandan  $x$  ap pwoche mwens enfini, e li toujou pi gran pase zewo.

### Pwoblèm 99: Èske nou ka itilize règ puisans lan?

Sonje byen ke règ puisans lan aplike sèlman lè baz la se varyab antre (komann nan) a epi ekspozan an se yon nonb fiks

□

**Pwoblèm 101: Yon lòt eksponansyèl**

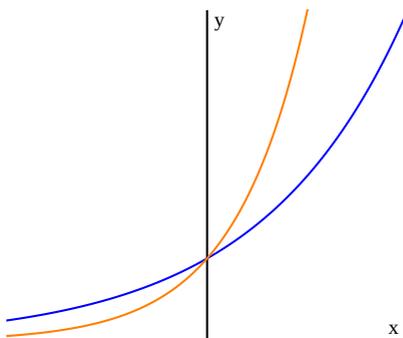
Tou de fonksyon eksponansyèl yo egal ak 1 lè  $x = 0$ .

$$f(0) = 2^0 = 1$$

$$g(0) = 4^0 = 1.$$

Fonksyon  $g(x)$  la grandi pi vit, ki donk nou atann ke

$M(4) = g'(0) > f'(0) = M(2)$  paske liy tanjant lan apik.



Fonksyon  $2^x$  an ble, epi fonksyon  $4^x$  la ann oranj.

C

B

**Pwoblèm 102: Derive a nan 0**

Pwiske  $p'(x) = p(x)$ , nou konnen ke  $p'(0) = p(0)$ .

A

**Pwoblèm 103: Verifikasyon derive**

$$\left. \frac{d}{dx} e^x \right|_{x=-1} = e^x \Big|_{x=-1} = 1/e$$

**Pwoblèm 104: Derive pwisans elve**

$$\left. \frac{d^{17}}{dx^{17}} e^x \right|_{x=-1} = e^x \Big|_{x=-1} = 1/e$$

**Pwoblèm 105: Apwoksimasyon nimerik**

Kite pant liy woz la rete fikse nan 1.000. Deplase faktè echèl  $k$  jiskaske fonksyon  $y = f(kx) = 2^{kx}$  la parèt tanjant ak liy woz la. Valè  $2^k$  (se pa valè faktè echèl  $k$ ) a se yon apwoksimasyon nimerik pou  $e$ .

**Pwoblèm 106: Estimasyon**

An n itilize yon apwoksimasyon lineyèl! Si nou poze  $f(x) = e^x$ , nou kapab apwoksime  $f(x)$  nan vwazinaj  $x = 4.5$  avèk fòmil la

$$f(x) \approx \overline{f(4.5)} + f'(4.5)(x - 4.5). \quad (5.36)$$

Nou bezwen apwoksimasyon an nan  $x = 4.55$  sèvi ak lefèt ke nou konnen ke  $f(4.5) = f'(4.5) \approx 90$ . Lè n ranplase l nou jwenn :

$$f(4.55) \approx f(4.5) + f'(4.5)(4.55 - 4.5) \quad (5.37)$$

$$\approx 90 + 90(.05) = 94.5. \quad (5.38)$$

**Pwoblèm 107: Yon fonksyon ki gen rapò**

Pou n jwenn derive a, nou ta dwe aplike règ chèn lan!  $q'(x) = 5e^{5x}$ .

**B**

**Pwoblèm 108: Yon lòt fonksyon ki gen rapò**

Aplike règ chèn lan pou w kapab jwenn sa a  $r'(x) = e^{x+5} \frac{d(x+5)}{dx} = e^{x+5}$ .

Remake tou ke  $r(x)$  ka reekri kòm  $r(x) = e^5 e^x$ . Pwiske  $e^5$  se yon konstan, nou jwenn  $r'(x) = e^5 e^x$ .

**A**

**Pwoblèm 109: Yon katenè**

Entwodui ladan l  $a = 2$ , fonksyon an se  $g(x) = e^{x/2} + e^{-x/2}$ . Lè nou fè derivasyon an lè n itilize règ chèn nan, nou jwenn :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( e^{x/2} + e^{-x/2} \right) \\ = e^{x/2} \frac{d}{dx} \left( \frac{x}{2} \right) + e^{-x/2} \frac{d}{dx} \left( -\frac{x}{2} \right) \end{aligned} \quad (5.39)$$

$$= \frac{1}{2} e^{x/2} - \frac{1}{2} e^{-x/2} \quad (5.40)$$

$$= \frac{1}{2} \left( e^{x/2} - e^{-x/2} \right). \quad (5.41)$$

# Logaritm

## 1. Motivasyon

 Videyo



## 2. Logaritm ak Derive yo

Ki fonksyon nou ka diferansye (Derive) jiska prezan?

puisans  $x$

polinom

fonksyon trigonometrik ak envès yo

pwodi fonksyon debaz yo

kosyan fonksyon debaz yo

konpozisyon fonksyon debaz yo

fonksyon enplisit

envès fonksyon debaz yo

fonksyon eksponansyèl yo

### Objektif

Nan fen sekans sa a, epi aprè kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Diferansye (Derive) **fonksyon logaritm lan**.
- Idantifye derive pou  $a^x$  eksplisiman.
- Itilize **relasyon envès** de  $e$  ak  $\ln$  pou diferansye (derive) ekspozan konplike.
- Itilize **diferansyasyon logaritmik** pou travay avèk fonksyon yo ki gen ekspozan varyab yo.

### 3. Preliminè yo

#### Pwoblèm 110: Fonksyon eksponansyèl la

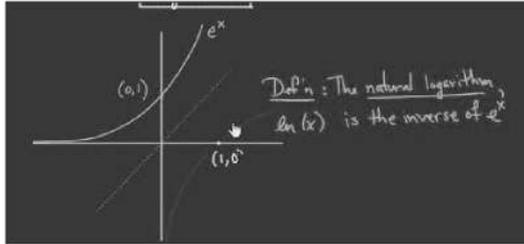
Poze  $f(x) = e^x$ . Kòman derive fonksyon  $f$  la ye?

- A Toujou pozitif    B Toujou negatif    C Pafwa pozitif epi Pafwa negatif

Eske  $f$  la enjektif?

- A Wi    B Non

#### Videyo



#### Pwopriyete pou $x$

Èske  $\log_{10}(x)$  la se fonksyon envès  $10^x$ ?

Log natirèl la, ki endike pa  $\ln(x)$ , se fonksyon envès  $e^x$ .

- $\ln e^x = x$
- $e^{\ln x} = x$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^b) = b \ln(a)$

## 4. Pwopriyete fonksyon logaritm lan

### Pwoblèm 111: Log baz 10

Ki sa  $\log_{10} 1000$  bay?



Ki sa  $\log_{10} 0.000001$  bay?



### Pwoblèm 112: Chif yo

Sipoze ke  $x$  se yon nonb antye avèk  $\log_{10} x \approx 8.23$ . Lè n ekri l nèt, konbyen chif  $x$  ta genyen?

(Endikasyon: Ki lòd grandè  $x$ ?)



### Pwoblèm 113: Estime yon logaritm natirèl

Sonje ke  $e \approx 2.71828$ . An reyalyte,

$$e^2 \approx 7.39$$

$$e^3 \approx 20.09$$

$$e^4 \approx 54.60$$

$$e^5 \approx 148.41$$

$$e^6 \approx 403.43$$

$$e^7 \approx 1096.63$$

Kiyès nan sa yo ki ant 5 ak 10?

(Klike sou tout repons posib.)

A ln 1    B ln 1.5    C ln 2    D ln 3    E ln 8    F ln 20    G ln 100

H ln 1000

**Pwoblèm 114: Estime yon logaritm natirèl ankò**

Remake ke  $10 \approx e^{2.3026}$ . Yon "googol" se nonb  $10^{100}$  (e wi, se konsa li ekri kòrèkteman; an pasan, nonb sa a pi gwo pase kantite atom ki nan linivè a). Ki sa ki lojaritm natirèl yon googol?

**Pwoblèm 115: Estime yon logaritm natirèl yon lòt fwa ankò**

Pou ki valè  $x$ ,  $\ln x = 0$ ?



---

**5. Domèn ak Plaj****Pwoblèm 116: Domèn ak Plaj**

Sonje pwopriyete fonksyon eksponansyèl yo.

Ki domèn fonksyon  $e^x$  la?

- A) Tout nonb reyèl    B) Tout nonb pozitif    C) Tout nonb pozitif, plis zewo  
 D) Tout nonb ki pa zewo    E) Okenn nan sa k anwo yo

Ki imaj (Plaj) fonksyon  $e^x$  la?

- A) Tout nonb reyèl    B) Tout nonb pozitif    C) Tout nonb pozitif, plis zewo  
 D) Tout nonb ki pa zewo    E) Okenn nan sa k anwo yo

**Pwoblèm 117: Imaj ak Domèn**

Pratikman tout pwopriyete  $\ln x$  yo ka dedwi soti nan pwopriyete korespondan fonksyon eksponansyèl  $e^x$ . Konsidere repons yo bay nan kesyon anvan an, ki sa ki domèn fonksyon  $\ln x$ ?

- A Tout nonb reyèl    B Tout nonb pozitif    C Tout nonb pozitif, plis zewo  
 D Tout nonb ki pa zewo    E Okenn nan sa k anwo yo

Ki imaj (plaj) fonksyon  $\ln x$  la?

- A Tout nonb reyèl    B Tout nonb pozitif    C Tout nonb pozitif, plis zewo  
 D Tout nonb ki pa zewo    E Okenn nan sa k anwo yo

**Pwoblèm 118: Asenptotik**

Nou konnen ke si  $x$  vin vrèman gwo ak pozitif, lè sa a  $e^x$  ap vin gwo tou epi pozitif, san limit. Lè  $x$  vin vrèman gwo epi l negatif (i.e., ale nan direksyon  $-\infty$ ), Lè sa a  $e^x$ ...

- A vin vrèman gwo ak negatif    B negatif, ap vin pi pre ak pi pre zewo  
 C pozitif, ap vin pi pre ak pi pre zewo    D vin vrèman gwo ak pozitif  
 E Okenn nan sa yo

Reyalite ki koresponn sou  $\ln x$  lan, se ke lè  $x$

- A vin vrèman gwo ak negatif  
 B negatif, ap vin pi pre ak pi pre zewo  
 C pozitif, ap vin pi pre ak pi pre zewo  
 D vin vrèman gwo ak pozitif

lè sa a  $\ln x$

- A vin vrèman gwo ak negatif  
 B negatif, ap vin pi pre ak pi pre zewo  
 C pozitif, ap vin pi pre ak pi pre zewo  
 D vin vrèman gwo ak pozitif

## 6. Diferansyasyon logaritmik

 Videyo



$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \ln(x) &= ? \\ e^{\ln(x)} &= x \\ u &= \ln(x) \\ e^u &= x \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \frac{d}{dx} e^u &= \frac{d}{dx} x = 1 \\ &= \left( \frac{d}{dx} e^u \right) \left( \frac{du}{dx} \right) \\ e^u \left( \frac{du}{dx} \right) &= \dots \end{aligned}$$

## 7. Derive Logaritm natirèl la

Koleksyon fonksyon debaz nou an, ke nou ka diferansye kounye a gen yon lòt antre

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

### Pwoblèm 119: Pratik

Ki sa ki se derive  $f(x) = \ln(3x)$ ?

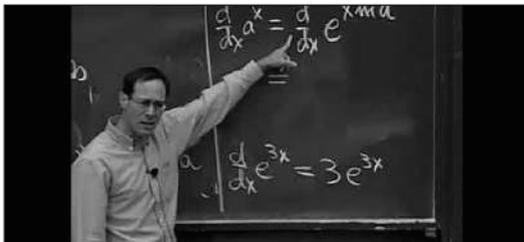


## 8. Diferansyasyon fonksyon eksponansyèl yo

Nou te jwenn ke  $\frac{d}{dx} a^x = M(a)a^x$ . Li lè pou detèmine nonb mistè  $M(a)$ .

Pou diferansye anpil fonksyon eksponansyèl, logaritm natirèl la parèt, an n di, natirèlman.

Gen de metòd, ki fondamantalman idantik, ki ka itilize. Nou pral aprann metòd sa yo nan de videyo kap vini yo, e nou pral travay sou anpil egzanp pou ede w vin alèz ak itilizasyon metòd sa yo.

 Videyo
**Diferansyasyon fonksyon eksponansyèl ak lòt baz**

Nou ka idantifye finalman nonb mistè nou an, epi diferansye fonksyon eksponansyèl ak nenpòt baz.

Pou nenpòt konstan pozitif  $a$ ,

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

**Pwoblèm 120: Pratik 1**

Jwenn derive  $f(t) = 10^t$ .

$$f'(t) = \text{[input field with calculator icon]}$$

**Pwoblèm 121: Pratik 2**

Poze  $g(t) = \log_{10} t$ . Twouve  $g'(t)$ .

(Sijasyon: ou jis jwenn derive envès fonksyon sa a.)

$$g'(t) = \text{[input field with calculator icon]}$$

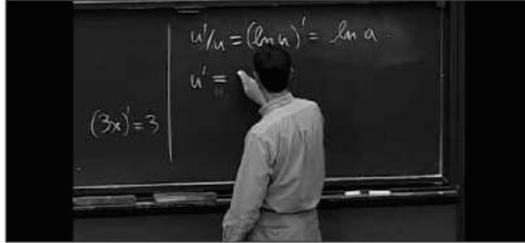
## 9. Metòd 2: diferansyasyon logaritmik

### Pwoblèm 122: Yon fonksyon ki gen rapò

Poze  $f(x) = x^x$ . Pou kalkile  $f'(x)$ , kiyès nan règ sa yo ki aplike?

- A Fòmil la  $\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a$ 
 B Règ puisans lan
  C Règ pwodwi a  
 D Okenn nan sa yo

#### Videyo



### Pwoblèm 123: Konpare fonksyon yo

Vrè oswa Fo: Si  $f(x) = x^x$ , lè sa a lè  $x > 0$ ,  $f'(x) > f(x)$ .

- A Vrè
  B Fo

#### Videyo



## 10. Prèv règ puisans lan pou tout nonb reyèl

### Metòd derive yo

#### Metòd 1: Pasaj nan baz e

Pou kalkile  $(f(x)^{g(x)})'$ ,

- Tou dabò chanje baz  $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ ,
- Answit derive pandan w ap sèvi ak règ chèn lan, ak derive fonksyon eksponansyèl yo ak logaritmik natirèl yo.

#### Metòd 2: Diferansyasyon logaritmik

Pou kalkile  $u'$ ,

- Tou dabò kalkile  $(\ln(u))'$ ,
- answit itilize fòmil

$$\frac{u'}{u} = (\ln(u))'$$

epi rezoud pou  $u'$ .

#### Konplete Prèv règ puisans lan pou tout puisans reyèl $x^r$

Nou ka itilize tou de metòd pou derive fonksyon eksponansyèl yo pou bay yon prèv règ puisans lan pou nenpòt puisans  $r$ , rasyonèl oswa irasyonèl. An n wè kijan.

Remake ke ou ka vle eseye travay sou prèv sa yo pou kont ou dabò kòm yon egzèsis lè w ap itilize règ nou te aprann pi wo a.

#### Prèv ak Metòd 1

Metòd 1 se pou chanje baz lan an baz  $e$ .

$$x^r = (e^{\ln x})^r = e^{r \ln x} \quad (5.51)$$

Aplike règ chèn lan lè w itilize  $u = r \ln x$ .

$$\frac{d}{dx} e^u = \frac{de^u}{du} \frac{du}{dx} \quad (5.52)$$

$$= e^{r \ln x} \frac{r}{x} \quad (5.53)$$

$$= x^r \frac{r}{x} = rx^{r-1} \quad (5.54)$$

Sa a se sa nou espere jwenn! E prèw sa a valab pou  $r$  nenpòt nonb, rasyonèl oswa irasyonèl.

## Prèw ak Metòd 2

Metòd 2 se pou aplike logaritm natirèl la epi fè diferansyasyon an.

$$\ln x^r = r \ln x \quad (5.55)$$

Derive a se  $\frac{r}{x}$ . Koulye a, nou bezwen sèvi ak fòmil la:

$$\frac{u'}{u} = (\ln u)' \quad (5.56)$$

$$\frac{(x^r)'}{x^r} = \frac{r}{x} \quad (5.57)$$

$$(x^r)' = \frac{rx^r}{x} = rx^{r-1}. \quad (5.58)$$

Konsa, nou jwenn  $\frac{d}{dx} x^r = rx^{r-1}$ , ki se sa nou te atann nou! E prèw sa a valab pou  $r$  nenpòt nonb, rasyonèl oswa irasyonèl.

---

## 11. Pratik derive logaritm ak ekspozan yo

 Videyo



## 12. Pratik siplemantè

### Pwoblèm 124: Tcheke derive yo

Ki sa  $\frac{d}{dx} \ln(\sqrt{x}) \Big|_{x=1/4}$  bay?

(Antre e pou  $e$ .)



### Pwoblèm 125: Baz diferan yo

Jwenn  $\frac{d}{dx} x^{\ln x} \Big|_{x=e}$  ?

(Antre e pou  $e$ .)



### Pwoblèm 126: Alg nan yon lak

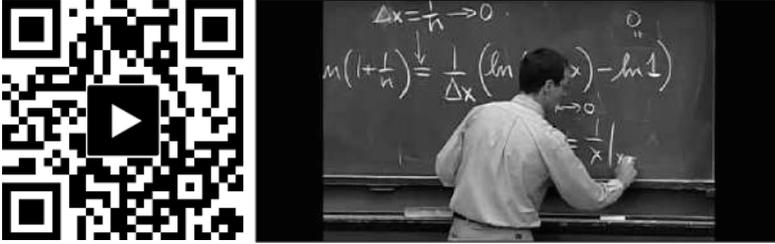
Sipoze nan janvyè,  $t = 1$ , yon lak kouvri ak 2 mètr kare alg. Chak mwa, zòn ki kouvri ak alg lan double. (Sipoze ke kwasans lan fèt kontinyèlman.) Jwenn to kwasans lan kòm yon fonksyon nan tan ak inite mètr kare pa mwa. Antre  $t$  pou  $t$  an mwa.



## 13. Nonb e a revize

### Nonb $e$

Nou ka itilize apwòch jeneral pran logaritm natirèl la pou plis bagay pase jwenn derive. Isit la nou pral sèvi ak metòd sa a pou evalye yon limit, epi jwenn yon apwoksimasyon nimerik pou nonb  $e$  a!


**Videyo**



---

## 14. Rezime

### Pwopriyete pou $x$

$\log_{10}(x)$  se fonksyon envès  $10^x$ .

Logaritm natirèl la, endike pa  $\ln(x)$ , se fonksyon envès  $e^x$ .

- $\ln e^x = x$
- $e^{\ln x} = x$
- $\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$
- $\ln(a^b) = b \ln(a)$

### Derive logaritm natirèl la

Koleksyon fonksyon debaz nou an, ke nou ka diferansye, kounye a gen yon lòt antre ::

$$\frac{d}{dx} \ln x = \frac{1}{x}$$

### Diferansyasyon fonksyon eksponansyèl ak lòt baz

Pou nenpòt konstan pozitif  $a$ ,

$$\frac{d}{dx} a^x = a^x \ln a.$$

### Metòd diferansyasyon

#### Metòd 1: Pasaj nan baz e

Pou kalkile  $(f(x)^{g(x)})'$ ,

- Tou dabò chanje baz  $f(x)^{g(x)} = e^{g(x) \ln f(x)}$ ,
- Answit derive pandan w ap sèvi ak règ chèn lan, ak derive fonksyon eksponansyèl yo ak logaritmik natirèl yo.

## Metòd 2: Diferansyasyon logaritmik

Pou kalkile  $u'$ ,

- Tou dabò kalkile  $(\ln(u))'$ ,
- answit sèvi ak fòmil la

$$\frac{u'}{u} = (\ln(u))'$$

epi rezoud pou  $u'$ .

## Solisyon yo

### Pwoblèm 110: Fonksyon eksponansyèl la

Fonksyon eksponansyèl yo toujou pozitif. Epi yo enjektif, sa ki vle di yo gen yon envès!

A

A

### Pwoblèm 111: Log baz 10

Si  $\log_{10} 1000 = a$ , sa vle di ke  $10^a = 1000$ , ki donk  $a = 3$ . Se menm jan an tou,  $10^{-6} = .000001$ , ebyen  $\log_{10} 0.000001 = -6$ .

### Pwoblèm 112: Chif yo

Si  $\log_{10} x \approx 8.23$ , lè sa a  $x$  se nan menm lòd grandè tankou  $10^8$ , ki genyen 9 chif.

### Pwoblèm 114: Estime yon logaritm natirèl ankò

Pwiske  $10 \approx e^{2.3026}$ , sa vle di ke  $10^{100} \approx (e^{2.3026})^{100} = e^{230.26}$  selon pwopriyete ekspozan yo. Ki donk,  $\ln(10^{100}) \approx 230.26$ .

### Pwoblèm 115: Estime yon logaritm natirèl yon lòt fwa ankò

$\ln 1 = 0$  paske  $e^0 = 1$ .

### Pwoblèm 116: Domèn ak Plaj

Domèn nan se tout nonb reyèl yo. Imaj (plaj) la se tout nonb pozitif.

A

B

### Pwoblèm 117: Imaj ak Domèn

Fonksyon  $\ln x$  lan se envès fonksyon  $e^x$  la. Ki donk domèn  $\ln x$  la se ansanm imaj (Plaj) fonksyon  $e^x$  la, ki se tout nonb pozitif. Se menm jan an tou, ansanm imaj (plaj) fonksyon  $\ln(x)$  la se domèn fonksyon  $e^x$  la, ki se tout nonb reyèl.

B

A

**Pwoblèm 118: Asenptotik**

Nou konnen ke  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$ . Sa a enplike ke pandan  $x$  ap pwoche 0 soti adwat (sonje ke  $\ln x$  defini sèlman pou nonb pozitif), Lè sa a  $\ln x$  ap pwoche  $-\infty$ .

- Ⓒ pozitiv, ap vin pi pre ak pi pre zewo  
 Ⓐ vin vrèman gwo ak negatif  
 ☐

**Pwoblèm 119: Pratik**

Nou ka aplike règ chèn pou jwenn sa

$$\frac{d}{dx} \ln(3x) = \frac{d}{du} \ln u \frac{du}{dx} \quad (5.44)$$

$$= \frac{1}{3x}(3) = \frac{1}{x}. \quad (5.45)$$

Sepandan, sa a sòti imedyatman nan pwopriyete logaritm lan ki di ke  $\ln(3x) = \ln(3) + \ln(x)$ ! Remake ke  $\ln(3)$  se yon konstan, ki donk derive li se zewo, sa ki bay

$$\frac{d}{dx} \ln(3x) = \frac{d}{dx} (\ln(3) + \ln(x)) = \frac{1}{x}.$$

**Pwoblèm 120: Pratik 1**

Aplike fòmil diferansyasyon eksponansyèl pou nenpòt baz:

$$\frac{d}{dt} 10^t = 10^t \ln 10.$$

**Pwoblèm 121: Pratik 2**

Nou pral rezoud pwoblèm sa a lè nou itilize sa nou konnen sou derive fonksyon envès yo.

Nou konnen ke  $g(t) = f^{-1}(t)$ , kote  $f(t) = 10^t$ , e nou jwenn derive li se  $f'(t) = 10^t \ln 10$ , ki donk derive a

$$g'(t) = \frac{1}{f'(g(t))} = \frac{1}{10^{\log_{10} t} \ln 10} = \frac{1}{t \ln 10} \quad (5.46)$$

**Pwoblèm 122: Yon fonksyon ki gen rapò**

Fòmil  $\frac{d}{dx}a^x = a^x \ln a$  la aplike sèlman lè baz la fiks e ekspozan an se varyab la. Nan ka sa a, tou de: ekspozan an ak baz la, se varyab.

Règ puisans lan aplike sèlman si baz la se varyab la epi ekspozan an fiks.

Nou asireman pa ka aplike règle pwodwi a.

Se konsa, repons lan se "anyen nan sa ki anwo a." An n aprann dezyèm metòd la pou abòde kalite (tip) derive sa yo, epi apre sa, nou pral aplike l nan egzanp sa a.

□

**Pwoblèm 123: Konpare fonksyon yo**

Fo. Nou konnen ke  $\frac{d}{dx}x^x = x^x(1 + \ln x)$ . Yo mande si  $f'(x) > f(x)$  lè  $x > 0$  se di:

$$f'(x) > f(x) \quad (5.47)$$

$$x^x(1 + \ln x) > x^x \quad (5.48)$$

$$1 + \ln x > 1 \quad (5.49)$$

$$\ln x > 0 \quad (5.50)$$

Sepandan, pou  $0 < x < 1$ ,  $\ln x < 0$ , sa ki fè deklarasyon an fo.

□

**Pwoblèm 124: Tcheke derive yo**

Nou jwenn derive  $\ln(\sqrt{x})$  lan lè n aplike règle chèn lan avèk  $u = \sqrt{x}$ :

$$\frac{d}{dx}\ln(\sqrt{x}) = \frac{1}{\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2x}.$$

Lè nou evalye nan  $x = 1/4$  nou jwenn 2.

Alternativman, youn ta ka remake ke  $\ln(\sqrt{x}) = \ln(x^{1/2}) = \frac{1}{2}\ln x$  epi apre sa, derive fonksyon an.

2

**Pwoblèm 125: Baz diferan yo**

Nou pral rezoud sa, pandan n ap itilize tou de Metòd: Metòd 1:

$$x = e^{\ln x}, \quad \text{so} \quad (5.59)$$

$$x^{\ln x} = (e^{\ln x})^{\ln x} = e^{(\ln x)^2} \quad (5.60)$$

Diferansyasyon (derive) pa rapò ak  $x$  n ap jwenn:

$$\frac{d}{dx} e^{(\ln x)^2} = \frac{d}{du} e^u \frac{d(\ln x)^2}{dx} \quad (5.61)$$

$$= e^u \frac{2 \ln x}{x} \quad (5.62)$$

$$= x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \quad (5.63)$$

Lè nou evalye nan  $e$  nou ap jwenn:

$$x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \Big|_{x=e} = e^{\ln e} (2 \ln e) / e = e(2/e) = 2. \quad (5.64)$$

Metòd 2:

$$\ln(x^{\ln x}) = \ln(x) \ln(x) = (\ln x)^2 \quad (5.65)$$

Diferansyasyon (derive) pa rapò ak  $x$  nou ap jwenn:

$$\frac{d}{dx} (\ln x)^2 = \frac{2}{x} \ln x \quad (5.66)$$

Lè n aplike fòmil =  $u'$  la, nou jwenn

$$\frac{d}{dx} x^{\ln x} = x^{\ln x} \left( \frac{2}{x} \ln x \right) \quad (5.67)$$

Lè nou evalye nan  $e$  nou ap jwenn:

$$x^{\ln x} \left( \frac{2 \ln x}{x} \right) \Big|_{x=e} = e^{\ln e} (2 \ln e) / e = e(2/e) = 2. \quad (5.68)$$

**Pwoblèm 126: Alg nan yon lak**

Zòn ki kouvri ak alg lan se  $2^t$ , kote  $t$  mezire an mwa. Konsa, to kwasans lan se derive a, ki se  $\frac{d}{dt} 2^t = 2^t \ln(2)$ .

# Devwa 2 Pati A

## 1. Pwoblèm Pati A

### Konsènan Pwoblèm Pati A

Pwoblèm Pati A yo ede w pratike teknik kalkil. Gen anpil egzèsis ki kontinye ide yo ki te prezante nan sekans aprantisaj ki anwo yo.

## 2. Revizyon

### Pwoblèm 127: 2A (1)

Ekri limit sa a kòm yon derive epi evalye li.

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}}$$



## 3. HW 2

### Pwoblèm 128: 2A (2)

Jwenn apwoksimasyon lineyè fonksyon  $f(x) = \sqrt{a + bx}$  bò kote  $x = 0$ . (Isit la  $a$  ak  $b$  se konstan; sipoze  $a > 0$ .)

$$f(x) \approx$$



**Pwoblèm 129: 2A (3)**

Jwenn apwoksimasyon lineyè fonksyon sa a nan vwazinaj  $x = 0$ .

$$f(x) = \frac{1}{a + bx}, \quad a \neq 0$$

$$f(x) \approx$$

**4. HW 2****Pwoblèm 130: 2A (4)**

Jwenn derive fonksyon an  $f(x) = (x^2 + 2)^2$

**Pwoblèm 131: 2A (5)**

Jwenn derive fonksyon an  $g(x) = (x^2 + 2)^{100}$

**5. HW 2****Pwoblèm 132: 2A (6)**

Jwenn derive yo pa diferansyasyon enplisit. Sipoze tout lèt yo reprezante konstan, eksepte pou varyab endepandan ak varyab depandan ki parèt nan derive a.

$$V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$$

$$\frac{dr}{dh} =$$

**Pwoblèm 133: 2A (7)**

Jwenn derive yo pa diferansyasyon enplisit. Sipoze tout lèt yo reprezante konstan, eksepte pou varyab endepandan ak varyab depandan ki parèt nan derive a.

$$PV^c = nRT$$

$$\frac{dP}{dV} =$$

**Pwoblèm 134: 2A (8)**

Jwenn derive yo pa diferansyasyon enplisit. Sipoze tout lèt yo reprezante konstan, eksepte pou varyab endepandan ak varyab depandan ki parèt nan derive a.

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos t$$

$$\frac{da}{db} =$$

## 6. HW 2

### Pwoblèm 135: 2A (\*) (9)

(Etwal la \* endike ke sa a se yon pwoblèm difisil.)

Eskal desibèl pou fòs son an se

$$L = 10 \log_{10}(I/I_0)$$

kote  $I$ , ki mezire an watt pou chak mètr kare, se entansite son an epi  $I_0 = 10^{-12}$  watt/m<sup>2</sup> se son ki pi dou ki ka tande a 1000 hertz. Mizik klasik tipikman sòti ant 30 ak 100 desibèl. Se sou 120 desibèl kote limit doulè nan zòrèy imen an ye.

1. Sipoze yon motè avyon nan 50 mètr gen yon nivo desibèl de 130, epi yon konvèsasyon nòmal nan 1 mètr gen yon nivo desibèl de 60. Ki rapò entansite ant de son sa yo?



2. Sipoze entansite son an pwopòsyonèl ak envèrs kare distans ki sòti nan sous son an. Sou baz règleman sa a, kalkile nivo desibèl son an sòti nan motè avyon an nan yon distans 100 mètr.



## 7. HW 2

### Pwoblèm 136: 2A (10)

Kalkile derive fonksyon  $xe^x$ .



### Pwoblèm 137: 2A (11)

Kalkile derive fonksyon  $e^{-x^2}$ .



**Pwoblèm 138: 2A (12)**

Kalkile derive fonksyon  $\ln(x^2)$ .



---

**8. HW 2****Pwoblèm 139: 2A (13)**

Konsidere fonksyon an  $\cosh(x) = \frac{(e^x + e^{-x})}{2}$ . Fonksyon sa a rele kosinis ipèbolik. Jwenn premye, dezyèm, ak twazyèm derive li yo.

$$\cosh'(x) =$$


$$\cosh''(x) =$$


$$\cosh'''(x) =$$


---

**9. HW 2****Pwoblèm 140: 2A (14)**

Kalkile derive fonksyon  $\sin^2(3x)$ .

**Pwoblèm 141: 2A (15)**

Kalkile derive fonksyon  $\ln(\cos(2x))$ .



**Pwoblèm 142: 2A (16)**

Kalkile derive fonksyon  $\tan^2(3x)$ .



---

**10. HW 2****Pwoblèm 143: 2A (17)**

Jwenn derive  $\sin(\arccos(x))$  lè  $|x| < 1$  nan de fason diferan.

1. Aplike règ chèn nan.
2. Evalye fonksyon an lè w itilize idantite trigonometrik yo, epi apre sa derive li.

Verifye ke repons ou jwenn yo se menm bagay.



## Solisyon yo

### Pwoblèm 127: 2A (1)

Si nou poze  $f(x) = \tan(x)$ , alò

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\tan(x) - 1}{x - \frac{\pi}{4}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{f(x) - f(\pi/4)}{x - \pi/4} \quad (5.69)$$

$$= f'(\pi/4) \quad (5.70)$$

$$= \sec^2(\pi/4) \quad (5.71)$$

$$= \left( \frac{2}{\sqrt{2}} \right)^2 = 2 \quad (5.72)$$

### Pwoblèm 128: 2A (2)

$$\frac{d}{dx} \sqrt{a+bx} = \frac{b}{2\sqrt{a+bx}}$$

Nan  $x = 0$ , fonksyon  $f(0)$  a egal ak  $\sqrt{a}$ . Donk, apwoksimasyon lineyè a se

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x = \sqrt{a} + \frac{b}{2\sqrt{a}}x.$$

### Pwoblèm 129: 2A (3)

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{1}{a+bx} \right) = \frac{-b}{(a+bx)^2} \implies f(x) \approx \frac{1}{a} - \frac{b}{a^2}x; \text{ OSWA:}$$

$$\frac{1}{a+bx} = \frac{1/a}{1+b/ax} \approx \frac{1}{a} \left( 1 - \frac{b}{a}x \right).$$

### Pwoblèm 130: 2A (4)

An n poze  $u = (x^2 + 2)$

$$\frac{d}{dx} u^2 = \frac{du}{dx} \frac{d}{du} u^2 = (2x)(2u) = 4x(x^2 + 2) = 4x^3 + 8x$$

Yon lòt fason,

$$\frac{d}{dx} (x^2 + 2)^2 = \frac{d}{dx} (x^4 + 4x^2 + 4) = 4x^3 + 8x$$

**Pwoblèm 131: 2A (5)**

An n poze  $u = (x^2 + 2)$ ; answit

$$\frac{d}{dx} u^{100} = \frac{du}{dx} \frac{d}{du} u^{100} = (2x)(100u^{99}) = (200x)(x^2 + 2)^{99}.$$

**Pwoblèm 132: 2A (6)**

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3}\pi r^2 h \\ \implies 0 &= \frac{1}{3}\pi(2rr'h + r^2) \\ \implies r' &= \frac{-r^2}{2rh} = \frac{-r}{2h} \end{aligned}$$

**Pwoblèm 133: 2A (7)**

$$\begin{aligned} PV^c &= nRT \\ \implies P'V^c + P \cdot cV^{c-1} &= 0 \\ \implies P' &= -\frac{cPV^{c-1}}{V^c} = -\frac{cP}{V} \end{aligned}$$

**Pwoblèm 134: 2A (8)**

$$\begin{aligned} c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos t \\ \implies 0 &= 2aa' + 2b - 2(\cos t(a'b + a)) \\ \implies a' &= \frac{-2b + 2 \cos t \cdot a}{2a - 2 \cos t \cdot b} \\ &= \frac{a \cos t - b}{a - b \cos t} \end{aligned}$$

**Pwoblèm 135: 2A (\*) (9)**

1. Si  $I_1$  se entansite motè avyon an epi  $I_2$  se entansite konvèsasyon an, lè sa a

$$\log_{10}(I_1/I_2) = \log_{10}\left(\frac{I_1/I_0}{I_2/I_0}\right) = \log_{10}(I_1/I_0) - \log_{10}(I_2/I_0) = 14$$

Donk,  $I_1/I_2 = 10^7$ .

2.  $I = C/r^2$  ak  $I = I_1$  lè  $r = 50$  sa a enplike ke

$$I_1 = C/50^2 \implies C = I_1 50^2 \implies I = I_1 50^2 / r^2$$

Sa a montre ke lè  $r = 100$ , nou gen  $I = I_1 50^2 / 100^2 = I_1 / 4$ . Kidonk,

$$10 \log_{10}(I/I_0) = 10 \log_{10}(I_1/4I_0) = 10 \log_{10}(I_1/I_0) - 10 \log_{10} 4 \approx$$

Son an nan 100 mètr se anviwon 120 desibèl (puisque nou sèlman gen 2 chif siyifikatif, li fè sans pou bay repons lan ak sèlman 2 chif siyifikatif).

**Pwoblèm 136: 2A (10)**

$$(x + 1)e^x$$

**Pwoblèm 137: 2A (11)**

$$(-2x)e^{-x^2}$$

**Pwoblèm 138: 2A (12)**

$$2/x$$

**Pwoblèm 139: 2A (13)**

Obsève ke derive fonksyon  $\cosh(x)$  se fonksyon an  $\frac{(e^x - e^{-x})}{2}$ , ki rele sinis ipèbolik,  $\sinh(x)$ . Fonksyon sa yo gen pwopriyete sa yo.

$$\cosh''(x) = \sinh'(x) = \cosh(x) \quad (5.73)$$

$$\sinh''(x) = \cosh'(x) = \sinh(x) \quad (5.74)$$

Olye de fonksyon trigonometrik yo, sinis ipèbolik ak kosinis ipèbolik pa osile. Sepandan, yo toujou parèt nan lanati. Kosinis ipèbolik la se fòm yon chenn oswa yon kòd ki pandye, koub sa a souvan rele katenè.

**Pwoblèm 140: 2A (14)**

$$6 \sin(3x) \cos(3x)$$

**Pwoblèm 141: 2A (15)**

$$-2 \sin(2x) / \cos(2x) = -2 \tan(2x)$$

**Pwoblèm 142: 2A (16)**

$$6 \tan(3x) \sec^2(3x) = 6 \frac{\sin 3x}{\cos^3 3x}$$

**Pwoblèm 143: 2A (17)**

Lè nou aplike règ chèn nan, nou jwenn

$$\cos(\arccos(x)) \frac{-1}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Yon lòt fason, nou konnen ke  $\arccos(x)$  se ang  $\theta$  ki bay  $\cos(\theta) = x$ , ki donk  $\sin(\theta) = \sqrt{1-x^2}$ . Derive fonksyon sa a se  $-\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$ , ki se menm repons nou te jwenn pi wo a lè nou te aplike règ chèn nan!

# Devwa 2 Pati B

## 1. Tank lwil

### Pwoblèm 144: Idantifye inite yo

Yon tank lwil ap koule, ki donk volim lwil la  $V(t)$  ki mezire an lit, selon tan  $t$  (ki mezire an èdtan), se:  $V(t) = a(10 - bt)^{5/2}$ . Si nonb 10 lan pa gen okenn inite, ki inite  $a$  ak  $b$ ?

An  $n$  poze  $L$  reprezante lit, epi  $hr$  reprezante èdtan.

inite  $a$



inite  $b$



### Pwoblèm 145: Vitès Mwayèn to varyasyon

Dapre done eksperimantal yo, ou chwazi  $a = 2$  ak  $b = 1$ . Gen yon tank lwil k ap koule, ki donk volim lwil la  $V(t)$  nan tan  $t$  (an èdtan) se:

$V(t) = 2(10 - t)^{5/2}$  lit. Jwenn vitès mwayèn to varyasyon volim lan pandan 5 premye èdtan yo, sa vle di pou  $0 < t < 5$ .

(Antre repons ou kòm yon desimal avèk 2 chif siyifikatif.)

(Remake: si volim lan ap ogmante, vitès mwayèn lan ta dwe pozitif; si l ap diminye, li ta dwe negatif.)



A  $L/hr$     B  $L^3/hr$     C  $Lhr$     D  $L^3hr$

E  $hr/L$     F  $hr/L^3$

**Pwoblèm 146: Ti entèval**

Nan ki vitès mwayèn lwil la ap vide pandan yon entèval ki pi kout, sètadi pandan 301 nyèm minit la?

Bay repons lan an lit pa èdtan.

(Awondi repons lan ak nonb pi pre antye.)

**Pwoblèm 147: Debi enstantane**

Nan ki debi lwil la ap koule soti 5 èdtan apre tank la kòmanse vide? (Awondi repons lan nan nonb antye ki pi pre a.)



||  A  $L/hr$   B  $L^3/hr$   C  $Lhr$   D  $L^3hr$   E  $hr/L$   F  $hr/L^3$

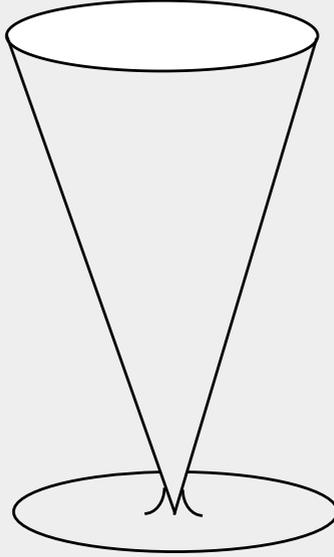
**Yon bagay pou reflechi sou li**

Konpare solisyon ou yo ak **ti entèval** ak **Debi enstantane**. Kisa ou remake epi pou ki sa?

## 2. Krèm Glas

### Pwoblèm 148: Wotè kòm yon fonksyon de volim

Pitit frè ou (nyès) ou a ap vizite ou, e w ap sèvi li krèm glase nan yon vè ki gen fòm konik (fòm konik kote pati anba a se pik kòn nan). Dyamèt ouvèti a se 3 pous, epi kòn lan gen yon wotè 6 pous.



Ou planifye pou ranpli pati kòn nan yon fason pou li rive nan yon wotè  $h$ . Pitit fi frè ou a mande pou ou lisyè krèm glase a konsa li pral toujou plat. Jwenn yon fòmil pou wotè krèm glase a kòm yon fonksyon volim  $V$  a.

(Ou ka vle chèche fòmil pou volim yon kòn.)

$$h =$$



### Pwoblèm 149: Kalkile derive a

Kalkile  $h'(V)$ .

$$h'(V) =$$



**Pwoblèm 150: Demann**

Nyès ou a trè difisil pou satisfè, epi li egzije pou ou ranpli bòl lan ak krèm glase jiska yon wotè  $h_0 = 3\text{in}$ . Li pèmèt yon ti erè ki pa dwe depase  $|\Delta h| \leq 0.01$ . An prensip, li posib pou satisfè kondisyon li yo paske kòn lan gen yon wotè 6 pous. Malerezman, pa gen okenn mak sou kòn lan. Sepandan, li gen entansyon sèvi ak yon lazè kalibre pou mezire wotè a apre ou fin sèvi li. Sèl zouti ou genyen, se yon seri kiyè ki ka mezire volim avèk yon erè ki pa depase  $|\Delta V| \leq 0.1$ .

Jwenn volim egzak ou dwe sèvi nyès ou a  $V_0$  an fonksyon de  $\pi$ . Apre sa, apwoksime erè nan mezi wotè a  $\Delta h$  an fonksyon de erè nan volim nan  $\Delta V$ .

(Ou ka antre valè desimal ak 3 chif apre vigil la.)

$$V_0 =$$



$$\Delta h \approx$$

**Pwoblèm 151: Reponn ak kondisyon yo**

Èske erè a ase piti pou ou ka garanti ke nyès ou ap satisfè ak kantite krèm glas ou ba li a?

- A Wi.  B Non.  C M pa konnen.

## Solisyon yo

### Pwoblèm 144: Idantifye inite yo

Puiske nonb 10 lan pa gen dimansyon, sa vle di li pa gen okenn inite. Sa vle di tou ke kantite  $bt$  dwe san dimansyon tou. Donk,  $b$  dwe gen inite frekans, sa vle di 1/hr (1 sou èdtan). Puiske volim lan mezire an lit, sa vle di konstan  $a$  dwe genyen inite lit tou.

### Pwoblèm 145: Vitès Mwayèn to varyasyon

Volim tank lwil la nan tan  $t$  an èdtan se  $2(10 - t)^{5/2}$  lit.

$$V(0) = 2 \cdot 10^{5/2} \text{liters}$$

$$V(5) = 2 \cdot 5^{5/2} \text{liters}$$

Vitès mwayèn to varyasyon an se

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2(5^{5/2} - 10^{5/2})}{5} = -100.$$

### Pwoblèm 146: Ti entèval

Pwen kòmansman 300yèm minit la se lè  $t = 5$  èdtan. Pwen final la se lè  $\frac{301}{60} = 5.016$  èdtan pase. Donk, vitès mwayèn varyasyon volim lan se

$$\frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{2(4.984^{5/2} - 5^{5/2})}{.016} = -56.$$

Vitès mwayèn lwil la ap vide a gen siy opoze ak to varyasyon volim lan, donk li se 56 lit pa èdtan.

### Pwoblèm 147: Debi enstantane

Debi a se valè negatif derive volim nan pa rapò ak tan an. Sa se

$V'(t) = \frac{d}{dt} 2(10 - t)^{5/2} = -5(10 - t)^{3/2}$ . Donk, apre 5 èdtan, nou jwenn

$V'(5) = 56$  lit pa èdtan.

**Pwoblèm 148: Wotè kòm yon fonksyon de volim**

Fòmil pou volim yon kòn an tèm de wotè  $h$  ak reyon  $r$  sa bay pa  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ .

Puiske dyamèt la se 3 pous, reyon an se 1.5 pous ak wotè a se 6 pous. Ki donk, nou ka re-ekri reyon an kòm yon fonksyon de wotè a tankou  $r = h/4$ . Lè nou rezoud pou  $h$ , nou jwenn

$$\begin{aligned}\frac{1}{3}\pi \frac{h^2}{16} h &= V \\ h^3 &= \frac{48}{\pi} V \\ h(V) &= \left(\frac{48}{\pi} V\right)^{1/3}.\end{aligned}$$

**Pwoblèm 149: Kalkile derive a**

Sèvi ak règ puisans lan ak règ chèn lan pou  $h(V) = \left(\frac{48}{\pi} V\right)^{1/3}$ . Sa bay

$$h'(V) = \frac{1}{3} \left(\frac{48}{\pi} V\right)^{-2/3} \frac{48}{\pi} = \frac{16}{\pi} \left(\frac{48}{\pi} V\right)^{-2/3}.$$

**Pwoblèm 150: Demann**

Nou rezoud pou jwenn:  $V_0 = \frac{\pi}{3 \cdot 16} 3^3 = \frac{9\pi}{16}$ . Apre sa, apwoksimasyon lineyè derive a ban nou  $\frac{\Delta h}{\Delta V} \approx h'(V_0)$ , oswa  $\Delta h \approx \Delta V h'(V_0)$ . Nou ranplase valè yo epi nou jwenn

$$h'(V_0) = \frac{16}{\pi} \left(\frac{48}{\pi} V_0\right)^{-2/3} \quad (5.75)$$

$$= \frac{16}{\pi} 27^{-2/3} = \frac{16}{9\pi}. \quad (5.76)$$

Nou konnen  $\Delta V \approx .1$ , donk  $\Delta h \approx .057$ , ki pi gwo pase limit erè akseptab la ki se 0.01.

**Pwoblèm 151: Reponn ak kondisyon yo**

Puiske  $\Delta h \approx .057$  pi gwo anpil pase limit akseptab la ki se 0.01, ou pa ka garanti ke nyès ou ap satisfè ak kantite krèm glas ou ba li a.



# Inite 3: Apwoksimasyon

---

# Apwoksimasyon lineyè ak Erè nan Mezi

---

## 1. Motivasyon

 Videyo




---

## 2. Apwoksimasyon lineyè ak Erè nan Mezi

**pwodui**  
**konpozisyon**  
**erè**

**Objektif**

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk pratik, ou ta dwe kapab:

- Jwenn **apwoksimasyon lineyè** pou nenpòt fonksyon.
- Rekonèt lineyarizasyon fonksyon debaz nan 0.
- Jwenn apwoksimasyon lineyè **konpozisyon ak pwodwi** lè n sèvi avèk apwoksimasyon debaz yo.
- Sèvi ak apwoksimasyon lineyè a pou **estime erè**.

---

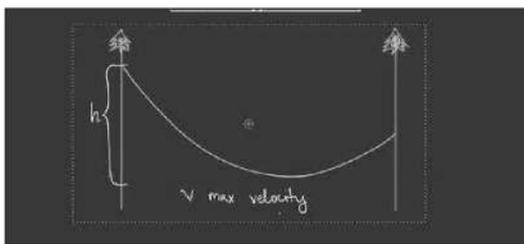
## 3. Yon pwoblèm ak yon tiwolyèn

Apwoksimasyon lineyè reviz

Ou deja konnen kijan pou fè apwoksimasyon lineyè. Sa te prensipal zouti nou te itilize pou jwenn derive tout fonksyon debaz yo nan inite anvan an.

Nou retounen sou apwoksimasyon lineyè ankò paske yo se zouti prensipal nou itilize pou jwenn apwoksimasyon nan syans ak jeni. La, nou pral devlope kèk lòt zouti pou itilize apwoksimasyon lineyè. Nou pral chanje pèspektiv nou tou epi n ap sèvi ak apwoksimasyon lineyè pou estime kijan erè nan mezi yo pwopaje nan yon sistèm epi konprann sansiblite sistèm lan fas ak ti chanjman (pètibasyon).

### Videyo



### Pwoblèm 1: Jwenn vitès maksimòm

Jwenn yon ekspresyon pou vitès maksimòm yon moun  $k$  ap monte sou tiwolyèn nan an tèm de enèji total sistèm lan  $E$  ak mas moun nan  $m$ .

$$v = \text{[input field with calculator icon]}$$

## 4. Rezoud pwoblèm nan

### Pwoblèm 2: Pwoblèm Revizyon

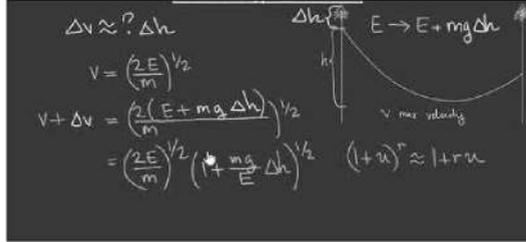
Sonje ke apwoksimasyon lineyè yon fonksyon  $f(x)$  pou  $x$  toupre  $x_0$  bay pa fòmil  $f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ .

Jwenn apwoksimasyon lineyè fonksyon an  $(1 + u)^r$  toupre  $u = 0$ .

$$(1 + u)^r \approx \text{[input field with calculator icon]}$$

Nan videyo sa a, nou itilize lèt  $g$  pou endike akselerasyon akòz gravite ki toupre sifas Latè. Konstan sa a apeprè egal a  $10 \frac{\text{meters}}{\text{second}^2}$ .

 Videyo



**Pwoblèm 3: Pwoblèm senplifye**

An n fè yon lòt sipozisyon senplifye. An n sipoze ke moun kap glise (Kourè) a kòmanse nètman nan repo. Sa vle di ke inisyalman, enèji sinetik la egal a zewo, ki donk enèji total la bay ak  $E = mgh$ .

Avèk sipozisyon adisyonèl sa a, an n sipoze nou modifiye wotè deplase pandan glisad la pa 2%, i.e.  $\frac{\Delta h}{h} = .02$ . Ki pousantaj  $v$  chanje?

(Jwenn yon apwoksimasyon pou  $\frac{\Delta v}{v}$ . Antre repons ou kòm yon desimal ak 2 chif dèyè vigil olye ekri l kòm yon pousantaj.)

$\frac{\Delta v}{v} =$

**5. Apwoksimasyon lineyè tou pre zewo**

Sonje ke apwoksimasyon lineyè yon fonksyon  $f(x)$  pou  $x$  toupre  $x = 0$  bay pa fòmil la  $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ . Jwenn apwoksimasyon lineyè tout fonksyon debaz yo toupre  $x = 0$ . Nou pral itilize fòmil sa yo anpil! Ki donk, ou ka menm vle memorize yo.

Nou rele apwoksimasyon lineyè a **lineyarizasyon** yon fonksyon.

**Problèm 4: Apwoksimasyon lineyè fonksyon debaz yo**

Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $\sin(x)$  toupre  $x = 0$ .



Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $\cos(x)$  toupre  $x = 0$ .



Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $e^x$  toupre  $x = 0$ .



Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $\ln(1+x)$  toupre  $x = 0$ .



**6. Konbinezon apwoksimasyon**

**Videyo**



**Apwoksimasyon (ki pwobableman pa lineyè) konpozisyon**

Sipoze ke  $g(x)$  se yon fonksyon tankou  $g(0) = 0$ . Pou jwenn yon apwoksimasyon yon fonksyon  $f(g(x))$  tou pre  $x = 0$ , nou ka pran yon apwoksimasyon lineyè pou  $f(u)$  epi lè sa a ranplase  $g(x)$  nan plas  $u$ . Apwoksimasyon ki sòti a pwobableman pa lineyè, men se toujou yon apwoksimasyon! **Warning:** sa mache sèlman si  $g(0) = 0$ .

$$f(u) \approx f(0) + f'(0)u \implies f(g(x)) \approx f(g(0)) + f'(g(0))g(x)$$

**Problèm 5: Eksponansyèl**

Ki apwoksimasyon lineyè  $e^{-x}$  toupre  $x = 0$ ?



**Pwoblèm 6: Puisans yo**

Ki apwoksimasyon lineyè  $(1 + 3x)^{-1/2}$  toupre  $x = 0$ ?

**Pwoblèm 7: Apwoksimasyon ak konpozisyon**

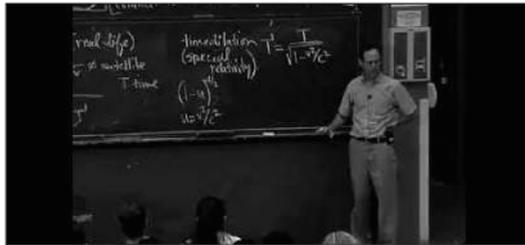
Itilize yon apwoksimasyon lineyè pou  $e^u$  pou jwenn yon apwoksimasyon (ki pa lineyè an  $x$  men toujou polinòm) pou fonksyon  $e^{x^3}$  toupre  $x = 0$ .

$$e^{x^3} \approx$$

**Pwoblèm 8: Apwoksimasyon ak konpozisyon**

Kombine aproksimasyon lineyè pou fonksyon logarit natirèl ak rasin kare pou jwenn yon aproksimasyon (ki pa lineyè an  $x$  men toujou polinòm) pou fonksyon  $\ln \sqrt{1 + x^2}$  toupre  $x = 0$ .

$$\ln \sqrt{1 + x^2} \approx$$

**7. Dilatasyon tanporèl****Videyo**

Dènye videyo a te mansyone apwoksimasyon kwadratik. Nou poko rive la, men sa ap vini apre! Pa enkyete w, elèv yo nan klas sa a pa t ko konnen anyen sou apwoksimasyon kwadratik non plis.

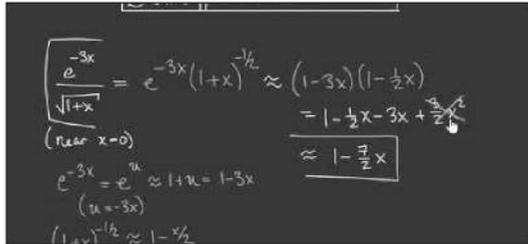
## 8. Pwodui fonksyon yo

### Pwoblèm 9: Egzanp konplike

Jwenn apwoksimasyon lineyè fonksyon  $\frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}}$  toupre  $x = 0$ .



### Videyo



Pou jwenn apwoksimasyon lineyè yon fonksyon  $h(x) = f(x)g(x)$  toupre  $x = 0$ , li sifi pou jwenn yon apwoksimasyon lineyè pou  $f(x)$ , jwenn yon apwoksimasyon lineyè pou  $g(x)$ . Epi, lè sa a, apwoksimasyon lineyè pou  $h(x)$  se pwodwi de apwoksimasyon sa yo kote nou anile tout tèm ki kwadratik (oswa pi wo pou plis pwodwi).

$$h(x) = f(x)g(x) \tag{6.4}$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \tag{6.5}$$

$$g(x) \approx g(0) + g'(0)x \tag{6.6}$$

$$h(x) \approx (f(0) + f'(0)x)(g(0) + g'(0)x) \tag{6.7}$$

$$= f(0)g(0) + (f'(0)g(0) + f(0)g'(0))x + f'(0)g'(0)x^2 \tag{6.8}$$

$$\approx f(0)g(0) + (f'(0)g(0) + f(0)g'(0))x \tag{6.9}$$

**Pwoblèm 10: Pratik ak pwodwi yo 1**

Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $\frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2}$  toupre  $x = 0$ .

Ki apwoksimasyon lineyè toupre  $x = 0$ ?

$$\frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2} \approx$$

**Pwoblèm 11: Pratik ak pwodwi yo 2**

Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$  tou  $x = 0$  Itilize aproksimasyon nou konnen pou  $\sin(x)$  ak  $\cos(x)$  toupre  $x = 0$ .

**Pwoblèm 12: Pratik ak pwodwi yo 3**

Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $\ln(x) \sin(x-1)$  toupre  $x = 1$ .

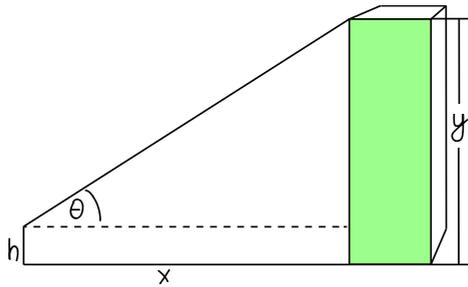
**9. Erè nan mezi**

 Videyo



**Estimasyon wotè a**

Men yon dyagram pou mezi nou sot fè yo.



Wotè  $y$  bilding Vèt la bay pa

$$y = h + x \tan(\theta).$$

Anba a se yon tablo mezi yo te fè, osi byen ke erè a nan chak tèm.

Kantite	Varyab	Mezir	Erè
Distans ak Je Jen	$h$	4.9 pye	$\pm .01$ pye
Distans ak Bilding Green	$x$	175 pye	$\pm 3$ pye
Ang	$\theta$	57 degre	$\pm 3$ degre

Ki kote erè a soti?

- Erè nan mezi wotè Jen nan soti nan erè awondi ak erè ineran lè w sèvi ak yon riban metrik ki pa gen ase presizyon.
- Erè distans ki genyen pa rapo ak bilding vèt la soti plizyè kote: erè nan longè reyèl kòd la ki ka diferan pa kèk pous, erè nan mache sou yon liy dwat pafè pandan nou ap mezire, ak erè ki soti nan lefèt ke kòd la ap etann lè nou rale l, sa ki fè kòd la vin pi long. Se poutèt sa, an reyalyite, nou atann ke mezi nou an se pwobableman yon si-estimasyon (estimasyon an plis).
- Erè nan ang lan soti nan van ak fisèl la ki pa pandye dwat desann, erè nan konstriksyon aparèy la, ak erè nan kenbe aparèy la pou li mezi a.

### Pwoblèm 13: Estimasyon wotè

Ki wotè estime Bilding Vèt la?

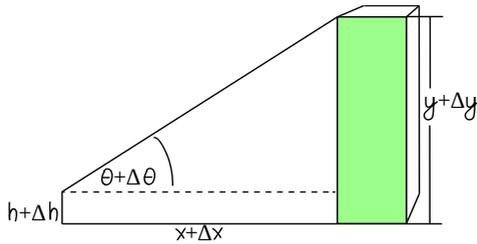
(Antre yon antye ak 3 chif siyifikatif.)



### Erè nan estimasyon

Ki sa ki  $\Delta y$ , ki se yon tèm erè ki reprezante diferans ant wotè nou te kalkile pou bilding lan soti nan mezi nou yo ak wotè reyèl li?

Premyeman, sonje sa nou vrèman genyen se sa ki annapre.



Epi

$$\tan(\theta + \Delta\theta) = \frac{(y + \Delta y) - (h + \Delta h)}{x + \Delta x} \quad (6.10)$$

$$= \frac{\Delta y - \Delta h + (y - h)}{x + \Delta x} \quad (6.11)$$

$$= \frac{\Delta y - \Delta h + x \tan \theta}{x + \Delta x} \quad (6.12)$$

Dènye liy lan sèvi ak lefèt ke  $\tan(\theta) = \frac{y - h}{x}$ .

Pou detèmine erè a, nou rezoud pou  $\Delta y$ :

$$\Delta y = \Delta h + (x + \Delta x) (\tan(\theta + \Delta\theta)) - x \tan(\theta).$$

Pou jwenn yon sans de lòd tèm erè sa a, an n jwenn yon apwoksimasyon lineyè pou  $\tan(\theta + \Delta\theta)$  toupre  $\theta = 57$  degre.

## 10. Kontinyasyon sou estimasyon erè a

Pou estime tèm erè a, nou jwenn:

$$\Delta y = \Delta h + (x + \Delta x) (\tan(\theta + \Delta\theta)) - x \tan(\theta)$$

$$\approx \Delta h + (x + \Delta x) (\tan(\theta) + \sec^2(\theta)\Delta\theta) - x \tan(\theta)$$

$$= \Delta h + \Delta x \tan(\theta) + x \sec^2(\theta)\Delta\theta + \Delta x \Delta\theta \sec^2(\theta)$$

Sa a se tèm ki soti nan paj nou te wè anvan an.

la a nou itilize apwoksimasyon lineyè pou  $\tan(\theta + \Delta\theta)$ .

Note byen ke, sa a egal ak liy anvan an. Nou multipliyè ansanm tèm liy ki nan mitan an, epi nou elimine

$$\approx \Delta h + \Delta x \tan(\theta) + x \sec^2(\theta)\Delta\theta.$$

tèm  $x \tan(\theta)$   
yo.

Dènye sa a se  
yon egalite  
apwoksimatif.  
Nou anile tèm  
kwadratik la  
paske li pa  
lineyè.

### Pwoblèm 15: Idantifye pi gwo tèm erè

Nan tèm erè  $\Delta y \approx \Delta h + \Delta x \tan(\theta) + x \sec^2(\theta)\Delta\theta$ , ki tèm ki gen pi gwo kontribisyon nan erè a?

A  $\Delta h$     B  $\Delta x \tan(\theta)$     C  $x \sec^2(\theta)\Delta\theta$

### Pwoblèm 16: Erè a

Ki valè erè a nan mezi wotè nou an?

(Antre yon antye.)

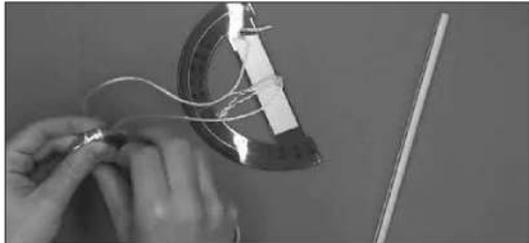


Konpare sa ak erè reyèl la, sa bay ke Bildung vèt lan an reyalyite gen 295 pye wotè. Èske estimasyon nou an tonbe nan limit erè yo?

A wi    B non

## 11. Pwojè

 Videyo



Konstwi pwòp ekipman pou mezire altitud ou epi jwenn wotè objè, tankou wotè zanmi ou yo ak lòt bagay ki gen valè ou deja konnen. Asire ou reponn kesyon sa yo epi teste ipotèz ou a!

Ki erè ou predi pou chak mezi ou fè? Ki limit erè pou wotè a? Èske mezi wotè ou a tonbe nan limit erè ou te espere a? Poukisa oswa poukisa non?

## 12. Pratik sou apwoksimasyon erè

### Pwoblèm 17: Mezi vitès

Sipoze ou mezire vitès yon objè lè ou mezire li pran 1 segonn pou li vwayaje 1.2 mè. Erè mezi a se .001 mè nan distans, epi erè nan tan an se .01 segonn. Ki valè absoli erè nan apwoksimasyon lineyè pou vitès la?

(Antre repons nan desimal a twa chif apre pwen desimal. Antre inite erè a lè ou itilize  $m$  pou endike mè ak  $s$  pou endike segonn.)

$$|\Delta v| \leq$$



Inite:



### Pwoblèm 18: Enèji sinetik

Sipoze ou mezire vitès yon moustik se 1.3 m/s ak yon erè 0.2 m/s. Nou apwoksime mas moustik la kòm yon grenn diri, ki gen yon mas nan lòd  $10^{-6}$  kg. Ki erè nan enèji sinetik la? Sipoze pa gen okenn vitès wotasyon. Nan dezyèm kare repons lan, antre inite ki enplike m, s, ak kg pou endike mè, segonn, ak kilogram respektivman. (men pa **not** itilize J pou Joules oswa N pou Newtons.)

(Ekri repons ak 2 chif siyifikatif presizyon, i.e. sa vle di ak 2 nonb ki pa zewo.)

$$|\Delta K| \leq$$



Inite:



## 13. Pratik siplemantè

### Pwoblèm 19: Pwoblèm pratik 1

Ki sa ki apwoksimasyon lineyè pou  $\cos(x/2)$  toupre  $x = 0$ ?



### Pwoblèm 20: Pwoblèm pratik 2

Ki sa ki apwoksimasyon lineyè pou  $\ln((1 + ax)^r)$  toupre  $x = 0$ ?



### Pwoblèm 21: Pwoblèm pratik 3

Sèvi ak yon apwoksimasyon lineyè pou pou jwenn yon apwoksimasyon (sa a pa pral lineyè) pou fonksyon  $\sin(x^3)$  toupre  $x = 0$ .

$\sin(x^3) \approx$  

## 14. Pratik

### Pwoblèm 22: Kosyan

Konsidere  $f(x) = \frac{e^{3x}}{\sqrt{1+x}}$ .

Ki sa ki apwoksimasyon lineyè pou  $f(x)$  toupre  $x = 0$ ?

$f(x) \approx$  

### Pwoblèm 23: Pwoblèm konpozisyon

Konsidere  $\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)^{3/2}\right)$ .

Ki sa ki apwoksimasyon lineyè toupre  $x = 0$  bay?

$\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)^{3/2}\right) \approx$  

**Pwoblèm 24: Diferansasyon enplis ak apwoksimasyon lineyè**

Sipoze  $w$  gen rapò ak  $x$  pa ekwasyon  $(w + 1)e^w = x$ . Apwoksime valè  $w$  lè  $x = 1.1$  pandan n ap itilize lefèt ke  $w = 0$  lè  $x = 1$ .

(Antre repons lan ak 2 chif desimal.)

$w \approx$

**15. Rezime****Apwoksimasyon lineyè revize**

Ou deja konnen ki jan pou fè apwoksimasyon lineyè. Sa se te prensipal zouti nou te itilize pou jwenn derive tout fonksyon debaz yo nan inite anvan an.

Nou retounen sou apwoksimasyon lineyè ankò paske yo se zouti prensipal nou itilize pou jwenn apwoksimasyon nan syans ak jeni. La, nou pral devlope kèk lòt zouti pou itilize apwoksimasyon lineyè, epi n ap chanje pèspektiv nou pou estime kijan erè nan mezi yo pwopaje nan yon sistèm epi konprann sansiblite sistèm lan fas ak ti pètibasyon.

**Apwoksimasyon Lineyè toupre  $x = 0$** 

Sonje apwoksimasyon lineyè yon fonksyon  $f(x)$  pou  $x$  toupre  $x = 0$  bay pa fòmil sa a  $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ . Nou pral jwenn apwoksimasyon lineyè tout fonksyon debaz yo toupre  $x = 0$ . Nou pral itilize fòmil sa yo anpil! Se konsa, ou ta ka menm vle memorize yo.

Nou rele apwoksimasyon lineyè a

**linyarizasyon** yon fonksyon.

**Apwoksimasyon (ki ka pa lineyè) nan konpozisyon yo**

Sipoze  $g(x)$  se yon fonksyon tankou  $g(0) = 0$ . Pou jwenn yon apwoksimasyon pou yon fonksyon  $f(g(x))$  toupre  $x = 0$ , nou ka pran yon apwoksimasyon lineyè pou  $f(u)$  epi ranplase  $g(x)$  nan plas  $u$ . Rezilta a pral pwobableman pa lineyè, men li toujou yon apwoksimasyon!

Avètisman: Sa mache sèlman si  $g(0) = 0$ .

$$f(u) \approx f(0) + f'(0)u \quad \implies \quad f(g(x)) \approx f(g(0)) + f'(g(0))g(x) \quad ($$

**Apwoksimasyon Lineyè Pwodwi yo**

Pou jwenn apwoksimasyon lineyè yon fonksyon  $h(x) = f(x)g(x)$  toupre  $x = 0$ , li sifi jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $f(x)$ , jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $g(x)$ , epi apwoksimasyon lineyè  $h(x)$  se pwodwi de apwoksimasyon sa yo kote nou elimine tout tèm ki kwadratik (oswa pi wo pou plis pwodwi).

$$h(x) = f(x)g(x) \quad (6.19)$$

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x \quad (6.20)$$

$$g(x) \approx g(0) + g'(0)x \quad (6.21)$$

$$h(x) \approx (f(0) + f'(0)x) (g(0) + g'(0)x) \quad (6.22)$$

$$\begin{aligned} &= \\ f(0)g(0) + (f'(0)g(0) + f(0)g'(0))x + f'(0)g'(0)x^2 & (6.23) \\ \approx f(0)g(0) + (f'(0)g(0) + f(0)g'(0))x & (6.24) \end{aligned}$$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 1: Jwenn vitès maksimòm

Rezoud ekwasyon  $\frac{1}{2}mv^2 = E$  pou  $v$ . Nou jwenn  $v = \left(\frac{2E}{m}\right)^{1/2}$ .

### Pwoblèm 2: Pwoblèm Revizyon

Poze  $f(u) = (1 + u)^r$ . Lè sa a

$$f(u) \approx f(0) + f'(0)u \quad (6.1)$$

$$= (1 + 0)^r + r(1 + 0)^{r-1}u = 1 + ru \quad (6.2)$$

### Pwoblèm 3: Pwoblèm senplifye

Avèk sipozisyon senplifikatris ki anlè a, vitès maksimòm lan se  $v = \sqrt{2gh}$ . Epi

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= \sqrt{2g(h + \Delta h)} \\ &= \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{\Delta h}{h}\right)^{1/2} \quad \text{apwoksimasyon}(1 + u)^r \\ &\approx \sqrt{2gh} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}\right). \end{aligned}$$

Ki donk  $\Delta v \approx v \frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h}$ , e kon sa pousantaj ogmante an se  $\frac{1}{2} \frac{\Delta h}{h} = .01$ .

### Pwoblèm 4: Apwoksimasyon lineyè fonksyon debaz yo

$$\sin(x) \approx \sin(0) + \cos(0)x = x$$

$$\cos(x) \approx \cos(0) - \sin(0)x = 1$$

$$e^x \approx e^0 + e^0x = 1 + x$$

$$\ln(1 + x) \approx \ln(1 + 0) + \frac{1}{1 + 0}x = x$$

### Pwoblèm 5: Eksponansyèl

$$e^{-x} \approx 1 - x$$

### Pwoblèm 6: Puisans yo

$$(1 + 3x)^{-1/2} \approx 1 - 3x/2$$

**Pwoblèm 7: Apwoksimasyon ak konpozisyon**

Apwoksimasyon lineyè pou  $e^u = 1 + u$ . Lè nou ranplase  $x^3$  nan plas  $u$ , nou jwenn yon apwoksimasyon toupre zewo kòm  $1 + x^3$ .

**Pwoblèm 8: Apwoksimasyon ak konpozisyon**

Nou kòmanse pa ranplase  $x^2$  ak  $u$ . Agiman anndan an vin  $(1 + u)^{1/2} \approx 1 + u/2$ . Lè sa a  $\ln(1 + u/2) \approx u/2$ . Lè nou ranplase  $u$  ak  $x^2$ , nou jwenn yon aproksimasyon  $\ln(\sqrt{1 + x^2}) \approx x^2/2$ .

**Pwoblèm 9: Egzanp konplike**

$$\text{Poze } f(x) = \frac{e^{-3x}}{\sqrt{1+x}} = e^{-3x}(1+x)^{-1/2}.$$

$$\text{Answit } f(0) = 1.$$

Aplike règ pwodwi a pou kalkile derive:

$$\begin{aligned} & f'(x) \\ &= -3e^{-3x}(1+x)^{-1/2} + e^{-3x}(1+x)^{-3/2}(-1/2) \\ & f'(0) = -3 + -1/2 = -7/2 \end{aligned}$$

Ki donk, apwoksimasyon lineyè a bay pa  $f(x) \approx 1 - \frac{7}{2}x$ .

Nan pwochen videyo a, nou pral wè ki jan yo jwenn apwoksimasyon sa a pi fasil!

**Pwoblèm 10: Pratik ak pwodwi yo 1**

Nou apwoksime chak eleman, miltipliye yo, epi ansuit kenbe tèm lineyè yo sèlman.

$$\begin{aligned} (1+x)^{-2} &\approx 1 - 2x \\ \ln(1-x) &\approx (-x) \\ (1+x)^{-2} \ln(1-x) &\approx (1-2x)(-x) \approx -x \end{aligned}$$

**Pwoblèm 11: Pratik ak pwodwi yo 2**

$$\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \sin(x)(\cos(x))^{-2}$$

$$\sin(x) \approx x \quad \text{touple } x = 0$$

$$\cos(x) \approx 1 + 0x \quad \text{touple } x = 0$$

$$\cos(x)^{-2} \approx (1 + 0x)^{-2} = 1 \quad \text{touple } x = 0$$

$$\sin(x) \cos(x)^{-2} \approx x \quad \text{touple } x = 0$$

**Pwoblèm 12: Pratik ak pwodwi yo 3**

Premyeman, nou jwenn apwoksimasyon chak fonksyon toupre  $x = 1$  lè n ranplase  $u = x - 1$ . Remake ke  $u \rightarrow 0$  lè  $x \rightarrow 1$ . Sa pèmèt nou itilize apwoksimasyon fonksyon debaz yo nou te jwenn anvan an!

$$\ln(x) = \ln(1 + u) \approx u$$

$$\sin(x - 1) = \sin(u) \approx u$$

Aprè sa, nou pran pwodwi a, inyore tèm kwadratik:

$$\ln(1 + u) \sin(u) \approx u^2 \approx 0.$$

**Pwoblèm 15: Idantifye pi gwo tèm erè**

Tèm  $\Delta h$  a trè piti. Pou konpare de lòt tèm yo, nou ta ka eksplisitman konpare nonb yo.

Bilding Vèt la se bilding ki pi wo nan kanpis MIT a, ang  $\theta$  mwen an te pito gwo (pwoch  $\pi/3$ ), ki vle di ke  $\tan(\theta)$  ak  $\sec(\theta)$  yo tou de pito gwo. Epi nou jwenn inegalite yo,  $\tan(\theta) < \sec(\theta) < \sec^2(\theta)$  pou  $\pi/4 < \theta < \pi/2$ . Menm jan an tou  $x\Delta\theta$  li trè gwo lè n konpare ak  $\Delta x$ . Se poutèt sa  $x\Delta\theta \sec^2(\theta) \gg \Delta x \tan(\theta)$ . Ki donk pi gwo kontribisyon nan erè a se  $x \sec^2(\theta) \Delta\theta$ .

Altènativman, yon lòt fason pou reflechi sou sa se konsidere chak nan 3 kantite san dimansyon ki koresponn ak sous erè yo ak gwozè relatif yo konpare ak wotè  $y$  nan bilding lan. Pwiske  $y = h + x \tan \theta \approx x \tan \theta$ , kantite san dimansyon sa yo se:

$$\frac{\Delta h}{x \tan \theta}, \quad \frac{\Delta x \tan(\theta)}{x \tan \theta}, \quad \frac{x \sec^2(\theta) \Delta\theta}{x \tan \theta},$$

ki senplifye pou

$$\frac{1}{\tan \theta} \frac{\Delta h}{x}, \quad \frac{\Delta x}{x}, \quad \frac{\sec^2(\theta)}{\tan \theta} \Delta\theta.$$

Lè nou evalye pou jeyometri pwoblèm nou an, nou jwenn ke 3 prensipal kantite san dimansyon ki entere nou yo se

$$\begin{aligned} \frac{\Delta h}{x} &\approx \frac{.01}{175} \\ \frac{\Delta x}{x} &\approx \frac{3}{175} \\ \Delta\theta &\approx 3 \frac{\pi}{180} \quad (\text{rad.}) \end{aligned}$$

Soti nan jeyometri pwoblèm nou an, nou wè ke, anplis, tèm erè  $\frac{\Delta h}{x}$  multipliyè

ak  $\frac{1}{\tan \theta} < 1$ , epi tèm  $\Delta\theta$  multipliyè ak  $\frac{\sec^2(\theta)}{\tan \theta} > 1$ , sa vle di erè ki soti nan mezi ang lan se pi gwo faktè ki kontribye nan erè nan estimasyon sa a.

□

**Pwoblèm 16: Erè a**

Erè nou an se apeprè:

$$\Delta y \approx \Delta h + \Delta x \tan(\theta) + x \Delta \theta \sec^2(\theta)$$

$$\leq .01 + 3 \tan(19\pi/60) + 175(3\pi/180) \sec^2(19\pi/60) \approx 35 \text{ pye.}$$

Puiske erè aktyèl la se  $295-274 = 21$ , sa a nan limit erè yo espere a.

**Pwoblèm 17: Mezi vitès**

Lè nou pran an kont erè mezi a, vitès la bay pa:

$$\begin{aligned} v + \Delta v &= \frac{x + \Delta x}{t + \Delta t} \\ &= (x + \Delta x)(t + \Delta t)^{-1} \\ &= (x + \Delta x) \frac{1}{t} \left(1 + \frac{\Delta t}{t}\right)^{-1} \end{aligned}$$

Nou te retire  $t$  nan dezyèm tèm nan pou nou ka pran yon apwoksimasyon lineyè lè nou itilize fonksyon debaz nou yo.

$$\begin{aligned} v + \Delta v &\approx (x + \Delta x) \frac{1}{t} \left(1 - \frac{\Delta t}{t}\right) \\ &\approx \frac{x}{t} + \frac{\Delta x}{t} - \frac{x \Delta t}{t^2}. \end{aligned}$$

Remake ke nou te inyore tèm  $\Delta x \Delta t$  kòm li kwadratik.

Se poutèt sa, nou jwenn

$$\Delta v \approx \frac{\Delta x}{t} - \frac{x \Delta t}{t^2}$$

Nou bay ke  $\Delta x \leq \pm .001$  mètr, ak  $\Delta t \leq \pm .01$  segonn. Erè total  $\Delta v$  a limite pa erè ki pi gwo posib la:

$$\begin{aligned} |\Delta v| &\approx \left| \frac{\pm .001}{1} - \frac{(1.2)(\pm .01)}{1} \right| \\ &\leq |\pm 0.001| + |\pm 0.012| = 0.013 \text{ m/s} \end{aligned}$$

**Pwoblèm 18: Enèji sinetik**

$$\begin{aligned}
 K &= \frac{1}{2}mv^2 \\
 K + \Delta K &= \frac{1}{2}m(v + \Delta v)^2 \\
 &\approx \frac{1}{2}m(v^2 + 2v\Delta v) \\
 &\approx K + mv\Delta v
 \end{aligned}$$

Ki donk erè a se  $mv\Delta v$ , ki se  $10^{-6}(1.3)(.2) = 2.6 \times 10^{-7}$ . Note byen ke  $m$  gen inite kg,  $v$  ak  $\Delta v$  tou de gen inite m/s, ki donk inite yo se  $\text{kg m}^2/\text{s}^2$ .

**Pwoblèm 19: Pwoblèm pratik 1**

Poze  $u = x/2$ .  $\cos(x/2) = \cos(u) \approx 1$

**Pwoblèm 20: Pwoblèm pratik 2**

Lè w pran apwoksimasyon lineyè fonksyon anndan an,  $(1 + ax)^r \approx 1 + rax$ . Answit, aplike règ la chèn,  $\ln(1 + arx) \approx arx$ .

**Pwoblèm 21: Pwoblèm pratik 3**

Nou itilize apwoksimasyon  $\sin(u) \approx u$  toupre  $u = 0$ . Lè n ranplase  $x^3$  pou  $u$  nou jwenn ke  $\sin(x^3) \approx x^3$ .

**Pwoblèm 22: Kosyan**

Re-ekri  $f(x)$  tankou yon pwodui  $e^{3x}(1+x)^{-1/2}$ . Lè n itilize apwoksimasyon lineyè a,

$$e^{3x} \approx 1 + 3x$$

ak

$$(1+x)^{-1/2} \approx 1 - \frac{1}{2}x$$

nou jwenn

$$f(x) \approx (1+3x)\left(1 - \frac{1}{2}x\right) = 1 - \frac{1}{2}x + 3x - \frac{3}{2}x^2.$$

Depoze tèm kwadratik la, nou jwenn repons lan  $f(x) \approx 1 + \frac{5}{2}x$ .

**Pwoblèm 23: Pwoblèm konpozisyon**

Obsève ke toupre  $x = 0$ , agiman  $\frac{\pi}{2}(1+x)^{3/2}$  la toupre  $\frac{\pi}{2}$ . An patikilye, toupre  $x = 0$  nou gen

$$(1+x)^{3/2} \approx 1 + \frac{3}{2}x$$

e se poutèt sa

$$\frac{\pi}{2}(1+x)^{3/2} \approx \frac{\pi}{2} + \frac{3\pi}{4}x.$$

Donk, nou bezwen yon apwoksimasyon lineyè pou  $\cos(\pi/2 + u)$  pwòch  $u = \frac{3\pi}{4}x$ .

$$\cos(\pi/2 + u) \approx \cos(\pi/2) + (-\sin(\pi/2))(u) = -u.$$

Ranplase  $u = \frac{3\pi}{4}x$ , nou jwenn repons lan

$$\cos\left(\frac{\pi}{2}(1+x)^{3/2}\right) \approx -\frac{3\pi}{4}x.$$

**Pwoblèm 24: Diferansasyon enplis ak apwoksimasyon lineyè**

Sipoze  $w(x)$  reprezante valè  $w$  pou yon valè  $x$ . Nou vle itilize apwoksimasyon lineyè  $w(x) \approx w(1) + w'(1)(x - 1)$ . Nou konnen ke  $w(1) = 0$ . Nou pral derive enplisitman pou jwenn valè  $\frac{dw}{dx}$  nan  $x = 1$ .

$$\frac{d}{dx} [(w + 1)e^w] = \frac{d}{dx} x \quad (6.13)$$

$$\frac{dw}{dx} e^w + (w + 1)e^w \frac{dw}{dx} = 1 \quad (6.14)$$

Lè nou ranplase  $w = 0$  epi rezoud pou  $\frac{dw}{dx}$  nou jwenn:

$$\frac{dw}{dx} (1) + (1)(1) \frac{dw}{dx} = 1 \quad (6.15)$$

$$2 \frac{dw}{dx} = 1 \quad (6.16)$$

$$\frac{dw}{dx} = 1/2 \quad (6.17)$$

Kidonk  $w(1.1) \approx w(1) + w'(1)(1.1 - 1) = 0 + (1/2)(.1) = 0.05$ .

---

# Apwoksimasyon kwadratik

---

## 1. Motivasyon

 Videyo




---

## 2. Apwoksimasyon kwadratik

**Apwoksimasyon kwadratik.**

**Apwoksimasyon polinomyal de degre 2.**

**Erè.**

**Objektif yo**

Nan fen sekans sa a, epi aprè kèk ti pratik, ou ta dwe kapab:

- Konprann pou kisa yon **apwoksimasyon kwadratik** se **parabol** ki pi byen chita ak yon fonksyon pwòch yon pwen done kèlkonk.
- **Apwoksime fonksyon yo** pwòch yon pwen done kèlkonk a pati de valè premye ak dezyèm derive a nan pwen sa a.
- Itilize **notasyon gran "O"** pou dekri lòd grandè fonksyon erè ak apwoksimasyon lineyè kwadratik..

### 3. Revizyon

#### Pwoblèm 25: Revizyon

Konpare fonksyon  $f(x)$  la ak liy tanjant lan nan pwen  $x = a$ :

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x - a)$$

Kiyès nan sa ki ann apre yo ki nesèsèman vrè?

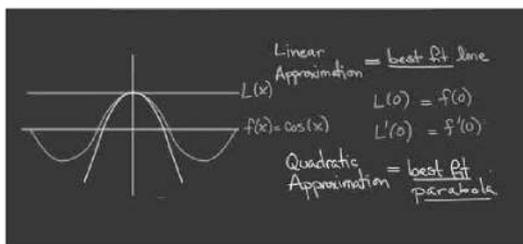
(Chwazi tout sa ki aplikab.)

A  $f(a) = L(a)$     B  $f(x) = L(x)$     C  $f'(a) = L'(a)$

D  $f'(x) = L'(x)$     E  $f''(a) = L''(a)$     F  $f''(x) = L''(x)$

### 4. Intwisyon jeyometrik

 Videyo



### 5. Pi bon ajisteman kwadratik

Pi bon ajisteman kwadratik pou yon fonksyon  $f(x)$  nan yon pwen  $x = 0$  se fonksyon kwadratik  $q(x)$  ki gen menm valè ak fonksyon  $f$  nan  $x = 0$ , e ki gen derive premye ak derive dezyèm ki matche ak derive premye ak derive dezyèm nan fonksyon  $f$  nan  $x = 0$ , i.e.:

$$f(0) = q(0) \quad (6.25)$$

$$f'(0) = q'(0) \quad (6.26)$$

$$f''(0) = q''(0) \quad (6.27)$$

**Pwoblèm 26: Detèmine fonksyon an**

Sipoze ke ou genyen yon fonksyon  $f(x)$ . Fonksyon kwadratik ki pi byen chita a pwòch  $x = 0$  yo bay li ak  $q(x) = ax^2 + bx + c$ .

(Eksprime  $f(0)$ ,  $f'(0)$ , ak  $f''(0)$  an tèm de  $a$ ,  $b$ , epi  $c$ .)

$$f(0) = \text{[input field]}$$

$$f'(0) = \text{[input field]}$$

$$f''(0) = \text{[input field]}$$

**6. Apwoksimasyon kwadratik pwòch 0**

 Videyo



Near  $x=0$ :

$$f(x) \approx \underbrace{f(0) + f'(0)x}_{\text{linear approximation}} + \underbrace{\frac{f''(0)}{2}x^2}_{\text{quadratic term}}$$

Near  $x=a$ :

$$f(x) \approx \underbrace{f(a) + f'(a)(x-a)}_{\text{linear approximation}} + \underbrace{\frac{f''(a)}{2}(x-a)^2}_{\text{quadratic term}}$$

**Pwoblèm 28: Fonksyon de baz yo**

Detèmine apwoksimasyon kwadratik pou  $e^x$  ak  $(1+x)^r$  pwòch  $x = 0$ .  
(Note ke dènye apwoksimasyon an pral depann de tou de  $x$  ak  $r$ .)

$$e^x \approx \text{[input field]}$$

$$(1+x)^r \approx \text{[input field]}$$

## 7. Apwoksimasyon kwadratik

**Apwoksimasyon kwadratik la** toupre  $x = a$  se **parabol ki pi byen chita** ak  $f$  nan pwen  $x = a$ .

Fòmil pou n kalkile apwoksimasyon kwadratik yon fonksyon  $f$  toupre yon pwen  $x = a$  se

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2. \quad (6.31)$$

Lè  $a = 0$ , apwoksimasyon kwadratik sa a vin

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2. \quad (6.32)$$

Nan pwoblèm ki ann apre yo, idantifye pwen  $x = a$  epi itilize apwoksimasyon kwadratik pou w apwoksime (estime) valè yo pou fonksyon ki anba a.

### Pwoblèm 29: Apwoksimasyon tanjant

Apwoksime  $\tan(46^\circ)$ , kote ang lan ap mezire an degre.

(antre repons ou an ak chif desimal aprè vigil la.)



### Pwoblèm 30: Apwoksimasyon log natirèl

Apwoksime (estime)  $\ln(1.12)$ .

(Antre apwoksimasyon w lan ak 3 chif desimal aprè vigil la.)



## 8. Pwoblèm apwoksimasyon kwadratik siplemantè

### Pwoblèm 31: Pwoblèm pratik 1

Apwoksime  $\cos(62^\circ)$ , kote ang lan te mezire an degre.

(Antre repons ou an ak 3 chif desimal aprè vigil la.)

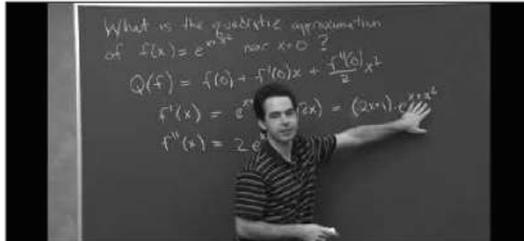


## 9. Apwoksimasyon kwadratik pwodui yo

 Videyo

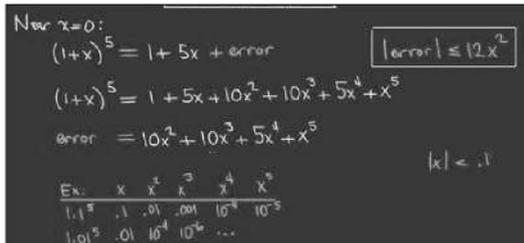


 Videyo



## 10. Notasyon Gran-O

 Videyo



Yon fonksyon  $f(x)$  nan lòd  $x^n$  pwòch  $x = 0$ , sa ki ekri ak notasyon gran "O" kòm  $f(x) = O(x^n)$  pwòch  $x = 0$ , si  $|f(x)| \leq kx^n$ .

## 11. Prè pou Machin

### Pwoblèm 32: egzèsis sou kredi pou machin

Egzèsis sa a nesosite itilizasyon yon kalkilatris.

Sipoze ou pran yon kredi de \$15,000 pou achte yon machin. Prè a gen yon to enterè de 3% chak ane, ki aplike chak mwa.

Fòmil pou kantite enterè ki akimile pandan yon peryòd tan  $T$  ki mezire an mwa se

$$A = 15,000 \left( 1 + \frac{.03}{12} \right)^T - 15,000.$$

Sèvi ak yon apwoksimasyon kwadratik pou estime kantite *enterè* ki akimile pandan 4 ane.

(Metè repons lan ak 2 chif desimal.)



### Pwoblèm 33: Grandè tèm lineyè a

Ki òd grandè tèm lineyè a?



### Pwoblèm 34: Grandè tèm kwadratik la

Ki òd grandè tèm kwadratik la?



**Pwoblèm 35: Tèm erè**

Erè nan apwoksimasyon sa a se  $O(x^3)$ . Pou jwenn lòd grandè  $x^3$  pou valè  $x$  nan apwoksimasyon sa a, sa a se, pou  $x = \frac{1}{400}$ .

Itilize yon kalkilatris pou kalkile tèm erè egzak la nan apwoksimasyon kwadratik la.

(Antre kòm yon nonb desimal jiska 2 chif apre virgil la.)

Itilize erè a pou idantifye lòd grandè  $k$  pwiske erè a konnen pou li se  $kx^3$  (kote  $x = 1/400$ ).

Lòd grandè  $(1/400)^3$ :



Kisa valè absoli erè a ye?



Lòd grandè  $k$ :

**12. Fonksyon konplike**

 Videyo



What does  $O(x^3)$  mean?  
 $f \sim O(x^3)$  near  $x=0$   
 if  $x^3$  dominant

$$\begin{aligned}
 e^{\sin x} &= e^{x+O(x^3)} = e^u \\
 &= 1 + u + \frac{u^2}{2} + O(u^3) \\
 &= 1 + (x+O(x^3)) + \frac{(x+O(x^3))^2}{2} + O((x+O(x^3))^3)
 \end{aligned}$$

**13. Konbinezon apwoksimasyon pratik**

Bibliyotèk fonksyon

Toupre zewo:  $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ .

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$
- $\sin(x) = x + O(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$
- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$
- $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + O(x^3)$

**Pwoblèm 36: Puisans**

Ki apwoksimasyon kwadratik  $(1+3x)^{-1/2}$  toupre  $x = 0$ ?

**Pwoblèm 37: Apwoksimasyon ak konpozisyon**

Itilize yon apwoksimasyon kwadratik pou  $e^u$  pou jwenn yon apwoksimasyon pou fonksyon  $e^{x^3}$  toupre  $x = 0$ . Detèmine grandè erè a.

$$e^{x^3} \approx \text{[Input field with pencil icon]}$$

Tèm erè a se:

$O(x^2)$      $O(x^3)$      $O(x^7)$      $O(x^9)$

**Pwoblèm 38: Pratik ak pwodwi yo 1**

Konsidere  $\frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2}$  toupre  $x = 0$ .

Ki apwoksimasyon kwadratik pwòch  $x = 0$ ?

$$\frac{\ln(1-x)}{(1+x)^2} \approx \text{[Input field with pencil icon]}$$

**Pwoblèm 39: Pratik ak pwodwi yo 2**

Detèmine apwoksimasyon kwadratik pou  $\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)}$  pwòch  $x = 0$  sèvi ak lefèt ke w konnen apwoksimasyon pou  $\sin(x)$  ak  $\cos(x)$  pwòch  $x = 0$ .

**Pwoblèm 40: Pratik ak pwodwi yo 3**

Detèmine apwoksimasyon kwadratik pou  $\ln(x) \sin(x - 1)$  pwòch  $x = 1$ .



---

**14. Pwoblèm siplemantè****Pwoblèm 41: Ekspansyon**

Kisa apwoksimasyon kwadratik  $e^{-x}$  ye pwòch  $x = 0$ ?



---

**15. Kibik****Pwoblèm 42: Apwoksimasyon lineyè fonksyon kibik yo**

Ki apwoksimasyon lineyè pou fonksyon  $f(x) = x^3$  la nan  $x = 0$ ?

**Pwoblèm 43: Apwoksimasyon kwadratik fonksyon kibib**

Ki apwoksimasyon kwadratik pou fonksyon  $f(x) = x^3$  la nan  $x = 0$ ?

**Piblisite**

Pou konprann kijan pou nou pi byen apwoksime yon fonksyon kibik, n ap aprann ou sou polinòm Taylor ak seri Taylor nan 18.01.3x! Rete konekte pou sa.

## 16. Rezime

### Pi bon ajisteman kwadratik

Pi bon ajisteman kwadratik pou yon fonksyon  $f(x)$  nan yon pwen  $x = 0$  se fonksyon kwadratik  $q(x)$  ki gen menm valè ak fonksyon  $f$  nan  $x = 0$ , e ki gen derive premye ak derive dezyèm ki matche ak derive premye ak derive dezyèm nan fonksyon  $f$  nan  $x = 0$ , i.e.:

$$f(0) = q(0) \quad (6.34)$$

$$f'(0) = q'(0) \quad (6.35)$$

$$f''(0) = q''(0) \quad (6.36)$$

### Apwoksimasyon kwadratik

**Apwoksimasyon kwadratik** pwòch  $x = a$  se pi **bon ajisteman parabolè** pou  $f$  nan pwen  $x = a$ .

Fòmil pou detèmine apwoksimasyon kwadratik yon fonksyon  $f$  pwòch yon pwen  $x = a$  se

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2}(x - a)^2. \quad (6.37)$$

Lè  $a = 0$ , apwoksimasyon kwadratik sa a vin

$$f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2. \quad (6.38)$$

### Notasyon Gran-O

Yon fonksyon  $f(x)$  se nan lòd  $x^n$  pwòch  $x = 0$ , sa ki ekri ak notasyon gran "O" kòm  $f(x) = O(x^n)$  pwòch  $x = 0$ , si  $|f(x)| \leq kx^n$ .

### Bibliyotèk apwoksimasyon kwadratik

pwòch zewo:  $f(x) \approx f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2}x^2$ .

- $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + O(x^3)$
- $\sin(x) = x + O(x^3)$
- $\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$

- $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + O(x^3)$
- $(1+x)^r = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2 + O(x^3)$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 25: Revizyon

Liy tanjant lan gen menm valè ak fonksyon an nan pwen  $a$ , epi li gen menm pant lan nan pwen sa a tou. Amwenske derive segon  $f$  la ta egal a zewo nan  $a$ , li pa pwobab pou derive ki vin apre yo ta koresponn tou. Nan pwen ki pi pwòch  $a$  yo, nou kapab sipoze valè fonksyon an ak valè liy tanjant lan pwòch, men yo pa nesèsman egzaktman egal.

### Pwoblèm 26: Detèmine fonksyon an

$$f(0) = q(0) = c \quad (6.28)$$

$$f'(0) = q'(0) = b \quad (6.29)$$

$$f''(0) = q''(0) = 2a \quad (6.30)$$

### Pwoblèm 28: Fonksyon de baz yo

$$e^x \approx e^0 + e^0 x + \frac{e^0}{2} x^2 = 1 + x + \frac{x^2}{2}.$$

$$(1+x)^r \approx 1^r + r(1)^{r-1}x + \frac{r(r-1)(1)^{r-2}}{2}x^2 = 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2}x^2.$$

### Pwoblèm 29: Apwoksimasyon tanjant

Premyèman, nou konvèti pwoblèm nan an radyan: 45 degre se  $\pi/4$  radyan. Kidonk 46 degre egal  $\pi/4 + \pi/180$  radyan.

Sa a pèmèt nou itilize apwoksimasyon kwadratik pou n detèmine  $\tan(x)$  toupre  $\pi/4$ .

$$\tan\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{180}\right)$$

$$\approx \tan(\pi/4) + \sec^2(\pi/4) \frac{\pi}{180} + \tan(\pi/4) \sec^2(\pi/4) \left(\frac{\pi}{180}\right)^2$$

$$\approx 1 + 2 \frac{\pi}{180} + 2 \frac{\pi^2}{180^2}$$

$$\approx 1.036$$

### Pwoblèm 30: Apwoksimasyon log natirèl

$$\ln(1 + .12) \approx \ln(1) + .12 - (.12)^2/2 \approx .1128$$

**Pwoblèm 31: Pwoblèm pratik 1**

Premyeman, nou konvèti pwoblèm nan an radyan. 60 degre egal  $\pi/3$  radyan.

So 62 degre se  $\pi/3 + \pi/90$ .

koulye a nou kapab pran yon apwoksimasyon kwadratik pou  $\cos(x)$  toupre  $\pi/3$

$$\begin{aligned} & \cos\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{90}\right) \\ & \approx \cos(\pi/3) - \sin(\pi/3) \frac{\pi}{90} - \frac{\cos(\pi/3)}{2} \left(\frac{\pi}{90}\right)^2 \\ & \approx \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\pi}{90} - \frac{1}{4} \frac{\pi^2}{8100} \\ & \approx 0.469. \end{aligned}$$

**Pwoblèm 32: egzèsis sou kredi pou machin**

Kantite total la bay pa

$$\begin{aligned} A &= 15,000 \left(1 + \frac{3}{100 \cdot 12}\right)^{48} - 15,000 \\ &= 15,000 \left(1 + \frac{1}{400}\right)^{48} - 15,000. \end{aligned}$$

Aproksimasyon kwadratik la bay

$$\begin{aligned} & -15,000 + 15000 \left(1 + \frac{48}{400} + \frac{48 \cdot 47}{2 \cdot 400^2}\right) + \text{erè} \\ & \approx -15,000 + 15000(1 + .12 + .007) \\ & = \$1,905.75 \end{aligned}$$

**Pwoblèm 33: Grandè tèm lineyè a**

Tèm lineyè a se  $\$15000(.12) \approx \$1800$ .

**Pwoblèm 34: Grandè tèm kwadratik la**

Tèm kwadratik la se  $\$15000(.007) \approx \$105$ . Ou ka wè ke tèm kwadratik la pi piti anpil pase tèm lineyè a, men li pa neglijab. Lòd grandè yo diferan pa yon puisans de 10. Ki donk, apwoksimasyon kwadratik la valab jiska yon erè sou montan an de  $\pm \$100$  dola. Pwiske sa pa yon kantite lajan konplètman trivyal, li pi bon pou kenbe tèm kwadratik la lè w ap fè apwoksimasyon sa a.

**Pwoblèm 35: Tèm erè**

Lòd grandè  $x^3$  pou  $x = 1/400$  se  $(\frac{1}{400})^3 \approx 10^{-8}$ .

Valè egzak fonksyon an se

$$\$15,000 \left(1 + \frac{1}{400}\right)^{48} - 15,000 = \$1,909.92 \quad (6.33)$$

Ki donk, erè a se valè egzak la mwens valè apwoksimasyon kwadratik la, ki se is  $\$1,909.92 - \$1,905.75 = \$4.17$ . Nou wè ke grandè erè a se 1. Sa vle di ke grandè  $k$  dwe nan lòd  $10^8$ ! Pou pwoblèm sa a, nou pwobableman pa tèlman enkyete nou sou  $\$4.92$  ajoute nan peman machin nou sou 4 ane, men sa montre kijan nou bezwen fè atansyon nan detèminè si erè a ase piti pou li ka neglijab lè n ap fè yon apwoksimasyon.

Nou pral toujou fè li klè menm si wi ou non, nou vle ou jwenn yon apwoksimasyon lineyè oswa kwadratik.

**Pwoblèm 36: Puisans**

$$(1 + 3x)^{-1/2} \approx 1 - 3x/2 + 27x^2/8$$

**Pwoblèm 37: Apwoksimasyon ak konpozisyon**

Apwoksimasyon kwadratik pou  $e^u = 1 + u + u^2/2 + O(u^3)$ . Lè nou ranplase  $x^3$  pou  $u$ , nou jwenn yon apwoksimasyon toupre zewo kòm  $1 + x^3 + x^6/2$ , epi erè a se  $O(u^3) = O(x^9)$  toupre  $x = 0$ .

**Pwoblèm 38: Pratik ak pwodwi yo 1**

Nou apwoksime chak konpozan, multipliyè yo, epi apre sa nou kenbe sèlman tèm kwadratik yo.

$$\begin{aligned} (1+x)^{-2} &= 1 - 2x + 3x^2 + O(x^3) \\ \ln(1-x) &= -x - x^2/2 + O(x^3) \\ (1+x)^{-2} \ln(1-x) & \\ &= (1 - 2x + 3x^2 + O(x^3))(-x - x^2/2 + O(x^3)) \\ &= -x + 2x^2 - x^2/2 + O(x^3) \approx -x + 3x^2/2 \end{aligned}$$

**Pwoblèm 39: Pratik ak pwodwi yo 2**

$$\frac{\sin(x)}{\cos^2(x)} = \sin(x)(\cos(x))^{-2}$$

$$\sin(x) = x + O(x^3) \quad \text{pwòch } x = 0$$

$$\cos(x) = 1 - x^2/2 + O(x^3) \quad \text{pwòch } x = 0$$

$$\cos(x)^{-2} = (1 - x^2/2)^{-2} = 1 + x^2 + O(x^3) \quad \text{pwòch } x = 0$$

$$\sin(x) \cos(x)^{-2} = x + O(x^3) \approx x \quad \text{pwòch } x = 0$$

**Pwoblèm 40: Pratik ak pwodwi yo 3**

Premyèman, nou jwenn apwoksimasyon chak fonksyon pwòch  $x = 1$  lè n ranplase  $u = x - 1$ . Remake ke  $u \rightarrow 0$  lè  $x \rightarrow 1$ . Sa pèmèt nou itilize apwoksimasyon fonksyon debaz yo nou te jwenn anvan!

$$\begin{aligned} \ln(x) &= \ln(1 + u) = u - u^2/2 + O(u^3) \\ &= (x - 1) - (x - 1)^2/2 + O((x - 1)^3) \\ \sin(x - 1) &= \sin(u) \\ &= u + O(u^3) = (x - 1) + O((x - 1)^3) \end{aligned}$$

Aprè sa, nou pran pwodwi a, remake ke tèm kib la ak pi wo yo absòbe nan tèm erè  $O((x - 1)^3)$ :

$$\begin{aligned} &\ln(x) \sin(x - 1) \\ &= ((x - 1) + O((x - 1)^3)) \left( (x - 1) - \frac{(x - 1)^2}{2} + O((x - 1)^3) \right) \\ &= (x - 1)^2 + O((x - 1)^3). \end{aligned}$$

**Pwoblèm 41: Ekspansyon**

$$e^{-x} \approx 1 - x + x^2/2$$

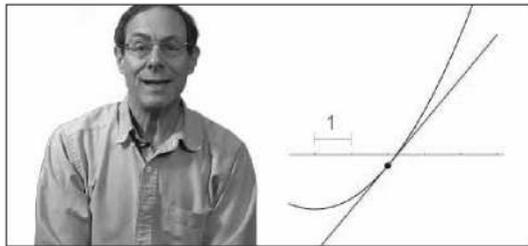
---

# Metòd Newton

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Metòd Newton

**Metòd Nimerik Iteratif** pou jwenn **Rasin** Fonksyon yo.

**Objektif yo**

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk pratik, ou ta dwe kapab:

- Aplike **Metòd Newton** pou jwenn rasin fonksyon yo.
- Dekri Metòd Newton **nan yon fason jewometrik**.
- Detèmine kondisyon **kote Metòd Newton ap echwe** pou jwenn yon rasin.

### 3. Rasin ak Metòd Newton

#### Pwoblèm 44: Revize rasin polinòm yo

Etan done yo bay yon polinòm kwadratik  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , chwazi tout deklarasyon ki anba a ki decri kisa **rasin** polinòm sa a ye.

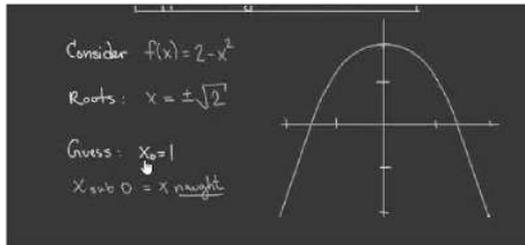
- A Se Pwen yo  $x$  kote  $f(x) = 0$
- B Se pwen yo kote pant liy tanjant  $f'(x) = 0$
- C  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$   D  $x = 0$
- E Se pwen yo kote grafik la gen yon entèseksyon ak  $x$ .

#### Pwoblèm 45: Eseye devine

Valè  $\sqrt{2}$  la, se yon rasin pou fonksyon  $f(x) = 2 - x^2$  lan. Si ou ta dwe devine valè  $\sqrt{2}$ , kiyès nan valè antye sa yo ki pi pre rasin nan?

- A 2  B 1  C 0  D -1  E -2

#### Videyo



**Problèm 46: Jwenn liy tanjant la**

Ki ekwasyon liy tanjant  $L(x)$  la, pou  $f(x) = 2 - x^2$  nan  $x_0 = 1$ . Answit jwenn valè  $x_1$  kote liy tanjant sa a kwaze aks  $x$  la.

$y =$

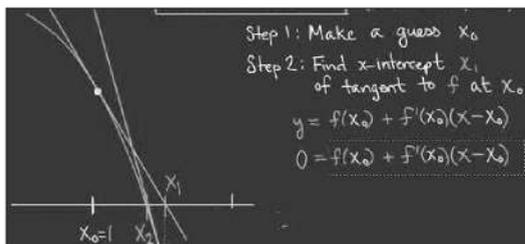
$x_1 =$

Èske valè  $x_1$  pi pre oswa pi lwen de valè rasin  $\sqrt{2}$  konpare ak valè inisyal  $x_0$  nou te devine a?

A pi pre  B pli lwen

**4. Metòd Newton an jeneral**

 Videyo

**5. Metòd Newton**

Yo ba nou yon fonksyon  $f(x)$ , jwenn  $x$  tèt ke  $f(x) = 0$ .

1. Eseye devine byen  $x_0$ .
2. Rele  $x_1$  entèsèpsyon- $x$  liy tanjant lan ki pase nan pwen  $(x_0, f(x_0))$ . Li gen fòmil sa a

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (6.42)$$

3. Repete. Fòmil jeneral la se

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6.43)$$

, kote  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

#### Pwoblèm 47: Pwoblèm pratik

Sipoze ke yon fonksyon  $f(x)$  gen liy tanjant  $y = 4x - 1$  nan pwen  $x = 1$ . Si premye apwoksimasyon ou nan Metòd Newton pou jwenn rasin  $f(x)$  se  $x = 1$ , ki sa dezyèm apwoksimasyon ou ye?

$x_1 =$

#### Pwoblèm 48: Rasin kare 5

An n itilize  $f(x) = x^2 - 5$  pou jwenn valè nimerik pou  $\sqrt{5}$ . Antre sa w devine a nan premye bwat la, epi aplike 2 iterasyon nan Metòd Newton sou sa ou devine a.

## 6. To de konvèjans

 Video



$x^*$  root  
 $f(x^*) = 0$   
 Approx  $x_0$   
 $x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$

Equilibrium  
 Error  
 $e_0 = x^* - x_0$   
 $e_1 = x^* - x_1$

$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + O((x - x_0)^2)$   
 Set  $x = x^*$   
 $f(x^*) = f(x_0) + f'(x_0)(x^* - x_0) + O((x^* - x_0)^2)$   
 $0 = f(x_0) + f'(x_0)e_0 + O(e_0^2)$   
 $f(x_0) = -$

## 7. Echèk de konvèjans

### Pwoblèm 49: Pwoblèm egzanzp

Konsidere fonksyon  $y = \arctan x$ . Rasin fonksyon sa a se  $x = 0$ . Lè n aplike metòd Newton lan avèk yon estimasyon inisyal  $x_0 = 2$  epi gade sa k ap pase.

$$x_0 = 2$$

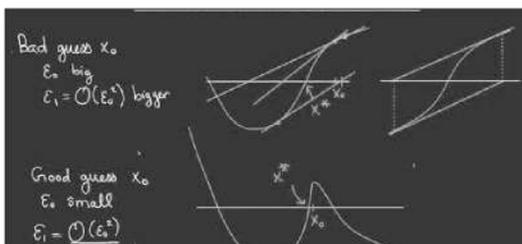
$$x_1 =$$

$$x_2 =$$

$$x_3 =$$

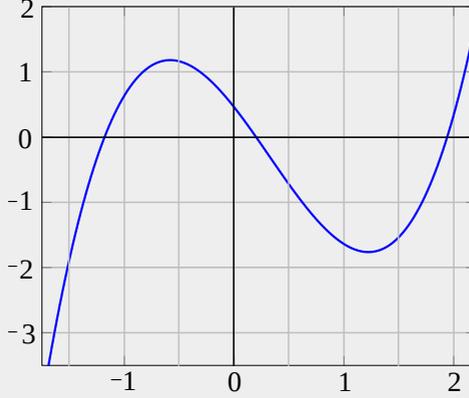
## 8. Ki jan metòd Newton lan ka echwe?

### Videyo



**Pwoblèm 50: Fè yon pi bon estimasyon**

Pou kiyès nan estimasyon inisyal sa yo metòd Newton lan ap **echwe** pou konvèje sou rasin fonksyon grafe ki anba a, ki ant 0 ak 0.5?

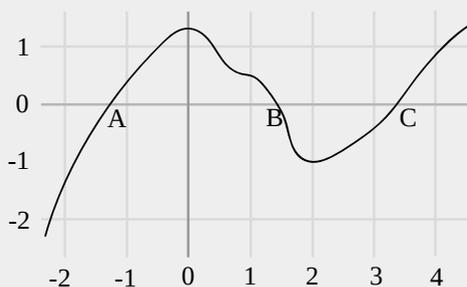


(Chwazi tout sa ki aplikab.)

- A  $x_0 = -0.5$     B  $x_0 = 0$     C  $x_0 = 0.5$     D  $x_0 = 1$     E  $x_0 = 2$

**Problèm 51: Idantifye rasin final pou divès pwen depa yo**

Konsidere fonksyon sa a ki gen 3 rasin, A, B, ak C, jan yo make nan imaj ki anba a.



Pou chak pwen inisyèl  $x_0$  ki deklare anba a, chwazi rasin kote metòd Newton lan ap konvèje.

(Chwazi "Okenn" si li pa konvèje oswa si li pa klè sou imaj la.)

$$x_0 = -2$$

- A A  B B  C C  D Okenn

$$x_0 = 2$$

- A A  B B  C C  D Okenn

$$x_0 = 0$$

- A A  B B  C C  D Okenn

$$x_0 = 3$$

- A A  B B  C C  D Okenn

$$x_0 = 1$$

- A A  B B  C C  D Okenn

$$x_0 = 4$$

- A A  B B  C C  D Okenn

## 9. Detèmine Pi

### Pwoblèm 52: Detèmine Pi

Sipoze ke ou vle jwenn yon apwoksimasyon nimerik pou  $\pi$ . Pou kiyès nan fonksyon sa yo ou ta ka aplike Metòd Newton pou jwenn li?

- A  $\sin(x)$     B  $\cos(x) + 1$     C  $\tan(x)$     D  $\arcsin(x)$

### Pwoblèm 53: Metòd Newton ak konvèjans ralanti

An n itilize fonksyon  $f(x) = \cos(x) + 1$  pou jwenn yon apwoksimasyon nimerik pou  $\pi$ . Sa a se pa fonksyon kòrèk pou jwenn rasin sa a. Metòd Newton konvèje trè, trè dousman paske fonksyon sa a gen yon rasin doub nan  $\pi$ . An n jis gade ki jan li ralanti. (Konbyen etap li pran pou jwenn yon repons egzat pou 4 chif desimal? 5 chif desimal? Konpare sa ak lòt egzanp nou te wè deja.)



## 10. Rezime

### Metòd Newton

Yo ba nou yon fonksyon  $f(x)$ , detèmine  $x$  tèl ke  $f(x) = 0$ .

1. Eseye fè yon pi bon estimasyon  $x_0$ .
2. Rele  $x_1$  entèseksyon- $x$  liy tanjant lan ki pase nan pwen  $(x_0, f(x_0))$ . Li gen fòmil sa a

$$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}. \quad (6.44)$$

3. Repete. Fòmil jeneral la se

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (6.45)$$

, kote  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

## Solisyon yo

### Pwoblèm 44: Revize rasin polinòm yo

Tout bagay sa yo dekri kisa sa vle di pou yon valè yo rele yon rasin yon polinòm: Pwen  $x$  kote  $f(x) = 0$ , Pwen kote grafik la gen yon entèseksyon ak aks  $x$ — la.

Nan ka kote polinòm nou an se yon polinòm kwadratik, nou gen tou yon fòmil pou jwenn rasin sa yo, yo rele fòmil kwadratik la: Pwen yo kote

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

### Pwoblèm 45: Eseye devine

Pou wè kiyès ki pi pre valè reyèl la, nou ka ekskli  $-1$  ak  $-2$ , paske nou ap chèche solisyon pozitif la. Pou wè kiyès ki pi bon devinèt la, nou ka ranplase valè yo nan fonksyon  $f$  la epi wè kiyès ki pi pre 0!

$$f(2) = -2 \quad (6.39)$$

$$f(1) = 1 \quad (6.40)$$

$$f(0) = 2 \quad (6.41)$$

Pwiske 1 pi pre 0 pase 2 oswa  $-2$ , pi bon devinèt la se 1.

□

### Pwoblèm 46: Jwenn liy tanjant la

Yo bay liy tanjant lan ak fòmil

$$y = f(1) + f'(1)(x - 1) = 1 - 2(x - 1) = 3 - 2x.$$

Poze  $y = 0$ , nou ka rezoud pou pwochen apwoksimasyon nou an,  $x$  ki entèsekte liy tanjant sa a, ki se  $x_1 = 3/2 = 1.5$ . Si ou rantre  $\sqrt{2}$  nan yon kalkilatris, ou pral wè ke  $\sqrt{2} \approx 1.414213562 \dots$ , ki donk deja dezyèm apwoksimasyon sa a pi bon pase premye sa n te devine a  $x_0 = 1$ .

### Pwoblèm 47: Pwoblèm pratik

Dezyèm apwoksimasyon an se rasin liy tanjant  $x_1 = 1/4$ .

### Pwoblèm 48: Rasin kare 5

Yon bon premye estimasyon se  $x_0 = 2$ . Sa a bay  $x_1 = 2 - \frac{4-5}{4} = 2.25$ , ki gen yon erè  $\approx .0139$ . Pwochen estimasyon an  $x_2 = 2.25 - (.0625)/(4.5) \approx 2.23611$ , ki deja egzat jiska 4 desimal.

**Pwoblèm 49: Pwoblèm egzanj**

An n kalkile derive nou bezwen an:

$$y = \arctan x$$

$$y' = \frac{1}{1+x^2}$$

Lè sa a  $x_0 = 2$ , nou jwenn

$$x_1 = 2 - \frac{\arctan(2)}{\frac{1}{5}} = -3.5357$$

$$x_2 = x_1 - \frac{\arctan(x_1)}{\frac{1}{1+x_1^2}} = 13.9509$$

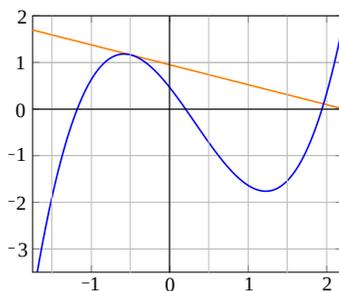
$$x_3 = x_2 - \frac{\arctan(x_2)}{\frac{1}{1+x_2^2}} = -279.3440$$

Metòd Newton lan pa pral konvèje nan zewo. Sepandan, yon ti tchèk rapid pral montre ke yon premye estimasyon  $x_0 = 1$  pral konvèje nan rasin  $x = 0$ .

**Pwoblèm 50: Fè yon pi bon estimasyon**

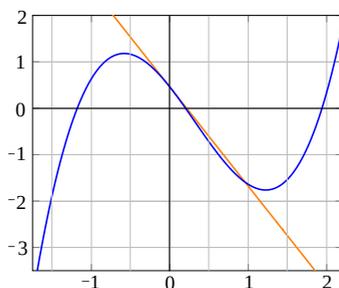
An n pase sou pwen yo youn pa youn pou nou dekri sa k ap pase lè nou aplike Metòd Newton lan.

- Nan  $x = -.5$ , pant liy tanjant lan prèske egal a zewo,



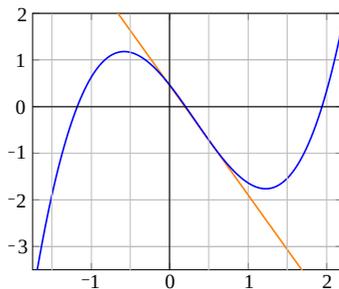
epi entèseksyon ak liy tanjant  $x$  lan prèske tonbe sou yon lòt rasin ki toupre  $x = 2$ .

- Nan  $x = 0$ , liy tanjant lan reprezante yon apwoksimasyon ki trè pre fonksyon an toupre rasin nou enterese jwenn lan,



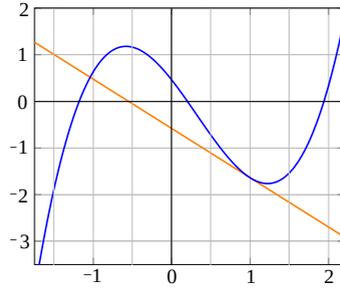
epi dezyèm apwoksimasyon an, li deja trè pre rasin nou vle jwenn lan.

- Nan  $x = .5$ , liy tanjant lan trè pre fonksyon an,



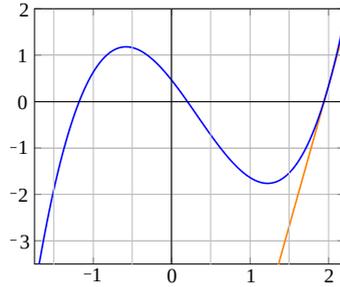
Dezyèm apwoksimasyon an trè pre rasin nou vle jwenn lan.

- Nan  $x = 1$  pant liy tanjant lan prèske egal a zewo,



Liy tanjant nan dezyèm apwoksimasyon an ap gen yon entèseksyon- $x$  sou aks negatif  $x$  la, epi metòd la p ap retounen sou rasin ki entereze nou an.

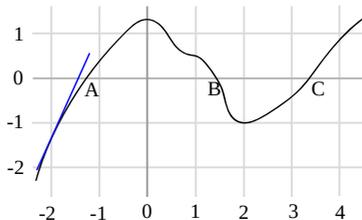
- Chwa  $x = 2$  a tou, trè pre yon lòt rasin, ki donk Metòd Newton lan ap konvèje sou yon lòt rasin ak chwa inisyal sa a.



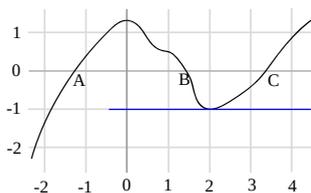
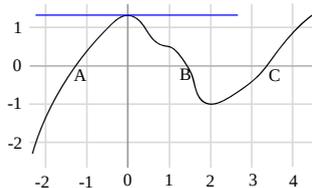
Kidonk, chwa ki p ap pèmèt nou jwenn rasin ki entereze nou an se  $x = -1.5, 1$ , *textmak2*.

**Pwoblèm 51: Idantifye rasin final pou divès pwen depa yo**

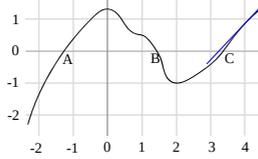
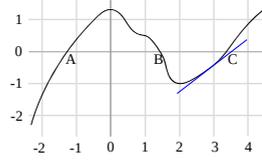
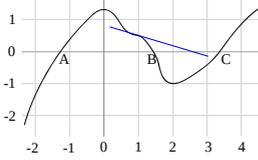
Liy tanjant lan nan  $x = -2$  montre ke metòd Newton lan ap konvèje sou rasin A.



Liy tanjant orizontal yo nan  $x = 0$  ak  $x = 2$  montre ke metòd Newton lan echwe avèk prediksyon inisyal sa yo.



Liy tanjant yo sou graf la nan  $x = 1$ ,  $x = 3$ , ak  $x = 4$  tout gen entèsèpsyon sou aks- $x$  nan yon rejyon ki montre ke metòd Newton ap konvèje sou pwen C.



- A
- B
- C
- D
- E
- F
- G
- H

### Pwoblèm 52: Detèmine Pi

Twa premye fonksyon yo,  $\sin(x)$ ,  $\cos(x) + 1$ , ak  $\tan(x)$  tout gen yon rasin nan  $x = \pi$ .

### Pwoblèm 53: Metòd Newton ak konvèjans ralanti

Pwoblèm sa a se yon aplikasyon dirèk Metòd Newton lan. Sa ki etranj sou chif ou wè nan repons lan se ke yo pa konvèje vit. Sa a se paske fonksyon sa a satisfè pwopriyete sa a

$$f(\pi) = 0 \quad \text{and} \quad f'(\pi) = 0,$$

ki donk pandan tèm erè yo diminye, yo fè sa trè dousman.

Si nou kòmanse ak 3.14 kòm estimasyon inisyèl nou, katyèm apwoksimasyon  $x_4 = 3.14149311277$  gen sèlman 3 chif desimal ki presi. Metòd Newton pa echwe nan ka sa a, men to konvèjans lan ralanti. Nou pa konsèye w itilize Metòd Newton pou jwenn rasin sa yo.

# Devwa 3 Pati A

## 1. Pwoblèm Pati A

### Konsènan Pwoblèm Pati A

Pwoblèm Pati A ede w pratike mekanik kalkil. Gen anpil pwoblèm ki kontinye lide yo prezante nan sekans aprantisaj yo pi wo a.

Tape \* pou endike multiplikasyon pa egzanp: e.g.  $2*x = 2x$ . Slash la ap endike divizyon: e.g.  $1/2 = \frac{1}{2}$ . Tape  $\wedge$  pou ekspozan: pa egzanp.  $e \wedge x = e^x$ . Itilize parantèz pou fè klè lòd operasyon yo, pa egzanp.  $4+2/2 = 5$  ak  $(4+2)/2 = 3$ .

Bwat repons lan konnen fonksyon sa yo: sin, cos, tan, arcsin, arccos, sqrt, ln, ak log! Tape  $\sin(x)$  pou  $\sin x$ ; tape  $\text{sqrt}(2)$  pou  $\sqrt{2}$ ; tape pi pou  $\pi$ .

Si solisyon ou a pa sòti kòmsadwa, ou ka bliye mete yon \* oswa parantèz alantou yon ekspozan. Pa egzanp, tape  $2t$  ap kreye yon varyab ki rele "2t", pandan ke  $2*t$  ap entèprete kòm 2 fwa varyab t.

Nou pral presize non varyab ak paramèt yo. Sonje byen, bwat repons lan sansib a majiskil: pa egzanp:  $c \neq C$ .

## 2. HW3A

### Pwoblèm 54: 3A (1)

Jwenn lineyarizasyon pwòch  $x = 0$  pou ekspresyon an:  $\frac{(1+x)^{3/2}}{1+2x}$  pandan n ap sèvi ak fòmil apwoksimasyon debaz yo, epi apre sa, nou ap fè kalkil dirèk la.

$f(x) \approx$



**Pwoblèm 55: 3A (2)**

Jwenn apwoksimasyon lineyè pou  $h/R \approx 0$  pou ekspresyon:

$w = \frac{gW}{(1 + h/R)^2}$ , ki se pwa yon satelit nan yon altitud  $h$  anwo sifas tè a, kote  $W$  se mas satelit la sou sifas tè a, epi  $R$  se rayon tè a.

$w(h) \approx$

**Pwoblèm 56: 3A (3)**

(Pwoblèm sa a pa gen okenn rapò ak pwoblèm anvan an.)

Nan pwoblèm sa a, sipoze ke mas pwopòsyonèl ak volim, epi volim pwopòsyonèl ak wotè yon moun elve o twazyèm puisans.

Si yon moun ki gen 5 pye wotè peze an mwayèn 120 liv, apeprè konbyen yon moun ki gen 5'1" ka peze?

**3. HW3A****Pwoblèm 57: 3A (4)**

Jwenn yon apwoksimasyon kwadratik pou  $\tan(\theta)$ , pou  $\theta \approx 0$ .

$f(\theta) \approx$

**Pwoblèm 58: 3A (5)**

Jwenn yon apwoksimasyon kwadratik pou

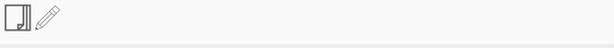
$\frac{\sec x}{\sqrt{1 - x^2}}$ , pou  $x \approx 0$ .

$f(x) \approx$



**Pwoblèm 59: 3A (6)**

Jwenn yon apwoksimasyon kwadratik pou  $1/(1-x)$ , pou  $x \approx 1/2$ .  
(Itilize apwoksimasyon debaz yo.)

$$f(x) \approx$$


---

**4. HW3A****Pwoblèm 60: 3A (7)**

Pou yon gaz ideyal nan yon tanperati konstan, varyab yo  $p$  (presyon) ak  $v$  (volim) gen yon relasyon ki bay nan ekwasyon  $pv^k = c$ , kote  $k$  ak  $c$  se konstan. Si volim lan chanje yon ti kras soti nan  $v$  pou rive nan  $v + \Delta v$ , ki apwoksimasyon kwadratik ou ta itilize pou eksprime  $p$  an tèm de  $v$ ,  $\Delta v$ ,  $c$  ak  $k$ ?

(Jwenn apwoksimasyon ki valab pou  $\Delta v \approx 0$ .)

$$p(v + \Delta v) \approx$$



---

**5. HW3A****Pwoblèm 61: 3A (8)**

Jwenn apwoksimasyon **kwadratik** pou  $\frac{e^x}{1-x}$  pwoch  $x = 0$ .

$$f(x) \approx$$


**Pwoblèm 62: 3A (\*) (9)**

Jwenn apwoksimasyon **lineyè** pou  $\frac{\ln(1+x)}{xe^x}$  pwòch  $x = 0$ .

$$f(x) \approx$$


**Pwoblèm 63: 3A (10)**

Jwenn apwoksimasyon **kwadratik** pou  $\ln \cos x$  pwòch  $x = 0$ .

$$f(x) \approx \text{[input field with calculator icon]}$$

**Pwoblèm 64: 3A (11)**

Jwenn apwoksimasyon **kwadratik** pou  $x \ln x$  pwòch  $x = 1$ . (Atansyon: poze  $x = 1 + h$ .)

$$f(x) \approx \text{[input field with calculator icon]}$$

**6. HW3A****Pwoblèm 65: 3A (12)**

Jwenn apwoksimasyon lineyè ak kwadratik pou fonksyon sa yo.  
 $\sin(2x)$ , pwòch  $x = 0$

$$\text{lineyè: } f(x) \approx \text{[input field with calculator icon]}$$

$$\text{kwadratik: } f(x) \approx \text{[input field with calculator icon]}$$

**Pwoblèm 66: 3A (13)**

$\cos(2x)$ , pwòch  $x = 0$

$$\text{lineyè: } f(x) \approx \text{[input field with calculator icon]}$$

$$\text{kwadratik: } f(x) \approx \text{[input field with calculator icon]}$$

**Pwoblèm 67: 3A (14)**

$\sec(x)$ , pwòch  $x = 0$

lineyè:  $f(x) \approx$

kwadratik:  $f(x) \approx$

---

**7. HW3A****Pwoblèm 68: 3A (15)**

Jwenn yon premye valè *pozitif*  $x_0$  pou zewo pozitif ekwasyon  $x - x^3 = 0$  kote metòd Newton bay yon kantite ki pa defini pou  $x_1$ .

(Ou ka tou antre repons lan kòm yon desimal ak presizyon 3 chif apre vigil la.)

$x_0 =$

**Pwoblèm 69: 3A (16)**

Jwenn yon premye valè *pozitif*  $x_0$  pou zewo ekwasyon  $x - x^3 = 0$  kote metòd Newton ap balanse ale-retou san fen. (Itilize simetri.)

(Ou ka tou antre repons lan kòm yon desimal ak presizyon 3 chif apre vigil la.)

$x_0 =$

**Pwoblèm 70: 3A (17)**

Jwenn pi gwo entèval alantou chak rasin nan ekwasyon  $x - x^3 = 0$  kote metòd Newton lan konvèje nan rasin sa a pou chak valè inisyal  $x_0$  ki nan entèval la. (Itilize repons ou jwenn yo anvan.)

(Antre repons lan kòm yon entèval (a, b)).

Entèval ki konvèje nan  $x = -1$



Entèval ki konvèje nan  $x = 0$



Entèval ki konvèje nan  $x = 1$



## Solisyon yo

### Pwoblèm 54: 3A (1)

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dx} \left( \frac{(1+x)^{3/2}}{1+2x} \right) \\ &= \frac{(1+2x) \cdot \frac{3}{2} \cdot (1+x)^{1/2} - (1+x)^{3/2} \cdot 2}{(1+2x)^2} \\ &\implies f'(0) = -\frac{1}{2} \\ &\implies f(x) \approx 1 - \frac{1}{2}x. \end{aligned}$$

Lè nou itilize fonksyon debaz yo ak aljèb, nou jwenn tou:

$$\approx 1+x(1-2x) \approx 1-x.$$

### Pwoblèm 55: 3A (2)

Poze  $\frac{h}{R} = \epsilon$ ; lè sa:

$$w = \frac{gW}{(1+\epsilon)^2} \approx gW(1+\epsilon)^{-2} \approx gW(1-2\epsilon) = gW \left( 1 - \frac{2h}{R} \right).$$

### Pwoblèm 56: 3A (3)

Yon sipozisyon rezonab se ke  $m$  pwopòsyonèl ak volim  $v$ , ki, nan sans sa a, pwopòsyonèl ak  $kib$  yon dimansyon lineyè, Sa vle di, yon moun rete menm jan ak tèt li, pou  $ti$  chanjman nan pwa. Se konsa,  $m = Ch^3$ ; pwiske 5 pye = 60 pous, nou jwenn:

$$\frac{m(60+\epsilon)}{m(60)} = \frac{C(60+\epsilon)^3}{C(60)^3} = \left( 1 + \frac{\epsilon}{60} \right)^3,$$

sa ki emplik ke

$$m(60+\epsilon) \approx m(60) \cdot \left( 1 + \frac{3\epsilon}{60} \right) \approx 120 \cdot \left( 1 + \frac{1}{20} \right) \approx 126.$$

[Oswa ou ka kalkile lineyarizasyon  $m(h)$  bò kote  $h = 60$  lè w itilize derivasyon, epi itilize valè  $m(60)$  pou detèmine  $C$ , epi jwenn:  $m(h) \approx 120 + 6(h - 60)$ .]

**Pwoblèm 57: 3A (4)**

$$\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} \quad (6.46)$$

$$\approx \frac{\theta}{1 - \theta^2/2} \quad (6.47)$$

$$\approx \theta(1 + \theta^2/2) \approx \theta \quad (6.48)$$

**Pwoblèm 58: 3A (5)**

$$\frac{\sec x}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\cos x \sqrt{1-x^2}} \quad (6.49)$$

$$\approx \frac{1}{(1 - \frac{1}{2}x^2)(1 - \frac{1}{2}x^2)} \quad (6.50)$$

$$\approx \frac{1}{1-x^2} \approx 1+x^2 \quad (6.51)$$

**Pwoblèm 59: 3A (6)**

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x} &= \frac{1}{1 - (\frac{1}{2} + \Delta x)} = \frac{1}{\frac{1}{2} - \Delta x} = \frac{2}{1 - 2\Delta x} \\ &\approx 2(1 + 2\Delta x + 4(\Delta x)^2) \approx 2 + 4(x - \frac{1}{2}) + 8(x - \frac{1}{2})^2 \end{aligned}$$

**Pwoblèm 60: 3A (7)**

$pv^k = c \implies p = cv^{-k}$  Koulye a chanje volim  $v$  ak  $\Delta v$ .

$$p(v + \Delta v) = c(v + \Delta v)^{-k} \quad (6.52)$$

$$= cv^{-k} \left(1 + \frac{\Delta v}{v}\right)^{-k} \quad (6.53)$$

$$\approx \frac{c}{v^k} \left[ 1 - k \frac{\Delta v}{v} + \frac{k(k+1)}{2} \left(\frac{\Delta v}{v}\right)^2 \right] \quad (6.54)$$

**Pwoblèm 61: 3A (8)**

$$\frac{e^x}{1-x} \approx \left(1 + x + \frac{x^2}{2}\right) (1 + x + x^2) \approx 1 + 2x + \frac{5}{2}x^2$$

**Pwoblèm 62: 3A (\*) (9)**

$$\frac{\ln(1+x)}{xe^x} \approx \frac{x-x^2/2}{x(1+x)} \quad (6.55)$$

$$= \frac{1-x/2}{1+x} \quad (6.56)$$

$$\approx (1-x/2)(1-x) \approx 1-(3/2)x \quad (6.57)$$

**Pwoblèm 63: 3A (10)**

$$\ln(\cos x) \approx \ln\left(1 - \frac{x^2}{2}\right) \approx -\frac{x^2}{2} \quad [\text{puisque } \ln(1+h) \approx h]$$

**Pwoblèm 64: 3A (11)**

$$x \ln x = (1+h) \ln(1+h) \approx (1+h)\left(h - \frac{h^2}{2}\right) \approx h + \frac{h^2}{2}$$

$$\implies x \ln x \approx (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2}$$

**Pwoblèm 65: 3A (12)**

$2x$  (Tou de apwoksimasyon lineyè ak kwadratik)

**Pwoblèm 66: 3A (13)**

$$1, 1 - 2x^2$$

**Pwoblèm 67: 3A (14)**

$1, 1 + x^2/2$  (Itilize  $(1+u)^{-1} \approx 1-u$  avèk  $u = x^2/2$ :

$$\sec x = 1/\cos x \approx 1/(1-x^2/2) = (1-x^2/2)^{-1} \approx 1+x^2/2.$$

**Pwoblèm 68: 3A (15)**

$$f(x) = x - x^3 \quad (6.58)$$

$$f'(x) = 1 - 3x^2 \quad (6.59)$$

Metòd Newton lan ba nou:  $x_1 = x_0 - f(x_0)/f'(x_0)$ . Pwochen apwoksimasyon  $x_1$  la pa defini si  $f'(x_0) = 0$ , sa vle di si  $x_0 = \pm 1/\sqrt{3}$ . Antre valè pozitif la nan bwat repons lan.

**Pwoblèm 69: 3A (16)**

Itilize lefèt ke  $f(x)$  se yon fonksyon enpè:  $f(-x) = -f(x)$ . Sa vle di  $x_2 = x_0$ , ak  $x_1 = -x_0$ . Sa senplifye ekwasyon an:

$$x_1 = -x_0 = x_0 - \frac{x_0 - x_0^3}{1 - 3x_0^2} = \frac{-2x_0^3}{1 - 3x_0^2}.$$

Rezoud ekwasyon sa a se menm bagay ak rezoud  $x_0(1 - 3x_0^2) = 2x_0^3$ , sa vle di swa  $x = 0$  oswa  $5x^2 = 1$ . Puiske  $x = 0$  se yon rasin, li p ap fè metòd Newton balanse ale-retou san fen. Ki donk repons lan se  $x = \pm 1/\sqrt{5}$ . Nou antre valè pozitif la nan bwat repons lan.

**Pwoblèm 70: 3A (17)**

Pou  $x_0$  nan entèval la  $(-\infty, -1/\sqrt{3})$ ,  $x_n \rightarrow -1$ . Pou  $x_0$  nan entèval la  $(-1/\sqrt{5}, 1/\sqrt{5})$ ,  $x_n \rightarrow 0$ . Pou  $x_0$  nan entèval la  $(1/\sqrt{3}, \infty)$ ,  $x_n \rightarrow 1$ .

Sa ka verifiye eksperimantalman. Pou yon prèv fòmèl, li nesèsè pou gen plis analiz matematik. Ou ka gade kou MIT 18.100 pou plis detay.

# Devwa 3 Pati B

## 1. Boul ping pong

### Pwoblèm 71: Apwoksimasyon lineyè

Boul ping pong regilasyon an gen reyon  $r$  cm epi li bezwen  $w$  gram plastik. Si reyon regilasyon an chanje pa  $\Delta r$  cm, konbyen plastik ki pral nesèsè pou nouvo boul yo?

Sipoze ke epesè boul yo pa chanje, epi ke epesè a trè piti konpare ak reyon an. Jwenn yon fòmil apwoksimatif pou  $w$  an tèm de  $w$ ,  $r$ , ak  $\Delta r$  ki lineyè.

$$w(r + \Delta r) \approx$$



### Pwoblèm 72: Apwoksimasyon kwadratik

Jwenn yon fòmil ki pi presi ki gen fòm yon ekwasyon kwadratik.

$$w(r + \Delta r) \approx$$



### Pwoblèm 73: Chanje paramèt yo

Si ogmantasyon plastik la se  $\leq 6.1\%$ , pri boul yo ap rete menm jan. Dapre apwoksimasyon lineyè a, ki pi gwo chanjman nan reyon an ki akseptab pou pri a pa chanje?

(Antre repons lan ak yon sèl chif sigifikatif presizyon.)

$$\frac{\Delta r}{r} \leq$$



## 2. Bezbol

### Pwoblèm 74: Idantifye inite yo

An 1968, yo te bese wotè ti mòn kote lansè a kanpe nan bezbòl soti 15 pous desann a 10 pous. Petèt kòm rezilta chanjman sa a, mwayèn pwen pa jwèt te ogmante. Gen kèk moun ki di ke vitès boul yo diminye si lansè a ap lanse soti nan yon pwen ki 5 pous pi ba. Diferans sa yo ka pa parèt klèman akòz varyasyon nan wotè lansè yo ak anpil lòt aspè nan fason boul la lanse, men nou pral kalkile ogmantasyon nan vitès ki sòti sèlman nan lefèt ke pwen kote boul la sòti a pi wo.

Wotè  $h$  apre  $t$  segonn pou yon objè k ap tonbe, ki te kòmanse nan  $t = 0$  ak wotè  $x$  pye, se  $h(t) = x - 16t^2$  pye (akselerasyon akòz fòs gravitasyon an se  $h'' = -32 \text{ ft/s}^2$ ). Ki inite konstan 16 nan fòmil  $h(t)$ ?

(Antre repons ou an tèm de **ft** (pye) ak **s** (segonn).)



### Pwoblèm 75: Enèji potansyèl

Sonje ke wotè  $h$  apre  $t$  segonn pou yon objè k ap tonbe, ki te kòmanse nan  $t = 0$  ak wotè  $x$  pye, se  $h(t) = x - 16t^2$  (pye).

An n sipoze  $t_1$  se tan li pran pou objè a tonbe  $x$  pye. (Sonje ke sa a se menm  $x$  ki nan fòmil la pi wo a.) Enèji sinetik yon boul ki gen mas  $m$  ki tonbe vètikalman  $x$  pye se  $E_1 = \frac{1}{2}mv_1^2$ , kote  $v_1 = h'(t_1)$ . Jwenn fòmil la pou  $E_1$  an tèm de  $m$  ak  $x$ .

$$E_1 =$$



**Pwoblèm 76: Kalkil enèji sinetik**

Si yon pitche jete yon boul ak yon vitès  $v_0$ , lè sa a enèji sinetik la se  $E_0 = \frac{1}{2}mv_0^2$ . Si pitche a lage boul la soti  $x$  pye pi wo, nou pral sipoze ke li ka ajiste livrezon li pou frape menm pwen an sou plat kay la ak menm vitès inisyalya. Men, fwa sa a, gen plis enèji soti nan desant wotè  $x$ , kidonk total enèji sinetik la se

$$\frac{1}{2}mv^2 = E = E_0 + E_1.$$

Jwenn fòmil la pou  $v$  an tèm de  $v_0$  ak  $x$ . Apre sa, itilize yon apwoksimasyon lineyè pou estime diferans lan  $v - v_0$ , ki se ogmantasyon nan vitès la akòz wotè siplemantè a.

$$\Delta v = v - v_0 \approx$$

**Pwoblèm 77: Chanje jwèt la**

Si  $v_0$  se 90 mph ak  $x$  se 5 pous, konbyen mayz pa èdtan pi vit  $v$  ye pase  $v_0$ ? (Antre repons lan ak 2 chif desimal nan inite mayz pa èdtan. Fè atansyon ak inite yo!)

**Pwoblèm 78: lansman ak bra sou kote**

Yon pitche ak men bò men sou kote lage yon boul (ak vitès inisyalya 90 mph) soti 3 pous pi ba pase wotè nòmal la. Konbyen diferans sa fè nan vitès la?

(Antre repons lan nan inite mph ak 2 chif desimal. Pa bliye pran an konsiderasyon siy vitès la!)



### 3. Metòd Newton

#### Pwoblèm 79: Kalkile rasin yo

Nou pral kalkile rasin kibik 9 avèk 6 chif siyifikatif lè nou itilize metòd Newton.  
Nan egzèsis ki swiv yo, chwazi yon fonksyon ki pran fòm

$$f(x) = x^m - C$$

(olye de  $C - x^m$ ) pou jwenn rasin nan.

Bay fòmil pou  $x_{n+1}$  an tèm de valè anvan an  $x_n$ .



#### Pwoblèm 80: Iterasyon

( Pwoblèm sa a se yon kontinyasyon nan kalkil rasin kibik 9 lè w ap itilize metòd Newton. )

Bay valè nimerik metòd Newton pwodwi lè ou kòmanse ak  $x_0 = 2$ .

(Antre repons yo ak 5 chif desimal presizyon.)

$$x_0 = 2$$

$$x_1 =$$



$$x_2 =$$



$$x_3 =$$



$$x_4 =$$



**Pwoblèm 81: Ilistre pwoblèm nan**

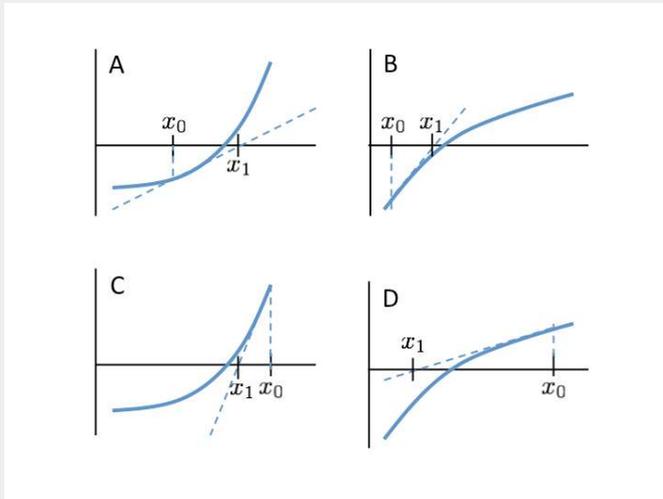
( Pwoblèm sa a se yon kontinyasyon nan kalkil rasin kibik 9 lè w ap itilize metòd Newton. )

Sonje ke pou reponn kesyon sa a, chwazi yon fonksyon ki pran fòm

$$f(x) = x^m - C$$

(olye de  $C - x^m$ ) pou jwenn rasin nan.

Ki imaj ki pi byen ilistre Metòd Newton nan pwoblèm sa a?



- Ⓐ A   Ⓑ B   Ⓒ C   Ⓓ D   Ⓔ Okenn nan sa yo

**Pwoblèm 82: Apwoksimasyon kwadratik**

( Pwoblèm sa a se yon kontinyasyon nan kalkil rasin kibik 9 lè w ap itilize metòd Newton. )

Jwenn yon apwoksimasyon kwadratik pou rasin kibik 9 lè w itilize ekwasyon  $9 = 8(1 + 1/8)$ , epi estime diferans ant valè egzak la ak apwoksimasyon an.

(Antre repons lan avèk 4 chif desimal.)



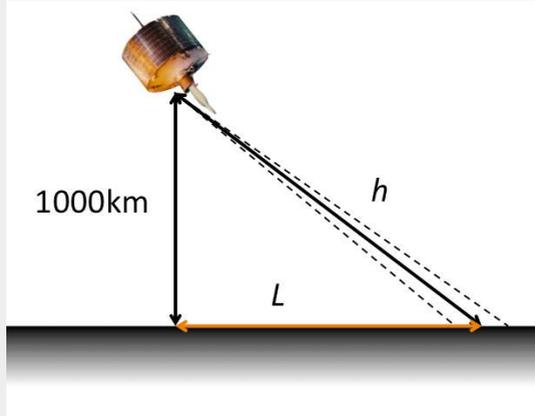
---

#### 4. GPS: sansibilite mezi a

Nan seri pwoblèm sa a, nou pral eksplore lide *sansibilite mezi a*. Sipoze  $f$  se yon fonksyon de  $x$ . Si  $x = x_0 + \Delta x$ , nou defini  $\Delta f = f(x) - f(x_0)$ . Lè sa a  $\frac{\Delta f}{\Delta x}$  mezire kouman chanjman nan  $x$  ki afekte valè  $f$ .

**Pwoblèm 83: GPS**

Planèt Quirk lan plat. Satelit GPS yo ap planche sou Quirk nan yon altitud de 1000km (pa tankou sou Latè kote satelit yo sikile de fwa pa jou nan altitud pi wo). Gade kijan ou ka estime avèk presizyon distans  $L$  ki soti nan pwen ki dwat anba satelit la ale nan yon pwen sou sifas planèt la, lè w konnen distans  $h$  ki soti nan satelit la ale nan pwen sou sifas la.



Sèvi ak yon kalkilatris pou kalkile  $\Delta L/\Delta h$  pou  $h = h_0 + \Delta h = 1250 \pm \Delta h$ , ak  $\Delta h = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ .

(Antre repons ou yo avèk 2 chif siyifikatif.)

$$\Delta h = 1, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = -1, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = 10^{-1}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = -10^{-1}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = 10^{-2}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = -10^{-2}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

**Pwoblèm 84: Estime chanjman nan L**

Ekri yon estimasyon pou  $L$  nan fòm sa a  $|L - L_0| = |\Delta L| \leq C|\Delta h|$

$$|\Delta L| \leq \text{[input field]}$$

**Pwoblèm 85: Anba satelit la**

Fè menm bagay la pou  $h = 1001 \pm \Delta h$ ,  $\Delta h = 1, 10^{-1}, 10^{-2}$ .

(Antre repons ou yo ak 2 chif siyifikatif: sa vle di pa awondi repons lan a dizèn pi pre a, epi pa itilize faktè desimal.)

$$\Delta h = 1, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = -1, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = 10^{-1}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = -10^{-1}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = 10^{-2}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

$$\Delta h = -10^{-2}, \quad \Delta L/\Delta h = \text{[input field]}$$

**Refleksyon pou tèt ou**

Gen kèk erè nan mezi pou detèmine  $h$ , nan ki ka ou plis konfyans nan pozisyon ou?

**Pwoblèm 86: Derivasyon enplisit ak erè limit**

Itilize derivasyon enplisit pou kalkile  $\frac{dL}{dh}$ .

(Antre repons lan an tèm de  $h$  ak  $L$ . Pa rezoud ekspresyon an eksplisitman pou  $L$  an tèm de  $h$ .)

$$\frac{dL}{dh} = \text{[input field]}$$

**Refleksyon pou tèt ou**

Konpare  $\frac{dL}{dh}$  ak erè  $\Delta L/\Delta h$ . Ki sa  $\Delta L/\Delta h \leq dL/dh$  ap ye, si derive a evalye nan bò gòch la?

**Pwoblèm 87: Limit erè a**

Nan ki ranje valè  $h$  sa a verifeye ke  $|\Delta L| \leq 2|\Delta h|$ ?

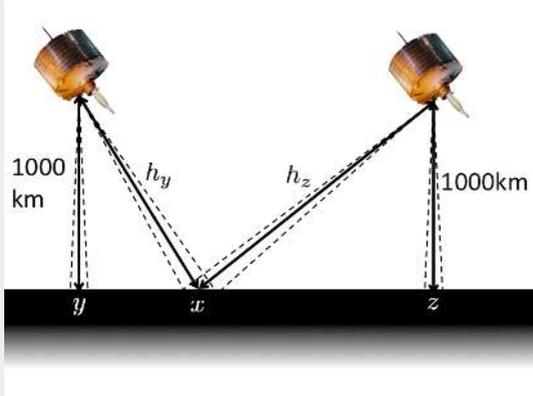
(Antre repons ou an tèm de  $L$ .)

$h \leq$



**Problèm 88: Plizyè satelit**

Sipoze ke planèt Quirk la plat epi li se yon liy dwat. Gen plizyè satelit nan wotè 1000km anwo Quirk.



Ou resewva mezi ki di ke satelit 1 se dirèkteman anlè pwen  $y \pm 10^{-10}$  la, e li nan yon distans  $h_y = 1050 \pm 10^{-2}$  pa rapò ak ou. Satelit 2 a dirèkteman anlè  $z \pm 10^{-10}$  e li nan yon distans  $h_z = 2600 \pm 10^{-2}$  pa rapò ak ou. Kote ou ye? E a ki presizyon? Konsidere separeman ka yo  $y < z$  ak  $z < y$ . Remake byen ke imaj la ilistre ka a  $y < z$ .

(Repons ou ta dwe depann de  $z$ .)

Ka 1:  $y < z$ :

$x \approx$



erè  $\approx \pm$



Ka 2:  $z < y$ :

$x \approx$



erè  $\approx \pm$



**Problèm 89: Ekspoze kòm "liy vizibilite"**

Eksprime  $dL/dh$  an tèm de ang ant liy vizibilite satelit la ak orizantal la sòti nan moun sou tè a. Lè li eksprime an tèm de ang liy vizibilite a, fòmil sa a mache sou yon planèt koube.

$dL/dh =$



## Solisyon yo

### Pwoblèm 71: Apwoksimasyon lineyè

An n poze  $d$  se epesè plastik la mezire an cm, epi  $\delta$  se dansite plastik la an  $\text{g}/\text{cm}^3$ . Sifas yon boul ping pong se  $4\pi r^2$ , paske  $d \ll r$ , mas la bay pa  $w(r) = 4\pi r^2 d \delta$ . Nou itilize lefèt ke pwa inisyal la se  $w = w(r) = 4\pi r^2 d \delta$ .  
Yon apwoksimasyon lineyè bay pa

$$\begin{aligned} w(r + \Delta r) &\approx w(r) + w'(r)(\Delta r) \\ &= w + 8\pi r \cdot d \cdot \delta \Delta r \\ &= w + 2w \frac{\Delta r}{r} \\ &= w \left( 1 + 2 \frac{\Delta r}{r} \right) \end{aligned}$$

### Pwoblèm 72: Apwoksimasyon kwadratik

Se pou nou pran  $d$  kòm epesè plastik la mezire an cm, epi  $\delta$  kòm dansite plastik la an  $\text{g}/\text{cm}^3$ . Sifas yon boul ping pong se  $4\pi r^2$ , paske  $d \ll r$ , (epesè a pi piti anpil pase reyon an), mas la bay pa fòmil  $w(r) = 4\pi r^2 d \delta$ . Nou itilize lefèt ke pwa inisyal la se  $w = w(r) = 4\pi r^2 d \delta$ .

Yon apwoksimasyon kwadratik bay pa

$$\begin{aligned} &w(r + \Delta r) \\ &= w(r) + w'(r)(\Delta r) + \frac{w''(r)}{2} (\Delta r)^2 \\ &= w + 8\pi r d \delta (\Delta r) + 4\pi d \delta (\Delta r)^2 \\ &= w + \frac{2w}{r} \Delta r + \frac{w}{r^2} (\Delta r)^2 \\ &= w \left( 1 + 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{(\Delta r)^2}{r^2} \right) \end{aligned}$$

**Pwoblèm 73: Chanje paramèt yo**

Dapre apwoksimasyon lineyè a, nou konnen ke  $\Delta w \approx 2w \frac{\Delta r}{r}$ . Nou vle jwenn valè  $\frac{\Delta r}{r}$  pou ki  $\frac{\Delta w}{w} \leq 0.06$ . Lè nou itilize apwoksimasyon lineyè a, sa bay

$$\frac{\Delta w}{w} \approx 2 \frac{\Delta r}{r} \leq 0.06$$

ki mennen nou a

$$\frac{\Delta r}{r} \leq 0.03$$

si n ap itilize yon sèl chif sigifikatif presizyon. Remake ke avèk apwoksimasyon kwadratik la, nou jwenn

$$\frac{\Delta w}{w} \approx 2 \frac{\Delta r}{r} + \frac{(\Delta r)^2}{r^2} \leq .0609$$

pou  $\frac{\Delta r}{r} \leq 0.03$ , sa ki vle di li  $\leq 6\%$  si n ap itilize 1 chif sigifikatif, men li pa egzak pou 2 chif sigifikatif.

**Pwoblèm 74: Idantifye inite yo**

Fòmil la pou wotè  $h(t) = x - 16t^2$  kote  $x$  mezire an pye,  $t$  mezire an segonn, e konstan 16 la dwe gen inite pye pa segonn kare  $\text{ft}/\text{s}^2$  pou fonksyon  $h(t)$  gen inite kòrèk an pye.

**Pwoblèm 75: Enèji potansyèl**

TVitès la bay pa derive tan an  $h'(t_1) = -32t_1$ . Sepandan, nou dwe antre repons nou an tèm de  $x$ , pa an tèm de  $t_1$ .

Nou konnen ke objè a tonbe  $x$  pye apre  $t_1$  segonn. Sa vle di

$h(t_1) = x - 16t_1^2 = 0$ , kidonk  $t_1 = \frac{\sqrt{x}}{4}$ . Kidonk, an tèm de  $x$  ak  $m$ ,

$$E_1 = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m(32t_1)^2 = \frac{1}{2}m\left(\frac{32\sqrt{x}}{4}\right)^2 = 32mx.$$

**Pwoblèm 76: Kalkil enèji sinetik**

Nou kòmanse pa itilize konsèvasyon enèji pou jwenn yon ekwasyon pou  $v$  an tèm de  $x$  ak  $v_0$ .

$$\begin{aligned} E &= E_0 + E_1 \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2}mv_0^2 + 32mx \\ v^2 &= v_0^2 + 64x \\ v &= \sqrt{v_0^2 + 64x} \\ v &= v_0\sqrt{1 + \frac{64x}{v_0^2}}. \end{aligned}$$

Koulye a, nou fè yon apwoksimasyon lineyè tou pre  $x = 0$ . Se pou

$f(x) = \sqrt{1 + \frac{64x}{v_0^2}}$ . Lè sa a  $f(x) \approx f(0) + f'(0)x$ . Isit la,  $f(0) = 1$ , epi  $f'(x) = \frac{64}{2v_0^2} \frac{1}{f(x)}$ , kidonk  $f'(0) = \frac{32}{v_0^2}$ . Lè nou mete yo ansanm, nou jwenn

$$\sqrt{1 + \frac{64x}{v_0^2}} \approx 1 + \frac{32x}{v_0^2}.$$

Konsa, nou gen

$$\begin{aligned} v &\approx v_0 \left( 1 + \frac{32x}{v_0^2} \right) \\ v - v_0 &\approx \frac{32x}{v_0} \end{aligned}$$

**Pwoblèm 77: Chanje jwèt la**

Tout sa nou bezwen fè se entwodui nonb nan fòmil nou te jwenn nan pati (c). Sepandan, nou dwe fè atansyon pou asire ke inite yo byen matche. Sonje ke 90 mph se 132 ft/s, epi 5 pous se apeprè 0.42 pye.

Kantite ogmantasyon nan vitès la se

$$v - v_0 \approx 32(.42)/132 \approx .1\text{ft/sec},$$

ki se .07 mph.

**Pwoblèm 78: lansman ak bra sou kote**

Nou jwenn ke

$$v - v_0 \approx \frac{32 \left( \frac{-3}{12} \right)}{132} = -\frac{8}{132} \approx -.06,$$

ki bay apeprè  $-.041$  mph.

**Pwoblèm 79: Kalkile rasin yo**

Metòd Newton itilize fòmil sa a pou repete valè yo  $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

. Fonksyon nou itilize pou jwenn rasin lan se  $f(x) = x^3 - 9$ . Ki donk, fòmil la vin:

$$x_n - \frac{x_n^3 - 9}{3x_n^2} = x_n - \frac{1}{3}x_n + \frac{3}{x_n^2}. \quad (6.60)$$

**Pwoblèm 80: Iterasyon**

Obsève ke si nou sèlman enterese nan jwenn 6 chif siyifikatif presizyon, metòd la konvèje apre sèlman 2 etap!

2.08333, 2.08009, 2.08008, 2.08008

**Pwoblèm 81: Ilistre pwoblèm nan**

Fonksyon  $x^3 - 9$  la konvèks sou bò rasin nan. Valè  $x_0 = 2$  a pi piti pase  $\sqrt[3]{9}$ , men pwochen apwoksimasyon an se pi gran pase rasin nan, sa ki pi sanble ak imaj A.

(A) A

**Pwoblèm 82: Apwoksimasyon kwadratik**

Nou aplike apwoksimasyon kwadratik la nan ekwasyon an:

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{9} &= \sqrt[3]{8(1 + 1/8)} = 2\sqrt[3]{1 + 1/8} \\ &\approx 2 \left( 1 + \frac{1}{3} \frac{1}{8} - \frac{1}{9} \frac{1}{8^2} \right) = 2.079861 \end{aligned}$$

Erè a pi piti pase .0003.

**Pwoblèm 83: GPS**

Lè  $h_0 = 1250$ , nou ka kalkile  $L_0 = \sqrt{1250^2 - 1000^2}$  soti nan teyorem Pythagore an. Lè nou itilize yon òdinatè, nou jwenn:

$$\Delta L = \sqrt{(1250 \pm \Delta h)^2 - 1000^2} - L_0$$

epi nou jwenn valè sa yo:

$$\frac{\Delta L}{\Delta h} \begin{array}{ccc} \pm 1.7 & \pm .17 & \pm .017 \\ \pm 1 & \pm .1 & \pm .01 \end{array}$$

1.7, 1.7, 1.7, 1.7, 1.7, 1.7

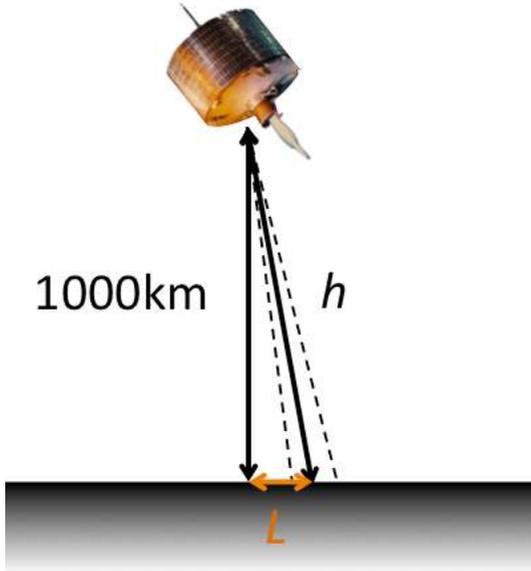
**Pwoblèm 84: Estime chanjman nan L**

Nou ka jwenn yon apwoksimasyon lineyè  $\Delta L = \frac{\Delta L}{\Delta h} \Delta h$ . Derive a, oswa to varyasyon enstantane  $L$  pa rapò ak  $h$  bay pa  $\Delta L / \Delta h = 1.7$ . Paske chanjman nan  $h$  mezire ak yon sèl chif siyifikatif, nou awondi anlè epi nou jwenn ke  $|\Delta L| \leq 2 |\Delta h|$ .

2

**Pwoblèm 85: Anba satelit la**

Yon imaj ki dekri sitiyasyon sa a anba a.



Lè nou kalkile valè sa yo ak  $L_0 = \sqrt{1001^2 - 1000^2}$ , nou jwenn ke  $\Delta L \approx 1000 \left( \frac{1001+\Delta h}{1000} - 1 \right) - L_0$  nou wè ke

$\Delta h$	-1	1	-.1	.1	-.01	.01
$\Delta L$	-45	18	-2	2	-.2	.2

Dapre done yo, nou wè ke  $|\Delta L| \leq 45|\Delta h|$ . Sa vle di ti chanjman nan mezi  $h$  la afekte pozisyon kalkile a anpil anpil.

18, 45, 22, 23, 22, 22

**Pwoblèm 86: Derivasyon enplisit ak erè limit**

Derivasyon enplisit:

$$L^2 + 1000^2 = h^2$$

$$2L \frac{dL}{dh} = 2h$$

$$\frac{dL}{dh} = \frac{h}{L}$$

**Pwoblèm 87: Limit erè a**

Nou genyen ke  $\frac{\Delta L}{\Delta h} \leq \frac{dL}{dh} = \frac{h}{L}$ . Sa a di nou ke

$$\Delta L \leq \frac{h}{L} \Delta h$$

lè  $h \leq 2L$ .

**Pwoblèm 88: Plizyè satelit**

Nou pral travay sou ka a kote  $y < z$  ki ilistre nan imaj la. Lòt ka a se menm bagay la, sof pou siy yo, epi li tankou yon refleksyon nan imaj la.

Nou ka itilize tou de ekwasyon yo, ansanm ak ipotez ke  $y < x < z$  pou jwenn ke:

$$x = y + \sqrt{h_y^2 - 1000^2} \quad h_y = 1050 \pm 10^{-2}$$

$$x = z - \sqrt{h_z^2 - 1000^2} \quad h_z = 2600 \pm 10^{-2}$$

Nou jwenn ke  $x = y + 320 \pm .03$  puiske erè a pi piti oswa egal a

$$\frac{dL}{dh} \Delta h = \frac{h}{L} \Delta h \approx \frac{1050}{320} .01 \approx .03.$$

Nan lòt bò an, nou jwenn tou ke  $x = z - 2400 \pm .01$  puiske erè a se

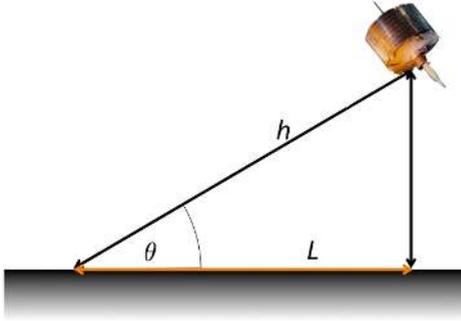
$$\frac{dL}{dh} \Delta h = \frac{h}{L} \Delta h \approx \frac{2600}{2400} .01 \approx .01.$$

Ki donk, nou itilize ekwasyon ki gen pi piti erè a. Nan ka kote  $z < x$ , nou jwenn ke ekwasyon an ak erè a se menm bagay, sèlman siy lan chanje.

.01, .01  $z - 2400$ ,  $z + 2400$

**Pwoblèm 89: Ekspoze kòm "liy vizibilite"**

Dapre derivasyon enplisit nou an, nou jwenn ke  $\frac{dL}{dh} = \frac{h}{L}$ . Liy vizibilite a bay ak ang  $\theta$  ki ant  $L$  ak  $h$ .



Ki donk, rapò a  $h/L = \sec(\theta)$ , kon sa to varyasyon  $L$  pa rapò ak  $h$  ka ekri an tèm de ang  $\theta$  sa a kòm  $\sec(\theta)$  oswa  $1/\cos(\theta)$ .

# Inite 4: Aplikasyon

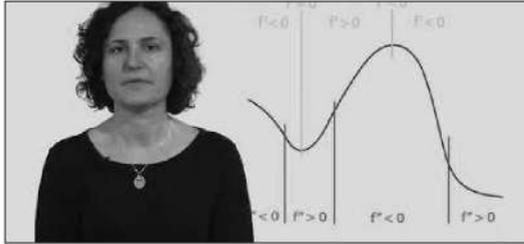
---

# Pwen kritik: Tès Premye ak Dezyèm Derive

---

## 1. Motivasyon

 Videyo




---

## 2. Repezantasyon Grafik ak Pwen Kritik

Objektif yo

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk pratik, ou ta dwe kapab:

- Detèmine fòm grafik yon fonksyon baze sou enfòmasyon soti nan derive li yo.
- Klasifye pwen kritik yo itilize Tès Premye Derive ak Tès Dezyèm Derive yo.

### 3. Preliminè

 Videyo

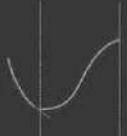


If  $f' > 0$  on  $(a, b)$ , then  $f$  is increasing on  $(a, b)$ .  
 If  $f' < 0$  on  $(a, b)$ , then  $f$  is decreasing on  $(a, b)$ .

$f(x) = 1 + 4x - \frac{x^3}{3}$   
 $f'(x) = 4 - x^2$

$f'$  positive?  
 $x^2 < 4$   
 $-2 < x < 2$

$f'$  negative?  
 $x^2 > 4$   
 $(-\infty, -2) \cup (2, \infty)$



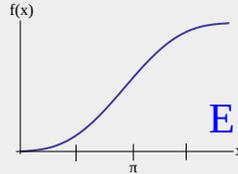
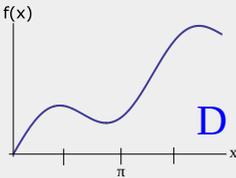
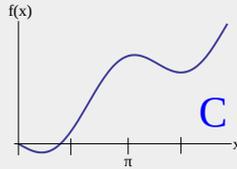
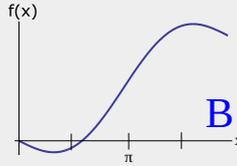
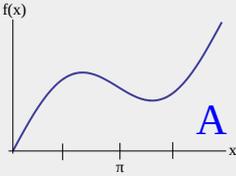
#### Pwoblèm 1: Reprezantasyon Grafik pratik

Poze  $f(x) = 2x - 4 \sin x$ . Jwenn tout entèval nan  $[0, 2\pi]$  kote fonksyon an kwasant.



**Pwoblèm 2: Idantifye yon graf**

Yo ba nou menm fonksyon  $f(x) = 2x - 4 \sin x$  la, kilès nan imaj sa yo ki gen plis chans pou reprezante graf  $f$  sou  $[0, 2\pi]$ ?



- || (A) A (B) B (C) C (D) D (E) E

**Pwoblèm 3: Ki kote yon graf ka vire? (chanje direksyon)**

Si graf yon fonksyon  $f$  chanje soti nan yon valè kwasant (ogmante) pou pase nan yon valè dekwasant (desann), oswa soti nan yon valè dekwasant (desann) pou pase nan yon valè kwasant (ogmante) nan pwen  $x = 3$ , ki sa ki ka vrè? Chwazi tout sa ki posib.

- ||  A  $f'(3) > 0$   B  $f'(3) = 0$   C  $f'(3) < 0$   D  $f'(3)$  pa egziste

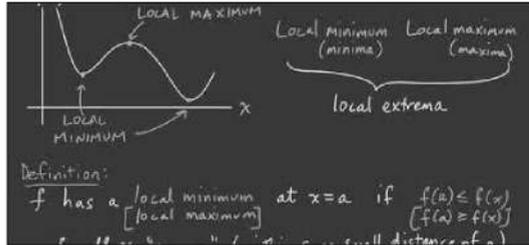
**4. Pwen kritik**

Pwen kritik yo nan yon fonksyon  $f(x)$  se tout pwen  $x$  nan domèn  $f(x)$  kote

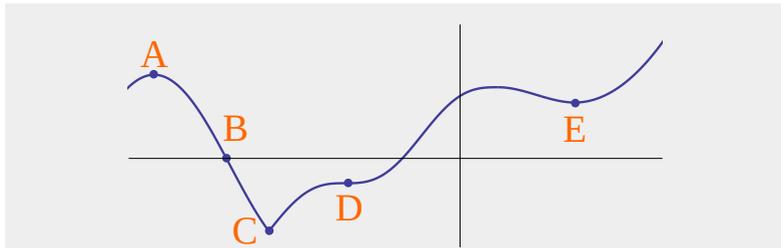
- $f'(x) = 0$ , oswa

- $f'(x)$  pa egziste.

 Videyo



**Pwoblèm 4: Klasifikasyon pwen kritik yo**



Chwazi tout pwen sou graf la ki se

pwen kritik yo:

- A    B  
 C    D  
 E

maksimòm lokal

yo:

- A    B    C  
 D    E

minimòm lokal

yo:

- A    B  
 C    D  
 E

**Pwoblèm 5: Kalkil pwen kritik yo 1**

Chèche tout valè- $x$  ki se pwen kritik pou fonksyon  $g(x) = 0.2x^5 + 2x^4 + 4x^3 - 17$ .

Nou pral wè fonksyon sa a anòk, kidonk ou ka vle sere kalkil ou yo!



**Pwoblèm 6: Kalkil pwen kritik yo 2**

Chèche tout valè- $x$  ki se pwen kritik pou fonksyon  $h(x) = 1.5x^{2/3} + x$ .

Nou pral wè fonksyon sa a ankò, kidonk ou ka vle sere kalkil ou yo!

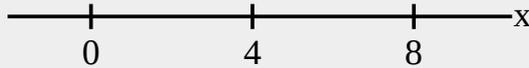


## 5. Tès Premye Derive an

### Pwoblèm 7: Detèmine siy derive a

An n imajine ke nou gen yon fonksyon kontini  $f$ . Nou te kalkile derive li  $f'$ ; **sèlman** twa pwen kritik  $f$  yo nan  $x = 0$ ,  $x = 4$  ak  $x = 8$ .

**Sipoze  $f'$  kontini nan tout lòt pwen.**



Finalman, sipoze ke  $f'(6) > 0$ . Ki sa (si anyen) nou ka di sou valè  $f'$  sa yo?

$f'(-2)$ :

- (A) Dwe pozitif.
- (B) Dwe negatif.
- (C) Nou pa ka detèmine siy lan.

$f'(2)$ :

- (A) Dwe pozitif.
- (B) Dwe negatif.
- (C) Nou pa ka detèmine siy lan.

$f'(5)$ :

- (A) Dwe pozitif.
- (B) Dwe negatif.
- (C) Nou pa ka detèmine siy lan.

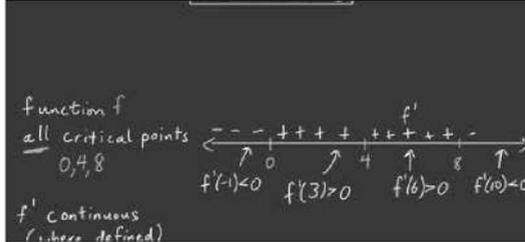
$f'(7)$ :

- (A) Dwe pozitif.
- (B) Dwe negatif.
- (C) Nou pa ka detèmine siy lan.

$f'(10)$ :

- (A) Dwe pozitif.
- (B) Dwe negatif.
- (C) Nou pa ka detèmine siy lan.

 Videyo



## 6. Yon tès pou pwen kritik

### Pwoblèm 8: Chanje Fonksyon an

Sipoze  $f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = 3$ .

Defini yon fonksyon  $g(x)$  ak yon entèval  $I$  kote ke

- $g(x) = f(x)$  pou  $x$  nan  $I$ ,
- men  $g(x) \neq f(x)$  pou  $x$  pa nan  $I$ .

Idantifye tout entèval  $I$  yo defini anba a pou kiyès nan yo  $g$  dwe gen yon maksimòm lokal nan  $x = 3$ .

A  $I = [3, \infty)$     B  $I = (2, 4)$     C  $I = [2.9, 3.1)$     D  $I = [0, 3.5]$

E  $I = (-3, 3]$

 Videyo



## 7. Tès Premye Derive an

### Jwenn Maksimòm ak Minimòm lokal yo

Sipoze ke fonksyon  $f(x)$  la kontini nan  $x = a$  epi li gen yon pwen kritik nan  $x = a$ .

$f$  gen yon minimòm lokal nan  $x = a$  si  $f'(x) < 0$  jis sou bò gòch  $a$  ak  $f'(x) > 0$  jis sou bò dwat  $a$ . 

$f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = a$  si  $f'(x) > 0$  jis sou bò gòch  $a$  ak  $f'(x) < 0$  jis sou bò dwat  $a$ . 

Pwen  $x = a$  la pa ni yon minimòm lokal ni yon maksimòm lokal pou  $f$  si  $f'(x)$  gen menm siy jis sou bò gòch  $a$  ak jis sou bò dwat  $a$ . 

### Jis sou bò gòch oswa dwat

Lè nou itilize fraz " $f'(x) > 0$  jis sou bò gòch  $a$ ," nou vle di gen kèk entèval ouvè  $(a - c, a)$  ki gen yon lajè pozitif  $c$  kote  $f'$  pozitif. Entèval sa a pa bezwen trè gwo, osi lontan ke li gen kèk gwosè!

Menm jan an tou, " $f'(x) > 0$  jis a-dwat  $a$ " sa vle di gen kèk entèval ouvè  $(a, a + d)$  nan lajè pozitif  $d$  kote  $f'$  pozitif.

## 8. Aplikasyon Tès Premye Derive an

### Pwoblèm 9: Klasifikasyon pwen kritik yo 1

Liste tout valè  $x$  kote fonksyon  $g(x) = x^5/5 + 2x^4 + 4x^3 - 17$  gen yon maksimòm lokal.



Liste tout pwen kote  $g$  gen yon minimòm lokal.



**Pwoblèm 10: Klasifikasyon pwen kritik yo 2**

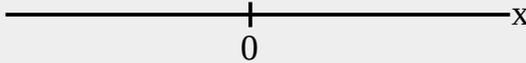
Liste tout valè  $x$  kote fonksyon  $h(x) = 1.5x^{2/3} + x$  gen yon maksimòm lokal.



Liste tout pwen kote  $h$  gen yon minimòm lokal.

**9. Pi Iwen Tès Derive Premye a****Pwoblèm 11: Èske sa mache?**

Konsidere fonksyon  $f(x) = x^2 + 3 \cos x$ . Nou konnen ke derive li se  $f'(x) = 2x - 3 \sin x$ , ki donk  $f'(0) = 0$ . Ki fè, nou gen yon pwen kritik nan  $x = 0$  epi nou vle konnen si se yon maksimòm lokal oswa minimòm lokal.



Sèvi ak sèlman enfòmasyon sa yo (i.e. pa sèvi ak fòmil yo bay pi wo a)

- $f'(0) = 0$
- $f'(\pi/2) = \pi - 3 > 0$
- $f'(-\pi/2) = -\pi + 3 < 0$ ,

ki sa nou ka konkli sou konpòtman  $f$  nan  $x = 0$ ?

- A  $f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = 0$
- B  $f$  gen yon minimòm lokal nan  $x = 0$
- C  $f$  pa gen ni yon maksimòm lokal ni yon minimòm lokal nan  $x = 0$
- D Pa gen ase enfòmasyon pou detèmine

 Videyo


$$f(x) = x^2 + 3 \cos x$$

$$f'(x) = 2x - 3 \sin x$$

$f'(-\frac{\pi}{2}) < 0$        $f'(0) = 0$        $f'(\frac{\pi}{2}) > 0$

$2x - 3 \sin x = 0$   
 ???

## 10. Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an

### Pwoblèm 12: Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an 1

An n poze  $g(x) = x^3$  ak  $h(x) = x^4$ . Lè sa a tou de  $g'(0) = h'(0) = 0$ , ki donk tou de fonksyon yo gen yon pwen kritik nan  $x = 0$ . Ki sa dezyèm derivasyon yo ye nan  $x = 0$ ?

$g''(0) =$

$h''(0) =$

**Pwoblèm 13: Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an 2**

Sa a se yon ka limit pou Tès Dezyèm Derive a. Kounye a, nou vle detèmine si pwen kritik sa yo nan  $x = 0$  se ekstrèmòm lokal.

Lè  $x < 0$ ,  $g(x) = x^3$  se

- (A) pozitif     (B) negatif

Lè  $x > 0$ ,  $g(x) = x^3$  se

- (A) pozitif     (B) negatif

Nan  $x = 0$ ,  $g(x) = x^3$  gen

- (A) yon maksimòm lokal  
 (B) yon minimòm lokal  
 (C) ni yon max lokal ni yon min lokal

Lè  $x < 0$ ,  $h(x) = x^4$  se

- (A) pozitif     (B) negatif

Lè  $x > 0$ ,  $h(x) = x^4$  se

- (A) pozitif     (B) negatif

Nan  $x = 0$ ,  $h(x) = x^4$  genyen

- (A) yon maksimòm lokal  
 (B) yon minimòm lokal  
 (C) ni yon max lokal ni yon min lokal

**Pwoblèm 14: Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an 3**

Dapre repons kesyon anvan yo, ki pi bon fason pou konplete Tès Dezyèm Derive a an jeneral?

si  $f'(a) = 0$ , ak  $f''(a) = 0$ , lè sa a...

- (A)  $a$  se yon maksimòm lokal     (B)  $a$  se yon minimòm lokal  
 (C)  $a$  pa ni yon maksimòm lokal ni yon minimòm lokal  
 (D) nou pa gen ase enfòmasyon pou nou di; tès la enkonklizif.

**11. Tès Dezyèm Derivasyon an**

Sipoze ke  $x = a$  se yon pwen kritik pou  $f$ , avèk  $f'(a) = 0$ .

Si  $f''(a) > 0$ , lè sa a  $f$  gen yon minimòm lokal nan  $x = a$ .



Si  $f''(a) < 0$ , lè sa a  $f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = a$ .



Si  $f''(a) = 0$ , oswa pa egziste, lè sa a tès la enkonklizif – ta ka gen yon maksimòm lokal, oswa yon minimòm lokal, oswa ni youn ni lòt.

## 12. Tès Dezyèm Derivasyon pratik

### Pwoblèm 15: Tès Dezyèm Derivasyon pratik

An n poze  $f(x) = e^x - x - 2x^2$ . Gen yon pwen kritik nan  $x = 0$ ; èske se yon maksimòm lokal oswa yon minimòm lokal, oswa ni youn ni lòt?

- A  $f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = 0$
- B  $f$  gen yon minimòm lokal nan  $x = 0$
- C  $f$  pa gen ni yon maksimòm lokal ni yon minimòm lokal nan  $x = 0$
- D Pa gen ase enfòmasyon pou detèmine

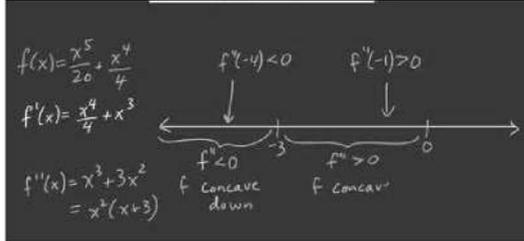
Nou devlope de tès pou detèmine si pwen kritik yo se minimòm oswa maksimòm lokal. Chak gen avantaj ak dezavantaj yo.

- Tès Dezyèm Derivasyon an mande sèlman yon valè  $f''$ , men pafwa li pa bay rezilta definitif (li enkonklizif).
- Tès Premye Derivasyon an mande yon ti kras plis enfòmasyon (done), men li souvan kapab bay plis detay kòm rezilta.

Li enpòtan pou ou alèz lè w ap itilize tou de tès yo!

### 13. Pwen d enfleksyon

 Videyo



Yon **Pwen d enfleksyon** se yon pwen kote konkavite fonksyon an chanje (modifye). Sa se dezyèm derive a  $f''(x)$  siy li chanje –  $f''(x) > 0$  jis sou bò gòch  $x$  ak  $f''(x) < 0$  jis sou bò dwat  $x$  (oswa vis vèsà).

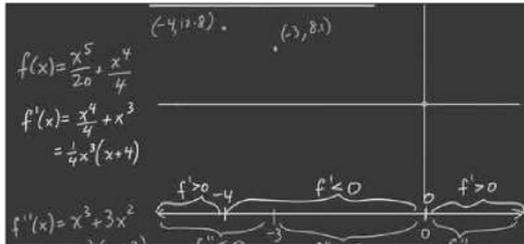
#### Pwoblèm 16: Jwenn pwen d enfleksyon an

An n poze  $f(x) = 2x^6/5 - x^4/4 + 7x - 2/3$ . Liste tout valè- $x$  ki se pwen d enfleksyon pou fonksyon  $f$ .



### 14. Reprezantasyon Grafik ak Dezyèm Derive

 Videyo

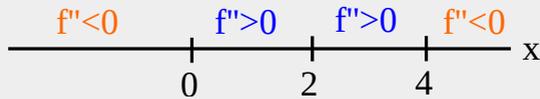


**Pwoblèm 17: Itilizasyon dezyèm derive a**

Sipoze nou konnen ke  $f'(x)$  egal a zewo nan  $x = -2$  ak  $x = 2$ , li pozitif pou  $x < -2$  ak  $x > 2$ , epi li negatif pou  $-2 < x < 2$ .



Sipoze tou ke nou konnen  $f''(x)$  egal a zewo nan  $x = 0$ ,  $x = 2$ , ak  $x = 4$ , li pozitif sou entèval yo  $0 < x < 2$  ak  $2 < x < 4$ , epi li negatif pou  $x < 0$  oswa  $x > 4$ .



Liste tout valè  $x$  – nan pwen kote gen yon minimòm lokal.



Liste tout valè  $x$  – nan pwen kote gen yon maksimòm lokal.



Liste tout valè  $x$  – nan pwen kote gen yon pwen d enfleksyon.



**Pwoblèm 18: Fè graf fonksyon an**

Desine yon fonksyon  $f$  sou entèval  $-4 < x < 6$  ki gen pwen ekstremòm ak pwen d enfleksyon yo detèmine nan pwoblèm anvan an.

Made with MIT | [Info & Legal](#)

**Pwoblèm 19: Kote pwen enfleksyon yo?**

Vrè oswa Fo: Si  $f''(a) = 0$ , lè sa a  $a$  dwe yon pwen enfleksyon pou fonksyon  $f$ .

- (A) Vrè     (B) Fo

## 15. Limit nan lenfini

### Pwoblèm 20: Ale nan lenfini 1

Sipoze yon fonksyon  $f$  defini e kontini pou tout nonb reyèl  $x$ , epi

- $f(2) = 1$ ,
- $f'(x) > 0$  pou tout  $x \geq 2$ , ak
- $f''(x) > 0$  pou tout  $x \geq 2$ .

Èske gen yon pwen  $x = a$  kote  $f(a) = 10000$ ?

|| (A) Wi (B) Non (C) Pa ka detèmine

### Pwoblèm 21: Limit nan lenfini 2

Sipoze  $g$  defini ak kontini pou tout nonb reyèl  $x$ , epi

- $g(2) = 1$ ,
- $g'(x) > 0$  pou tout  $x \geq 2$ , ak
- $g''(x) < 0$  pou tout  $x \geq 2$ .

Èske gen yon pwen  $x = a$  kote  $g(a) = 10000$ ?

|| (A) Wi (B) Non (C) Pa ka detèmine

## 16. Twazyèm Derivasyon (Opsyonèl)

### Pwoblèm 22: Itilize Twazyèm Derive a (Opsyonèl)

Nan ka kote tès dezyèm derivasyon an pa bay okenn rezilta, nou ka eseye itilize twazyèm derivasyon an pou detèmine si yon pwen kritik se yon minimòm lokal oswa yon maksimòm lokal.

An n imajine nou gen yon pwen kritik  $x = a$  kote  $f'(a) = 0$  ak  $f''(a) = 0$  (ki donk tès dezyèm derivasyon an pa di nou anyen). Koulye a, an n sipoze ke  $f'''(a) > 0$ .

Ki sa nou ka dedwi sou  $f''(x)$  lè  $x$  jis a-dwat de  $a$ ?

- (A) Li pozitif
- (B) Li negatif
- (C) Nou pa ka di

Ki sa nou ka dedwi sou  $f''(x)$  lè  $x$  jis a-goch de  $a$ ?

- (A) Li pozitif
- (B) Li negatif
- (C) Nou pa ka di

### Pwoblèm 23: Itilizasyon twazyèm derivasyon an 2

Sonje ke nou sipoze ke  $f'(a) = 0$ . A pati de sa nou dekouvri sou  $f''$  jis a-dwat  $x = a$ , ki sa nou ka konkli sou  $f'(x)$  lè  $x$  jis a-dwat  $a$ ?

- (A) Li pozitif
- (B) Li negatif
- (C) Nou pa ka di

A pati de sa nou dekouvri sou  $f''$  jis a-goch  $x = a$ , ki sa nou ka konkli sou  $f'(x)$  lè  $x$  jis a-goch de  $a$ ?

- (A) Li pozitif
- (B) Li negatif
- (C) Nou pa ka di

**Pwoblèm 24: Repons Final**

A pati de sa nou dekouvi sou  $f'$  toupre  $x = a$ , ki sa nou ka konkli sou pwen kritik la?

- (A) Li se yon maksimòm lokal
- (B) Li se yon minimòm lokal
- (C) Li pa ni yon maksimòm lokal ni yon minimòm lokal
- (D) Nou pa ka di sa l ye

**17. Rezime****Definisyon Pwen kritik**

Pwen kritik yo nan yon fonksyon  $f(x)$  se tout pwen  $x$  ki nan domèn  $f(x)$  tèt ke

- $f'(x) = 0$ , oswa
- $f'(x)$  pa egziste .

**Tès Premye Derivasyon an****Jwenn maksimòm ak minimòm lokal yo**

Sipoze ke fonksyon  $f(x)$  la kontini nan  $x = a$  epi li gen yon pwen kritik nan  $x = a$ .

$f$  gen yon minimòm lokal nan  $x = a$  si  $f'(x) < 0$  jis sou a-gòch de  $a$  epi  $f'(x) > 0$  jis sou a-dwat de  $a$ . 

$f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = a$  si  $f'(x) > 0$  jis sou a-gòch de  $a$  epi  $f'(x) < 0$  jis sou a-dwat de  $a$ . 

Pwen  $x = a$  pa ni yon minimòm lokal ni yon maksimòm lokal de  $f$  si  $f'(x)$  gen menm siy la jis sou bò gòch de  $a$  ak jis sou bò dwat  $a$ . 

**Jis a-goch oswa a-dwat**

Lè nou itilize fraz " $f'(x) > 0$  jis a-goch de  $a$ ," nou vle di ke gen yon ti entèval ouvè  $(a - c, a)$  ki gen yon lajè pozitif  $c$  kote  $f'$  lan pozitif. Entèval sa a pa bezwen twò gwo, osi lontan ke li gen yon ti gwosè!

Menm jan an, " $f'(x) > 0$  jis a-dwat de  $a$ " vle di ke gen yon entèval ouvè  $(a, a + d)$  ki gen yon lajè pozitif  $d$  kote  $f'$  pozitif.

**Tès Dezyèm Derivasyon an**

Sipoze ke  $x = a$  se yon pwen kritik pou  $f$ , avèk  $f'(a) = 0$ .

Si  $f''(a) > 0$ , lè sa a  $f$  gen yon minimòm lokal nan  $x = a$ .



Si  $f''(a) < 0$ , lè sa a  $f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = a$ .



Si  $f''(a) = 0$ , oswa pa egziste, lè sa a tès la enkonklizif (li pa sèten) – ta ka gen yon maksimòm lokal, oswa yon minimòm lokal, oswa ni youn ni lòt.

### Tès Premye Derivasyon vs Tès Dezyèm Derivasyon an

Nou devlope de tès pou detèmine si pwen kritik yo se minimòm oswa maksimòm lokal. Chak tès gen avantaj ak dezavantaj li yo.

- Tès Dezyèm Derivasyon an mande sèlman yon valè  $f''$ , men pafwa li pa bay rezilta ki sèten (enkonklizif).
- Tès Premye Derivasyon an mande plis enfòmasyon (done), men li ka souvan bay plis detay (nan rezilta).

Li enpòtan pou w alèz ak itilizasyon de tès yo!

### Definisyon Pwen d Enfleksyon

Yon **Pwen d Enfleksyon** se yon pwen kote konkavite yon fonksyon chanje. Sa vle di dezyèm derive a,  $f''(x)$ , chanje siy—  $f''(x) > 0$  jis a-goch de  $x$  ak  $f''(x) < 0$  jis a-dwat de  $x$  (oswa vis vèsa).

## Solisyon yo

### Pwoblèm 1: Repezantasyon Grafik pratik

Fonksyon an ap ogmante (kwasant) lè derive a pozitif.

$$f'(x) = 2 - 4 \cos x > 0 \quad (7.1)$$

$$\text{si e sèlman si } \cos x < 0.5 \quad (7.2)$$

$$\text{Nan } [0, 2\pi] : \quad \pi/3 < x < 5\pi/3 \quad (7.3)$$

### Pwoblèm 2: Identifye yon graf

B se sèl graf ki ap ogmante sou entèval  $\left(\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}\right)$  e okenn lòt kote.

Ⓔ B

### Pwoblèm 3: Ki kote yon graf ka vire? (chanje direksyon)

Si graf la pase de yon valè kwasant (ogmante) pou rive nan yon valè dekwasant (desann) nan  $x = 3$ , li ta ka gen yon liy tanjant orizontal, sa vle di,  $f'(3) = 0$ , oswa yon kwen kote  $f'(3)$  pa egziste.

Sepandan, si  $f'(3) > 0$ , sa vle di graf la ap pi wo a dwat nan  $x = 3$  epi pi ba a goch nan  $x = 3$ , kon sa li p ap ka chanje soti nan ogmante pou desann (oswa soti nan desann pou ogmante) nan  $x = 3$ . Menm bagay la pou  $f'(3) < 0$ .

### Pwoblèm 4: Klasifikasyon pwen kritik yo

Pwen A, D, ak E gen yon liy tanjant orizontal, kidonk yo se pwen kritik. Pwen C a nan yon kwen, kote derive a pa defini, ki donk li se yon pwen kritik tou.

Pwen A se yon maksimòm lokal.

Pwen C ak E se minimòm lokal yo.

Remake byen ke pwen D a se yon pwen kritik ki pa ni yon maksimòm lokal ni yon minimòm lokal.

### Pwoblèm 5: Kalkil pwen kritik yo 1

Pwiske derive a byen defini toupatou, nou jwenn pwen kritik yo lè nou poze  $g'(x) = 0$ , ki se

$$g'(x) = x^4 + 8x^3 + 12x^2 = x^2(x + 6)(x + 2) = 0.$$

Ki donk, pwen kritik  $g$  yo se  $x = 0, -6, -2$ .

**Pwoblèm 6: Kalkil pwen kritik yo 2**

Nou kalkile derive  $h'(x) = x^{-1/3} + 1$ . Remake byen ke  $h'(x)$  pa defini nan  $x = 0$ , ak  $h'(x) = 0$  lè  $x = -1$ . Ki donk pwen kritik yo se  $x = 0, -1$ .

**Pwoblèm 7: Detèmine siy derive a**

Kote yo jwenn  $f'$  egal a zewo (oswa kote li ka pa egziste ak yon diskontinite de so) se nan  $x = 0, 4, 8$ . Pwiske  $f'$  kontini, li pa ka chanje siy sòf si li travèse (kwaze) youn nan valè sa yo. Nou konnen ke  $f'$  pozitif nan  $x = 6$ , kidonk li dwe rete pozitif sou tout entèval la  $4 < x < 8$ . An patikilye,  $f'$  pozitif nan  $x = 5$  ak  $x = 7$ . Nou pa konnen anyen sou valè  $f'$  nan lòt pwen yo.

Gade pwochen videyo a pou plis detay!

- Ⓒ Nou pa ka detèmine siy lan.
- Ⓒ Nou pa ka detèmine siy lan.
- Ⓐ Dwe pozitif.
- Ⓐ Dwe pozitif.
- Ⓒ Nou pa ka detèmine siy lan.

**Pwoblèm 8: Chanje Fonksyon an**

Pou  $g$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = 3$ ,  $g(3)$  dwe pi gran pase oswa egal a tout valè  $g(x)$  ki sitiye jis sou bò dwat ak sou bò gòch  $x = 3$ . Nou deja konnen sa se vre pou  $f$ . Ki donk, nenpòt entèval  $I$  ki gen valè jis sou bò dwat ak sou bò gòch  $x = 3$  ap garanti ke pwopriyete maksimòm lokal la ap rete an plas.

**Pwoblèm 9: Klasifikasyon pwen kritik yo 1**

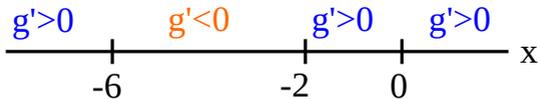
Nan yon pwoblèm anvan, nou te jwenn pwen kritik yo pou  $g$  yo se  $x = -6, -2, 0$ . Paske  $g(x)$  kontini toupatou, e espesyalman nan pwen kritik yo, nou ka echantiyone chak entèval yo pou n ka detèmine siy  $g'$ .

$$g'(-10) = 3200, \quad \text{ki donk } g' \text{ pozitif sou } (-\infty, -6);$$

$$g'(-4) = -64, \quad \text{ki donk } g' \text{ negatif sou } (-6, -2);$$

$$g'(-1) = 5, \quad \text{ki donk } g' \text{ pozitif sou } (-2, 0);$$

$$\text{epi } g'(1) = 21, \quad \text{ki donk } g' \text{ pozitif sou } (0, +\infty).$$



Lè nou aplike Tès Derive Premye a nan chak pwen kritik, nou wè ke  $x = -6$  se yon maksimòm lokal,  $x = -2$  se yon minimòm lokal, pandan ke  $x = 0$  pa yon ekstèmòm lokal ni nan direksyon maksimòm ni nan direksyon minimòm.

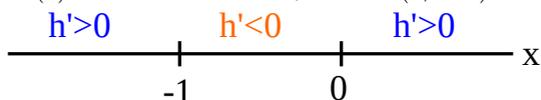
**Pwoblèm 10: Klasifikasyon pwen kritik yo 2**

Nan yon pwoblèm anvan, nou te jwenn pwen kritik yo pou  $h$  yo se  $x = -1$  ak  $x = 0$ . Paske  $h(x)$  kontini toupatou, e espesyalman nan pwen kritik yo, nou ka echantiyone chak entèval yo pou n ka detèmine siy  $h'$ .

$$h'(-8) = 1/2, \quad \text{ki donk } h' \text{ pozitif sou } (-\infty, -1);$$

$$h'(-1/8) = -1, \quad \text{kidonk } h' \text{ negatif sou } (-1, 0);$$

$$\text{epi } h'(1) = 2, \quad \text{ki donk } h' \text{ pozitif sou } (0, +\infty).$$



Lè nou aplike Tès Derive Premye a nan chak pwen kritik, nou wè ke  $x = -1$  se yon maksimòm lokal,  $x = 0$  se yon minimòm lokal.

**Pwoblèm 11: Èske sa mache?**

Sa a se pa ase enfòmasyon! Si nou vle itilize Tès Derive Premye, nou bezwen konnen siy  $f'$  imedyatman a-dwat ak a-goch de 0. Sepandan, nou sèlman konnen  $f'$  nan  $\pm \frac{\pi}{2}$ , epi, piske nou pa konnen *tout* pwen kritik yo, siy  $f'$  lan ka chanje ant pwen sa yo ak 0.

Pou plis enfòmasyon, gade pwochen videyo a!

**Pwoblèm 12: Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an 1**

Nou kalkile tou de sa yo  $g''(0)$  ak  $h''(0)$  egal a zewo.

0, 0

**Pwoblèm 13: Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an 2**

Pou  $x < 0$ ,  $g(x) < g(0) = 0$  epi pou  $x > 0$ ,  $g(x) > g(0) = 0$ . Ki donk  $g(x) = x^3$  pa gen ni yon min lokal ni yon max lokal nan  $x = 0$ .

Sepandan, pou  $x < 0$  ak  $x > 0$ ,  $h(x) > h(0) = 0$ , ki donk  $h$  gen yon min lokal nan  $x = 0$ .

ⓑ negatif

Ⓐ pozitiv

ⓒ ni yon max lokal ni yon min lokal

Ⓐ pozitiv

Ⓐ pozitiv

ⓑ yon minimòm lokal

**Pwoblèm 14: Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an 3**

Nou te wè de egzanp fonksyon kote premye derive ak dezyèm derive yo egal a zewo nan  $x = 0$ , sètadi  $g(x) = x^3$  ak  $h(x) = x^4$ . Nan yon ka, pa t gen ekstrèmòm lokal, epi nan lòt ka a te gen youn. Ki donk, sèlman konnen ke  $f'(a) = f''(a) = 0$  pa pèmèt nou konnen si gen oswa pa gen yon ekstrèmòm lokal pou  $f$  nan  $x = a$ !

Se poutèt sa, tès la enkonklizif.

**Pwoblèm 15: Tès Dezyèm Derivasyon pratik**

Nou kapab kalkile  $f''(x) = e^x - 4$ , ki donk  $f''(0) = -3 < 0$ . Sepandan  $f$  gen yon maksimòm lokal nan  $x = 0$ .

**Pwoblèm 16: Jwenn pwen d enfleksyon an**

Nou bezwen detèmine kote dezyèm derive a pozitif ak negatif

Premyèman, nou kalkile  $f''(x) = 12x^4 - 3x^2$ . Sa a toujou egziste, epi li se zewo lè  $x = 0, \pm 0.5$ .

Pwen sa yo divize liy nimerik lan an 4 entèval, epi nou ka chwazi yon pwen epi echantiyone  $f''$  sou chak entèval yo. Nou jwenn ke  $f''$  pozitif sou  $(-\infty, -0.5)$  ak  $(0.5, \infty)$ , epi negatif sou  $(-0.5, 0)$  ak  $(0, 0.5)$ . Sa vle di gen pwen d enfleksyon nan  $\pm 0.5$ , men pa gen okenn pwen d enfleksyon nan  $x = 0$ .

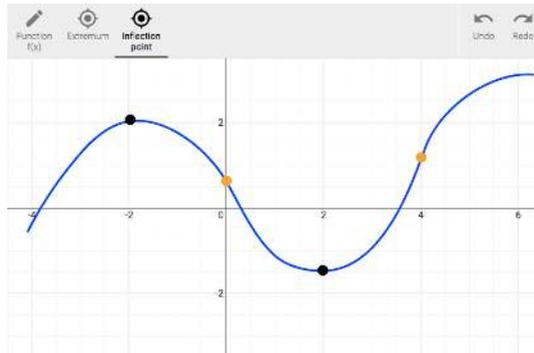
**Pwoblèm 17: Itilizasyon dezyèm derive a**

Nou ka itilize Tès Premye Derivasyon an pou wè ke gen yon maksimòm lokal nan  $x = -2$ , ak yon minimòm lokal nan  $x = 2$ . Gen pwen d enfleksyon nan  $x = 0$  ak  $x = 4$ .

**Pwoblèm 18: Fè graf fonksyon an**

Nou ka itilize Tès Premye Derivasyon an pou wè ke gen yon maksimòm lokal nan  $x = -2$ , ak yon minimòm lokal nan  $x = 2$ .

Gen pwen d enfleksyon nan  $x = 0$  ak  $x = 4$ . Gen anpil repons posib. Men youn nan yo.



**Pwoblèm 19: Kote pwen enfleksyon yo?**

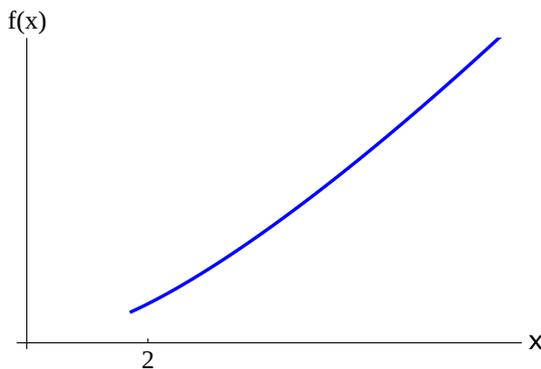
Fo. Nou pa ka konkli ke  $f''$  chanje siy soti pozitif pou vin negatif, oswa vis vèsa, nan  $x = a$ , tou senpleman paske  $f''(a) = 0$ .

Pa egzanp, konsidere  $h(x) = x^4$ .

Ⓒ Fo

**Pwoblèm 20: Ale nan lenfini 1**

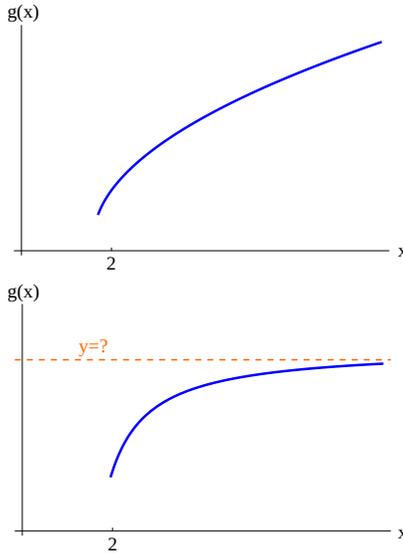
Wi. Grafik la ap ogmante, e kòm li konvèks, li pa ka gen yon limit siperyè.



Ⓐ Wi

**Pwoblèm 21: Limit nan lenfini 2**

Sa a pa ka detèmine. Grafik la ap ogmante, men li ka gen yon asenptòt orizontal, oswa li ka san limit. Si li gen yon asenptòt orizontal, nou pa konnen si li anlè oswa anba  $y = 10000$ .



© Pa ka detèmine

**Pwoblèm 22: Itilize Twazyèm Derive a (Opsyonèl)**

Nou genyen sa  $f'''(a) > 0$ . Twazyèm derive a se derive  $g = f''$ , ki donk  $g = f''$  dwe ogmante toupre  $x = a$ .

- Ⓐ Li pozitif
- Ⓑ Li negatif

**Pwoblèm 23: Itilizasyon twazyèm derivasyon an 2**

Depi pwoblèm anvan an, nou konnen ke  $f''(x) > 0$  lè  $x$  jis a-dwat de  $a$ . Sa a vle di ke  $f'$  ap ogmante sou yon ti entèval jis a-dwat de  $a$ . Pwiske  $f'(a) = 0$ , nou dedwi ke  $f' > 0$  jis a-dwat de  $a$ .

Menm jan an tou, nou konnen  $f''(x) < 0$  lè  $x$  jis sou bò gòch  $a$ . Sa vle di  $f'$  ap diminye sou kèk ti entèval jis sou bò gòch  $a$ . Pwiske  $f'(a) = 0$ , nou konkli ke  $f' > 0$  jis sou bò gòch  $a$ .

- Ⓐ Li pozitif
- Ⓐ Li pozitif

**Pwoblèm 24: Repons Final**

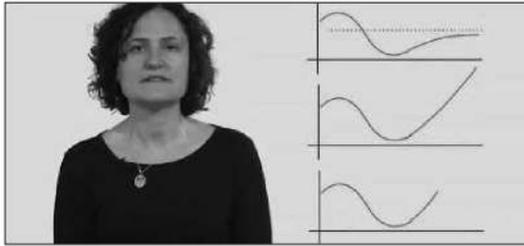
Nou te dekouvri nan pwoblèm anvan an ke  $f' > 0$  jis a-dwat de  $a$ , ak  $f' > 0$  jis a-goch de  $a$ . Ki donk, dapre Tès Premye Derive a,  $f$  pa gen ni yon minimòm lokal ni yon maksimòm lokal nan  $x = a$ . Menm bagay la sanble ap rive si  $f'''(a)$  negatif (an sipozan ke  $f'(a) = 0$  ak  $f''(a) = 0$ ). Èske ou ka devine sa nou ka fè si  $f'''(a) = 0$ ?

© Li pa ni yon maksimòm lokal ni yon minimòm lokal

# Sa an antye: limit ak asentotik

## 1. Motivasyon

 Videyo



## 2. Limit ak asenptòt yo

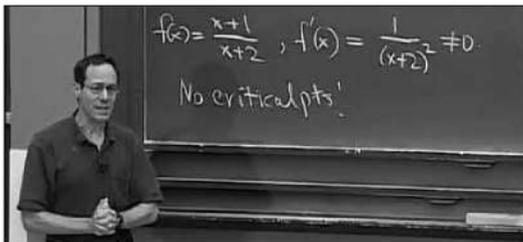
Objektif yo

Nan fen sekans sa a, aprè kèk ti pratik, ou ta sipoze kapab:

- Itilize estrateji jeneral pou **eskise (trase) koub yo ak men w.**
- Itilize limit pou w detèmine valè fonksyon yo nan **diskontinite** ak **pwen ekstrèm yo** (enkli osi  $\pm\infty$ ).
- Aplike **Lwa de l'Hôpital** pou kalkile limit avèk **Fòm endetèmine**:  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ .
- Re-aranje limit lòt fòm endetèmine  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$  pou yo ka sou fòm  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ .
- Re-aranje limit nan fòm eksponansyèl endetèmine  $0^0$ ,  $1^\infty$ ,  $\infty^0$  pandan w ap aplike  $e^{\ln}$  pou w jwenn yon fòm endetèmine estanda  $\frac{0}{0}$ ,  $\frac{\infty}{\infty}$ .
- Itilize lwa l'Hôpital la pou w **konpare to de kwasans** fonksyon yo nan lenfni.

### 3. Repezantasyon grafik

 Videyo



#### Pwoblèm 25: Revizyon: Evalye limit a-dwa ak limit a-gòch

Nou te prezante notasyon  $f(-2^+) = \lim_{x \rightarrow -2^+} f(x)$ . Remake byen ke  $-2^+ = (-2)^+$ . Menm jan an tou nou poze  $f(-2^-)$  endike pa  $\lim_{x \rightarrow -2^-} f(x)$ . Remake ke  $-2^- = (-2)^-$ .

Evalye limit a-dwat ak a-gòch fonksyon  $\frac{x+1}{x+2}$  la nan diskontinite  $x = -2$ .

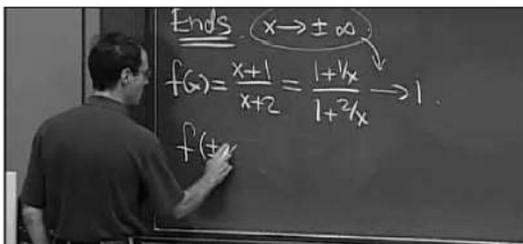
$$f(-2^+) =$$



$$f(-2^-) =$$



 Videyo



## 4. Estrateji jeneral ak egzanz pratik

### 1. Trase

- diskontinite yo (an patikilye nan lenfini)
- pwen ekstrèm (oswa  $x \rightarrow \pm\infty$ )
- pwen fasil ( $x = 0$ , oswa  $y = 0$ ) (Sa a opsyonèl.)

### 2. Trase pwen kritik ak valè yo. (Rezoud $f'(x) = 0$ oswa ki pa defini.)

3. Deside si  $f' < 0$  oubyen  $f' > 0$  sou chak entèval ant pwen ekstrèm yo, pwen kritik yo, ak diskontinite yo. (Doubl verifikasyon enpòtan)

### 4. Idantifye kote $f'' < 0$ ak $f'' > 0$ (konkav desann ak konkav moute).

Idantifye pwen enfleksyon yo. (Fè graf la parèt bèl. Ou ka itilize pou verifye tou.)

### 5. Konbine nan graf la.

## 5. Egzanz

### Pwoblèm 26: Egzanz pratik: Etap 1

Konsidere fonksyon  $\frac{x}{(\ln x)^2}$ . Premye etap. Idantifye diskontinite yo ak limit a-dwat ak a-gòch nan diskontinite a.

Diskontinite:  $x =$

Limit a-dwat nan diskontinite a =

Limit a-gòch nan diskontinite a =

**Pwoblèm 27: Egzanp rezoud: idantifye pwen ekstrèm yo**

Konsidere fonksyon  $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ . Apre sa, idantifye pwen ekstrèm yo a-dwat ak a-gòch.

Pwen ekstrèm gòch:  $x =$

Pwen ekstrèm dwat:  $x =$

**Videyo**

**Worked Example**

$$f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2} \quad 0 < x < 1, 1 < x < \infty \quad f(1^-) = \infty \quad f(1^+) = \infty$$

$$f'(x) = \frac{1 - 2x}{(\ln x)^3} = 0$$

$$f \rightarrow \infty \quad x \rightarrow \infty$$

$$f(10^{10}) = \frac{10^{10}}{(\ln 10^{10})^2} = \frac{10^{10}}{(10 \ln 10)^2} \approx \frac{10^{10}}{23^2} > 10^7 \leftarrow \text{big}$$

Nou rele  $\frac{0}{0}$  ak  $\frac{\infty}{\infty}$  **fòm endetèmine**, paske lè nou rankontre yo nan yon limit, yo bezwen plis analiz pou detèmine si nimeratè a oswa denominatè nan kous la pou 0 oswa  $\infty$  respektivman, oswa si yo balanse epi yo rive nan kèk lòt limit fini.

**6. Pwen kritik nan graf****Pwoblèm 28: Idantifye pwen kritik yo**

Nou ap trase graf fonksyon an  $f(x) = \frac{x}{(\ln x)^2}$ . Derive li se

$$f'(x) = \frac{\ln x - 2}{(\ln x)^3}.$$

Idantifye pwen kote  $f'(x) = 0$ .



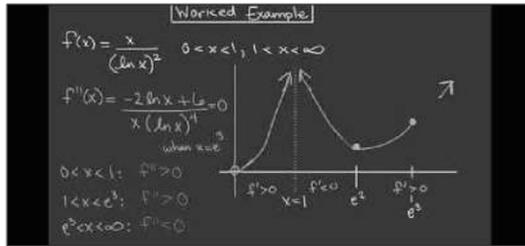
**Pwoblèm 29: Entèval kote fonksyon an ap ogmante ak diminye**

Idantifye entèval kote  $f'(x)$  pozitif ak negatif.

Entèval kote  $f' > 0$ :

Entèval kote  $f' < 0$ :

**Videyo**



**7. Trase fonksyon an**

Kounye a se tou pa w pou eseye trase kèk fonksyon. Premyèman, eseye ak pwoblèm resitasyon ki te poze nan videyo a, epi apre sa ou pral travay sou yon pwoblèm pou kont ou.

**Videyo**



**Pwoblèm 30: Trase fonksyon an**

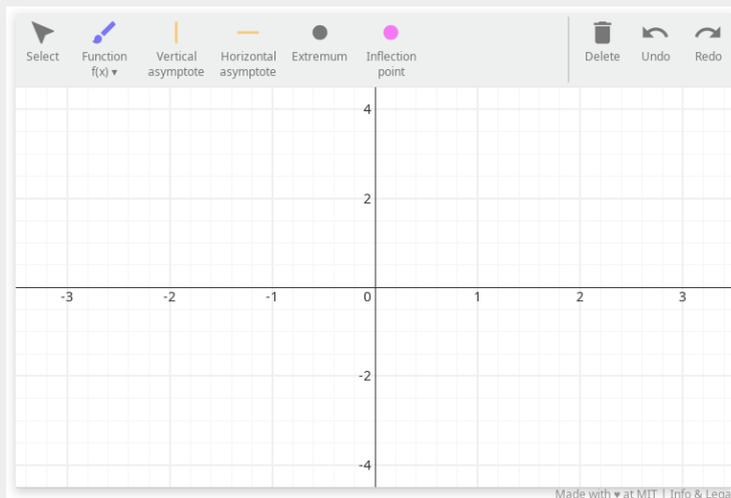
Trase fonksyon rasyonèl  $f(x)$  la, ki defini anba a.

$$f(x) = \frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} \quad (7.6)$$

$$f'(x) = \frac{-6x}{(x^2 - 1)^2} \quad (7.7)$$

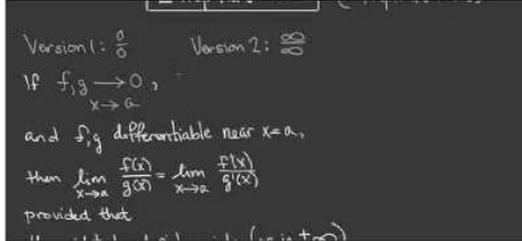
$$f''(x) = \frac{6(3x^2 + 1)}{(x^2 - 1)^3} \quad (7.8)$$

(Lokalizasyon asenptòt yo dwe egzak. Chwa fonksyon an ka kalitatif. Sèvi ak zouti pwen pou make nenpòt pwen ekstrèm ak nenpòt pwen enfleksyon.)



## 8. Règ l'Hôpital la

 Videyo



**Règ l'Hôpital la Vèsyon 1: Fòm endetèmine**  $\frac{0}{0}$

Si

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow 0 \\ g(x) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{as } x \rightarrow a,$$

epi fonksyon  $f$  ak  $g$  yo diferansyab pwòch pwen  $x = a$ , lè sa a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (7.13)$$

a kondisyon ke limit ki sou bò dwat ekwasyon an egziste oswa se  $\pm\infty$ .

**Règ l'Hôpital la Vèsyon 2: Fòm endetèmine**  $\frac{\infty}{\infty}$

Si

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \pm\infty \\ g(x) &\rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad \text{as } x \rightarrow a,$$

epi fonksyon  $f$  ak  $g$  yo diferansyab pwòch pwen  $x = a$ , lè sa a

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (7.14)$$

a kondisyon ke limit ki sou bò dwat ekwasyon an egziste oswa se  $\pm\infty$ .

Remake byen ke

- Nou ka ranplase  $a$  avèk  $a^+$  oswa  $a^-$  epi rezilta yo (vèsyon 1 ak 2) toujou valab.
- Nou ka ranplase  $a$  avèk  $\pm\infty$ , epi rezilta yo (vèsyon 1 ak 2) toujou valab.

## 9. Egzanp Limit Endetèmine

### Videyo



### Pwoblèm 31: Pratik 1

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x - \sin x}$ .



### Pwoblèm 32: Pratik 2

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2) + 4x + 30}{8x + \sqrt{x}}$ .



### Pwoblèm 33: Pratik 3

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \sin x}{\cos^2 x + 1}$ .



**Pwoblèm 34: Pratik 4**

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 5x)}{4x + 3}$ .



**10. Jistifikasyon yon ka espesyal règ l'Hospital la vèsyon 1**

Isit la nou bay yon jistifikasyon ke limit  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$  nan ka espesyal vèsyon 1 kote  $f(a) = g(a) = 0$ , epi limit ki sou bò dwat egziste.

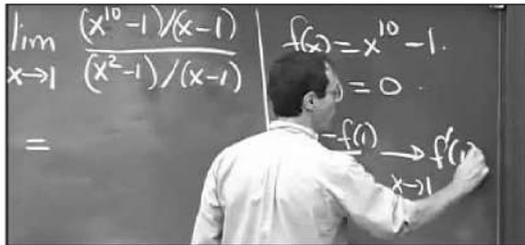
Remake ke pou  $x$  pwòch  $a$ , nou ka apwoksime  $f(x)$  ak  $g(x)$  ak apwoksimasyon lineyè yo. Sa ban nou:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{g(x)} &\approx \frac{f(a) + f'(a)\Delta x}{g(a) + g'(a)\Delta x} \\ &= \frac{f'(a)\Delta x}{g'(a)\Delta x} && \text{paske } f(a) = g(a) = 0 \\ &= \frac{f'(a)}{g'(a)} && \text{a kondisyon ke } f'(a) \text{ ak } g'(a) \\ &&& \text{egziste.} \end{aligned}$$

**Sijè pou refleksyon**

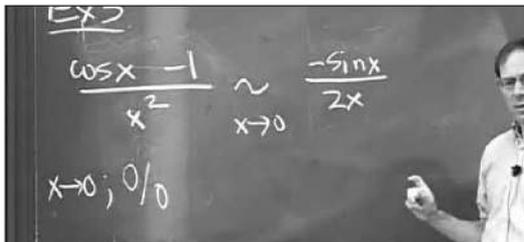
E si tou de  $f(a) = g(a) = 0$  ak  $f'(a) = g'(a) = 0$ ? Sèvi ak apwoksimasyon kwadratik la pou wè sa w jwenn.

**📺 Videyo**



## 11. Aplikasyon règ l'Hôpital la plizyè fwa

 Videyo



**Pwoblèm 35: Aplikasyon règ la plizyè fwa pratik**

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - ex}{x^3 - x^2 - x + 1}$ .



**Pwoblèm 36: Rapò eksponansyèl**

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{300x^3 + 17x}{e^x}$ .



**Pwoblèm 37: Rapò eksponansyèl 2**

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^{1000000}}{e^x}$ .



**Pwoblèm 38: To kwasans eksponansyèl kont to kwasans polinòm**

Konpare  $x^n$  ak  $e^x$  kote  $n$  se yon antye pozitif. Ki fonksyon ap grandi pi vit pandan  $x$  ap pwoche  $+\infty$ ?

- A  $x^n$     B  $e^x$     C Nou pa ka di.

**Pwoblèm 39: To kwasans logaritm**

nonb

- A  $\sqrt{x}$     B  $\ln x$     C Yo pral grandi nan menm vitès la

**12. Lòt Fòm Endetèmine yo**

Sonje ke  $\frac{0}{0}$  ak  $\frac{\infty}{\infty}$  se **fòm endetèmine**.

Gen lòt fòm endetèmine. An n eseye dekouvri kiyès yo ye.

**Pwoblèm 40: Pwodwi endetèmine 1?**

Sipoze

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad (7.34)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty. \quad (7.35)$$

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$  bay?

(Si ou pa sèten, fè yon estimasyon pwovizwa epi teste sa k ap pase lè ou multipliyè ti nonb (pozitif) ak gwo nonb (pozitif). Pa egzanp, eseye  $10^{-6} \times 10^{10}$  oswa  $10^{-10} \times 10^3$ .)

A Li pwoch zewo.    B Li pwoch 1.    C Li vrèman gwo ak pozitif.

D Li vrèman gwo ak negatif.    E Nou pa ka di.

**Pwoblèm 41: Pwodwi endetèmine 2?**

Sipoze

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty.$$

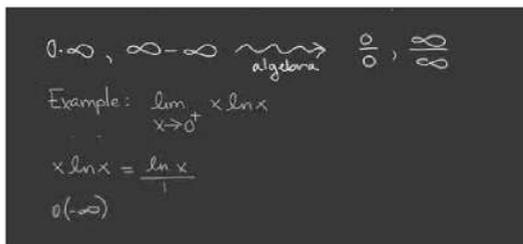
Ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x)$  bay?

(Teste sa k ap pase lè ou miltipliye gwo nonb pozitif ak gwo nonb pozitif.)

- A Li pwoch zewo.    B Li pwoch 1.    C Li vrèman gwo ak pozitif.
- D Li vrèman gwo ak negatif.    E Nou pa ka di.

**Pwoblèm 42: Diferans endetèmine?**Sipoze  $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty.$ Ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} (f(x) - g(x))$  bay?

- A Li pwoch zewo.    B Li pwoch 1.    C Li vrèman gwo ak pozitif.
- D Li vrèman gwo ak negatif.    E Nou pa ka di.

**13. Lòt Fòm Endetèmine**
 Videyo


**Pwoblèm 43: Pratik siplemantè 1**

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x}$ .

**Pwoblèm 44: Pratik siplemantè 2**

Kalkile  $\lim_{x \rightarrow \pi/2} \sec x - \tan x$ .

**14. Fòm Eksponansyèl Endetèmine****Pwoblèm 45: Eksponansyèl Endetèmine 1?**

**Fòm endetèmine** ki pi difisil yo se sa yo ki gen ladan yo ekspozan.

Sipoze

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 1 \quad (7.40)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty. \quad (7.41)$$

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  bay?

(Si ou pa sèten, eseye youn nan sa yo. Premyeman, reflechi sou sa chak pati ap eseye fè nan rezilta jeneral la – èske yo ap travay ansanm oswa youn kont lòt? Oswa, eseye entwodui kèk nonb:  $1.0001^{10^6}$ ,  $.9995^{10^6}$ .)

A Li pwoch zewo.  B Li pwoch 1.  C Li vrèman gwo ak pozitif.

D Li vrèman gwo ak negatif.  E Nou pa ka di.

**Pwoblèm 46: Eksponansyèl Endetèmine 2?**

Sipoze ke  $f(x) \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad (7.42)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = +\infty. \quad (7.43)$$

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  bay?

(Si ou pa sèten, eseye youn nan sa yo. Premyèman, reflechi sou sa chak pati ap eseye fè nan rezilta jeneral la – èske yo ap travay ansanm oswa youn kont lòt? Oswa, eseye entwodui kèk nonb:  $(10^{-10})^{10^{10}}$ .)

A Li pwoch zewo.  B Li pwoch 1.  C Li vrèman gwo ak pozitif.

D Li vrèman gwo ak negatif.  E Nou pa ka di.

**Pwoblèm 47: Eksponansyèl Endetèmine 3?**

Fòm endetèmine ki pi difisil yo se sa ki gen ekspozan ladan yo .

Sipoze

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = +\infty \quad (7.44)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad (7.45)$$

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  bay?

A Li pwoch zewo.  B Li pwoch 1.  C Li vrèman gwo ak pozitif.

D Li vrèman gwo ak negatif.  E Nou pa ka di.

**Pwoblèm 48: Ekspansyèl Endetèmine 4?**

Sipoze ke  $f(x) \geq 0$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \quad (7.46)$$

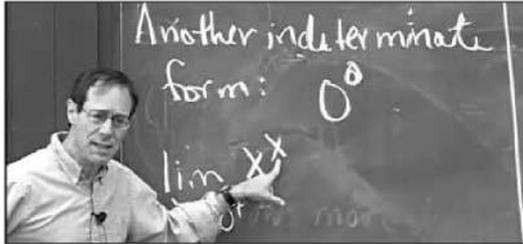
$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0. \quad (7.47)$$

Ki sa  $\lim_{x \rightarrow a} f(x)^{g(x)}$  bay?

- A) Li pwoch zewo.    B) Li pwoch 1.    C) Li vrèman gwo ak pozitif.  
 D) Li vrèman gwo ak negatif.    E) Nou pa ka di.

**15. Tretman lòt fòm ekspansyèl endetèmine**

Fòm  $0^0$ ,  $\infty^0$ , ak  $1^\infty$  yo tout se fòm endetèmine. Pou aplike règ l'Hôpital la, nou dwe re-aranje ekspresyon sa yo pou yo sanble ak  $\frac{0}{0}$  oswa  $\frac{\infty}{\infty}$ . Trik la isit la se chanje l an baz  $e$ .

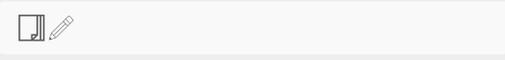
**📺 Videyo****Pwoblèm 49: Pratik siplemantè**

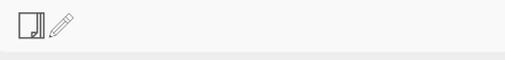
Kalkile  $\lim_{x \rightarrow \pi/2^-} \left( \frac{2x}{\pi} \right)^{\tan x}$ .

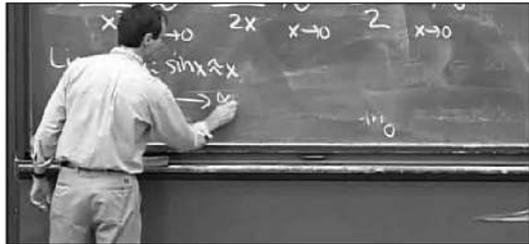


**Pwoblèm 50: jwenn e**

Kalkile limit sa yo.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n =$$


$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n}\right)^n =$$


**16. Gade avan ou itilize règ l'Hospital la**
 Videyo


## 17. Pwoblèm eskis fonksyon

### Pwoblèm 51: Plis travay sou eskis graf

Trase graf (eskise)  $\frac{e^x}{x}$  sou entèval  $-\infty < x < \infty$ .

(Desen fonksyon an ka fèt kalitatifman. Make nenpòt asenptòt, pwen kritik, ak pwen enfleksyon yo kalitatifman.)

## 18. Rezime

### Eskis yon Koub

#### Estrateji Jeneral

1. Trase
  - diskontinite (sitou lenfini)
  - pwen ekstrèm (oswa  $x \rightarrow \pm\infty$ )
  - pwen fasil ( $x = 0$ , oswa  $y = 0$ ) (Sa a opsyonèl.)
2. Trase pwen kritik yo ak valè yo. (Rezoud  $f'(x) = 0$  oswa ki pa defini.)
3. Deside si  $f' < 0$  oubyen  $f' > 0$  sou chak entèval ant pwen ekstrèm yo, pwen kritik yo, ak diskontinite yo. (Dwe konsistan avèk etap 1 ak 2.)

4. Idantifye kote  $f'' < 0$  ak  $f'' > 0$  (konkav desann ak konkav moute).  
Idantifye pwen d infleksyon yo.
5. Konbine nan yon graf.

### Règ l'Hôpital la

#### Règ l'Hôpital la Vèsyon 1: Fòm endetèmine $\frac{0}{0}$

Si

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow 0 \\ g(x) &\rightarrow 0 \end{aligned} \quad \text{as } x \rightarrow a,$$

epi fonksyon  $f$  ak  $g$  yo diferansyab pwòch pwen  $x = a$ , lè sa a limit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (7.63)$$

a kondisyon ke limit a-dwat la egziste oswa li se  $\pm\infty$ .

#### Règ l'Hôpital la Vèsyon 2: Fòm endetèmine $\frac{\infty}{\infty}$

Si

$$\begin{aligned} f(x) &\rightarrow \pm\infty \\ g(x) &\rightarrow \pm\infty \end{aligned} \quad \text{as } x \rightarrow a,$$

epi fonksyon  $f$  ak  $g$  yo diferansyab pwòch pwen  $x = a$ , lè sa a limit

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \quad (7.64)$$

a kondisyon ke limit a-dwat la egziste oswa li se  $\pm\infty$ .

Remake sa yo

- Nou ka ranplase  $a$  ak  $a^+$  oswa  $a^-$  epi rezilta yo (vèsyon 1 ak 2) ap toujou valab.
- Nou ka ranplase  $a$  ak  $\pm\infty$ , epi rezilta yo (vèsyon 1 ak 2) ap toujou valab.

### Lèt fòm endetèmine

Lòt fòm endetèmine tankou  $0 \cdot \infty$ ,  $\infty - \infty$ ,  $0^0$ ,  $1^\infty$ , ak  $\infty^0$  dwe re-aranje pou yo vin nan fòm  $0/0$  oswa  $\infty/\infty$  nan sousi pou aplike règ l'Hôpital la.

## Solisyon yo

### Pwoblèm 25: Revizyon: Evalye limit a-dwa ak limit a-gòch

Nou wè ke

$$f(-2^+) = \frac{-2 + 1}{-2^+ + 2} = \frac{-1}{0^+} = -\infty \quad (7.4)$$

$$f(-2^-) = \frac{-2 + 1}{-2^- + 2} = \frac{-1}{0^-} = +\infty. \quad (7.5)$$

### Pwoblèm 26: Egzanp pratik: Etap 1

Fonksyon an pa defini nan  $x = 1$ . Limit bò dwat ak limit bò gòch tou de ap pwoche  $+\infty$ .

### Pwoblèm 27: Egzanp rezoud: idantifye pwen ekstrèm yo

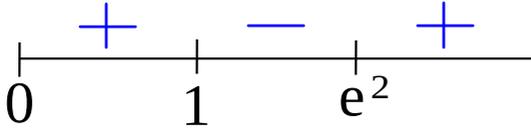
Fonksyon  $\ln x$  sèlman defini pou  $x > 0$ , ki donk pwen ekstrèm gòch la se  $x = 0$ . Pwen ekstrèm dwat la se  $\infty$ .

### Pwoblèm 28: Idantifye pwen kritik yo

Nou rezoud  $f'(x) = 0$ , epi nou jwenn ke fonksyon an egal a zewo sèlman lè nimeratè a egal a zewo. Kidonk, nou verifye sa nan de entèval kote  $f'(x)$  defini. Nimeratè a pa janm egal a zewo sou entèval  $0 < x < 1$ . Li egal a zewo sou entèval  $1 < x < \infty$  lè  $x = e^2$ . Ki donk, gen yon sèl pwen kritik nan  $x = e^2$ , ke nou atann se yon minimòm lokal baze sou konpòtman fonksyon an pwòch 1 ak  $\infty$ .

**Pwoblèm 29: Entèval kote fonksyon an ap ogmante ak diminye**

Nou verifiye siy  $f'(x) = \frac{\ln x - 2}{(\ln x)^3}$  sou tout entèval ki genyen ant pwen ekstrèm yo, diskontinite yo, ak pwen kritik yo.



- Sou entèval  $0 < x < 1$ , nimeratè a negatif, epi denominatè a negatif, ki donk derive a pozitif, sa ki vle di fonksyon an ap ogmante (kwat).
- Sou entèval  $1 < x < e^2$ , nimeratè a negatif, epi denominatè a pozitif, ki donk derive a negatif, sa ki vle di fonksyon an ap diminye (dekwat).
- Sou entèval  $e^2 < x < \infty$ , nimeratè a pozitif, epi denominatè a pozitif, ki donk derive a pozitif, sa ki vle di fonksyon an ap ogmante (kwat) sou entèval sa a.

Ki donk  $f' > 0$  sou entèval  $(0, 1)$ ,  $(e^2, \infty)$ , ak  $f' < 0$  sou entèval  $(1, e^2)$ .

**Pwoblèm 30: Trase fonksyon an**

Premyèman, nou sonje ke fonksyon sa a pa defini lè  $x = \pm 1$ . Nou kalkile limit yo epi jwenn :

$$f(1^+) = \frac{2+1}{(1^+-1)(1+1)} = \frac{3}{0^+ \cdot 2} \rightarrow \infty \quad (7.9)$$

$$f(1^-) = \frac{3}{0^- \cdot 2} \rightarrow -\infty \quad (7.10)$$

$$f(-1^+) = \frac{3}{0^+ \cdot -2} \rightarrow -\infty \quad (7.11)$$

$$f(-1^-) = \frac{3}{0^- \cdot -2} \rightarrow \infty \quad (7.12)$$

ke nou gen de asenptòt vètikal:  $x = 1$  ak  $x = -1$ .

Aprè sa, an n gade nan pwen ekstrèm yo  $\pm\infty$ :

$$\frac{2x^2 + 1}{x^2 - 1} = \frac{2 + 1/x^2}{1 - 1/x^2} \xrightarrow{x \rightarrow \pm\infty} 2.$$

Sa fè nou konnen fonksyon nou an gen yon asenptòt orizontal  $y = 2$ .

Nou obsève tou ke sou entèval definisyon yo,  $f(x)$  pa janm 0, ki donk  $f$  pap janm koupe aks- $x$  la.

Aprè sa, nou chèche pwen kritik yo. Gen yon pwen kritik nan  $x = 0$ . Kote  $f'$  la pa defini koresponn ak asenptòt vètikal yo. Pwen sa a dwe yon maksimòm lokal, ki kapab valide lè n itilize tès premye derive a.

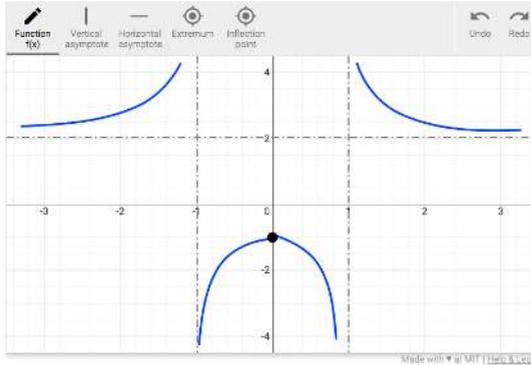
Finalman, nou verifiye epi wè ke dezyèm derive a pa janm egal a zewo sou domèn definisyon li, ki donk la, pa gen pwen enfleksyon. Nou kontinye verifiye entèval yo ant asenptòt vètikal yo pou idantifye konkavite nan chak rejyon:

$$-\infty < x < -1 \quad f'' > 0 \quad \text{konkav anlè}$$

$$-1 < x < 1 \quad f'' < 0 \quad \text{konkav anba}$$

$$1 < x < \infty \quad f'' > 0 \quad \text{konkav anlè}$$

Lè nou mete tout sa yo ansanm, nou jwenn yon desen (eskis) fonksyon an.

**Pwoblèm 31: Pratik 1**

Limit sa a se yon limit endetèmine kòm li nan fòm  $\frac{0}{0}$ .

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x - 1}{x - \sin x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{1 - \cos x} = \infty \quad (7.15)$$

**Pwoblèm 32: Pratik 2**

Limit sa a sou fòm  $\frac{\infty}{\infty}$ , kidonk nou ka aplike règ l'Hôpital la.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2) + 4x + 30}{8x + \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{2}{x} + 4}{8 + \frac{1}{2\sqrt{x}}} = \frac{1}{2}. \quad (7.16)$$

**Pwoblèm 33: Pratik 3**

Limit sa a sou fòm  $\frac{0}{2}$  ki donk nou pa bezwen aplike règ l'Hôpital la, limit sa a se 0.

**Pwoblèm 34: Pratik 4**

Limit sa a sou fòm  $\frac{\infty}{\infty}$ , ki donk nou ka aplike règ l'Hôpital la.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(e^x + 5x)}{4x + 3} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x + 5}{e^x + 5x}}{4} \quad (7.17)$$

Limit sa a toujou nan fòm  $\frac{\infty}{\infty}$  ki donk nou ka aplike règ l'Hôpital la ankò! (Nou pral montre w aplikasyon repete règ l'Hôpital la nan yon fason sistematik nan swit dokiman an.)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{e^x + 5}{e^x + 5x}}{4} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{e^x}{e^x + 5} \quad (7.18)$$

METÒD 1: Aplike règ l'Hôpital la yon lòt fwa ankò.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{e^x}{e^x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{e^x}{e^x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} = \frac{1}{4} \quad (7.19)$$

METÒD 2: Manipilasyon aljebrik:

$$\frac{e^x}{e^x + 5} = \frac{1}{1 + 5e^{-x}} \quad (7.20)$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{e^x}{e^x + 5} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4} \frac{1}{1 + 5e^{-x}} = \frac{1}{4} \quad (7.21)$$

**Pwoblèm 35: Aplikasyon règ la plizyè fwa pratik**

Limit sa a nan fòm  $\frac{0}{0}$ , ki donk nou ka aplike règ l'Hôpital la.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - ex}{x^3 - x^2 - x + 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{3x^2 - 2x - 1} \quad (7.22)$$

Limit sa a toujou nan fòm  $\frac{0}{0}$ , kidonk nou aplike règ l'Hôpital la ankò.

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x - e}{3x^2 - 2x - 1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{e^x}{6x - 2} = \frac{e}{4}. \quad (7.23)$$

**Pwoblèm 36: Rapò eksponansyèl**

Limit sa a se yon fòm endetèmine nan tip  $\frac{\infty}{\infty}$ . Lè n aplike règ l'Hôpital la de manyè repete (plizyè fwa), nou jwenn:

$$\frac{300x^3 + 17x}{e^x} \stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{900x^2 + 17}{e^x} \quad (7.24)$$

$$\stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{1800x}{e^x} \quad (7.25)$$

$$\stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{1800}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (7.26)$$

Sa di nou ke  $e^x$  ap grandi pou ale nan lenfini pi vit pase  $300x^3 + 17x$ .

**Pwoblèm 37: Rapò eksponansyèl 2**

Limit sa a se yon fòm endetèmine nan tip  $\frac{\infty}{\infty}$ . Lè n aplike règ l'Hôpital la de manyè repete (plizyè fwa), nou jwenn:

$$\frac{x^{1000000}}{e^x} \stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{1000000x^{999999}}{e^x} \quad (7.27)$$

$$\stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{1000000 \cdot 999999x^{999998}}{e^x} \quad (7.28)$$

$$\vdots \quad (7.29)$$

$$\stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{10^6!}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} = 0 \quad (7.30)$$

Sa di nou ke  $e^x$  ap grandi pou ale nan lenfini pi vit pase  $x^{10^6}$ .

**Pwoblèm 38: To kwasans eksponansyèl kont to kwasans polinòm**

Pwoblèm anvan an montre nou ke nou ka aplike l'Hôpital nan rapò de fonksyon sa yo pou jwenn sa

$$\frac{x^n}{e^x} \stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \dots \stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{n!}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} = 0. \quad (7.31)$$

Sa montre ke  $e^x$  grandi pi vit pase  $x^n$  pou nenpòt  $n$ . An patikilye, sa montre ke  $e^x$  ap grandi pi vit pase nenpòt polinòm.

**B**

**Pwoblèm 39: To kwasans logaritm**

Rapò  $\frac{\sqrt[n]{x}}{\ln x}$  se yon endetèmine nan fòm  $\frac{\infty}{\infty}$  pandan  $x$  ap pwoche  $\infty$ .

$$\frac{\sqrt[n]{x}}{\ln x} \stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{x^{\frac{1-n}{n}}/n}{1/x} \quad (7.32)$$

$$= \frac{x^{1/n}}{n} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty \quad (7.33)$$

Sa fè nou konnen ke nimeratè a ap grandi pi vit pase denominatè a, ki donk  $\sqrt[n]{x}$  grandi pi vit pase  $\ln x$  pou nenpòt nonb antye pozitif  $n$ .

□

**Pwoblèm 40: Pwodwi endetèmine 1?**

Nou pa ka di! Sa a se yon fòm endetèmine. Pwodwi yon gwo nonb ak yon ti nonb kapab gwo, piti, oswa nenpòt bagay ant yo de a.

**Pwoblèm 41: Pwodwi endetèmine 2?**

Lenfini miltipliye ak lenfini se toujou lenfini. Sa a se pa yon fòm endetèmine. Limit sa a pral vrèman gwo ak pozitif.

**Pwoblèm 42: Diferans endetèmine?**

Lenfini mwens lenfini endetèmine! Li ta ka gwo ak pozitif:  $10^{100} - 10^{12}$ , gwo ak negatif:  $10^{100} - 10^{10000000}$ , oswa fini.

**Pwoblèm 43: Pratik siplemantè 1**

Limit sa a nan fòm  $0 \cdot \infty$ , ki donk nou ka re-aranje epi aplike règ l'Hôpital la.

$$xe^{1/x} = \frac{e^{1/x}}{1/x} \quad (7.36)$$

$$= \frac{e^u}{u} \quad \text{remake byen ke } u \rightarrow \infty \text{ as } x \rightarrow 0^+, \quad (7.37)$$

$$\stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} e^u \xrightarrow{u \rightarrow \infty} \infty$$

**Pwoblèm 44: Pratik siplemantè 2**

Limit sa a nan fòm  $\infty - \infty$ , ki donk nou ka re-aranje epi aplike règ l'Hôpital la.

$$\sec x - \tan x = \frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} \quad (7.38)$$

Lè  $x = \pi/2$ , sa a se yon fòm endetèmine  $0/0$ , ki donk nou ka aplike règ l'Hôpital la.

$$\frac{1 - \sin(x)}{\cos(x)} \stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{-\cos(x)}{-\sin(x)} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2} 0 \quad (7.39)$$

**Pwoblèm 45: Ekspansyèl Endetèmine 1?**

Nou pa ka di! Si ou eseye nonb yo nou te sijere a, ou wè ke nou ka jwenn valè ki trè piti ak trè gwo.

Yon lòt fason yo reflechi sou sa a se pran logaritm fonksyon sa a, epi nou jwenn

$\ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \ln(f(x)) = \frac{\ln(f(x))}{1/g(x)}$ , ki sou fòm  $\frac{0}{0}$ , ki se yon fòm endetèmine. Ki donk, fonksyon orijinal la se

$$f(x)^{g(x)} = e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{\frac{0}{0}}$$

nan fòm endetèmine.

**Pwoblèm 46: Ekspansyèl Endetèmine 2?**

Nonpòt nonb ki pwòch 0 lè yo elve l a yon gwo puisans ap vin pi piti, sa vle di menm pi pwòch zewo Sa a pa yon fòm endetèmine. Limit ekspozan sa a se 0.

Yon lòt fason pou reflechi sou sa se pran logaritm fonksyon sa a, epi nou jwenn

$\ln(f(x)^{g(x)}) = g(x) \ln(f(x))$ , ki se yon fòm  $\infty \cdot (-\infty)$  ki pa yon fòm endetèmine e k ap pwoche  $-\infty$ . Lè sa a, fonksyon orijinal la ap pwoche 0 pandan  $x$  ap pwoche  $a$ :

$$f^g = e^{g \ln f} \xrightarrow{x \rightarrow a} e^{-\infty}.$$

**Pwoblèm 47: Eksponansyèl Endetèmine 3?**

Sa a se yon fòm endetèmine. Sa a difisil paske sanble limit la ap pwoche 1 pou plizyè nonb. Yon fason pi fasil pou eksplore sa se chanje l an baz  $e$

$$: e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \ln(f(x))} = e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}. \text{ Ekspozan an nan fòm } \frac{\infty}{\pm\infty}$$

pwòch  $x = a$ . Ki donk limit fonksyon orijinal la  $e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$  se nan yon fòm endetèmine.

**Pwoblèm 48: Eksponansyèl Endetèmine 4?**

Sa a se yon fòm endetèmine. Yon fason pi fasil pou eksplore sa se chanje l

$$\text{an baz } e: e^{\ln(f(x)^{g(x)})} = e^{g(x) \ln(f(x))} = e^{\frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}. \text{ Ekspozan an nan fòm } \frac{-\infty}{\pm\infty}$$

pwòch  $x = a$ . Ki donk limit fonksyon orijinal la  $e^{\lim_{x \rightarrow a} \frac{\ln f(x)}{1/g(x)}}$  se nan yon fòm endetèmine.

**Pwoblèm 49: Pratik siplemantè**

Sa a se endetèmine nan fòm  $1^\infty$ . Pran logaritm la epi fè aranjman pou yo gen fòm estanda endetèmine:

$$\ln \left[ \left( \frac{2x}{\pi} \right)^{\tan x} \right] = \tan x (\ln 2x - \ln \pi) = \frac{(\ln 2x - \ln \pi) \sin x}{\cos x}.$$

Koulye a, aplike règ l'Hôpital la.

$$\frac{(\ln 2x - \ln \pi) \sin x}{\cos x} \stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \frac{(1/x) \sin x + (\ln 2x - \ln \pi) \cos x}{-\sin x} \xrightarrow{x \rightarrow \pi/2^-} -2/\pi$$

Pou evalye limit la, nou pran ekspozan limit rezilta ki anwo a, epi nou jwenn  $e^{-2/\pi}$ .

**Pwoblèm 50: jwenn e**

Sa yo se endetèmine nan fòm  $1^\infty$ . Pran logaritm la epi fè aranjman pou yo gen fòm estanda endetèmine:

$$\ln \left[ \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n \right] = n \ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right) \quad (7.49)$$

$$= \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \quad (7.50)$$

Ranplase  $u = \frac{1}{n}$ , lè sa a  $u \rightarrow 0$  pandan  $n \rightarrow \infty$ . Lè sa a nou kapab aplike règ l'Hôpital la!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 + \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1+u)}{u} \quad (7.51)$$

$$\stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+u}}{1} = 1 \quad (7.52)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 + \frac{1}{n} \right)^n = e^1 = e \quad (7.53)$$

Koulye a, an n fè lòt vèsyon an.

$$\ln \left[ \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n \right] = n \ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right) \quad (7.54)$$

$$= \frac{\ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} \quad (7.55)$$

Ranplase  $u = \frac{1}{n}$ , lè sa a  $u \rightarrow 0$  pandan  $n \rightarrow \infty$ . Lè sa a nou kapab aplike règ l'Hôpital la!

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln \left( 1 - \frac{1}{n} \right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\ln(1-u)}{u} \quad (7.56)$$

$$\stackrel{\text{l'Hop}}{\sim} \lim_{u \rightarrow 0} \frac{\frac{-1}{1-u}}{1} = -1 \quad (7.57)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left( 1 - \frac{1}{n} \right)^n = e^{-1} = 1/e \quad (7.58)$$

**Pwoblèm 51: Plis travay sou eskis graf**

Premyèman, nou remake ke fonksyon sa a pa defini lè  $x = 0$ . La a gen yon asenptòt vètikal epi

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{e^x}{x} = \infty \quad (7.59)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{e^x}{x} = -\infty \quad (7.60)$$

Aprè sa, nou kalkile konpòtman fonksyon an nan pwen ekstrèm yo  $\pm\infty$ . Nan  $+\infty$ ,  $\frac{e^x}{x}$  se yon fòm endetèmine  $\frac{\infty}{\infty}$ , kidonk nou ka aplike règ l'Hôpital la.

$$\frac{e^x}{x} \underset{\text{L'Hop}}{\sim} \frac{e^x}{1} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} \infty.$$

Nan  $-\infty$ ,  $\frac{e^x}{x}$  se yon fòm endetèmine  $\frac{0}{-\infty}$ , k ap pwoche 0. (Sonje byen, sa a pa yon fòm endetèmine.)

Aprè sa, nou kalkile derive yo.

$$\frac{d}{dx} \left( \frac{e^x}{x} \right) = (x-1) \frac{e^x}{x^2} \quad (7.61)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} \left( \frac{e^x}{x} \right) = (x^2 - 2x + 2) \frac{e^x}{x^3} \quad (7.62)$$

Gen yon pwen kritik nan  $x = 1$ . Pwiske  $e^x > 0$  pou tout  $x$ , sa vle di derive a negatif pou  $0 < x < 1$  ak  $x < 0$  epi li pozitif pou  $x > 1$ . Dapre premye tès derive a, pwen kritik sa a se yon minimòm lokal.

Pa gen okenn pwen d enfleksyon. Fonksyon an konvèks  $x > 0$  epi konkav lè  $x < 0$ .

Lè nou mete tout enfòmasyon sa yo ansanm, nou jwenn yon eskis pou fonksyon an.



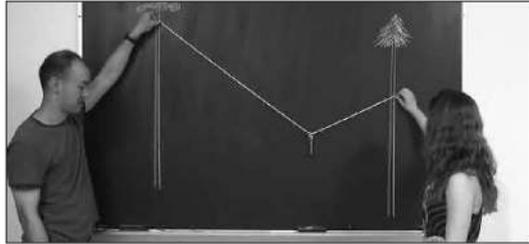
---

# Optimizasyon: pwoblèm maksimòm/minimòm

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Optimizasyon: Pwoblèm Maks ak Min

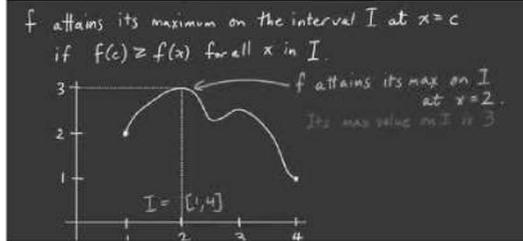
Objektif yo

Nan fen sekans sa a, epi aprè kèk ti pratik ou ta dwe kapab:

- Detèmine maksimòm ak minimòm fonksyon sou entèval yo.
- Fòme (konfigire) ak rezoud pwoblèm d optimizasyon.

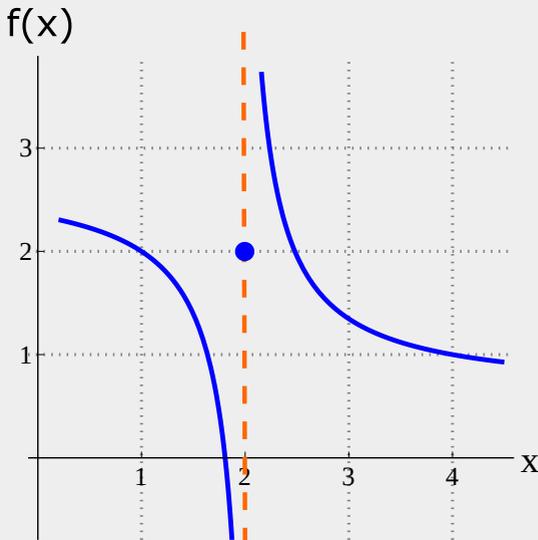
### 3. Preliminè

 Videyo



### 4. Egzèsis Preliminè yo

Pwoblèm 52: Atenn ekstrèm yo?

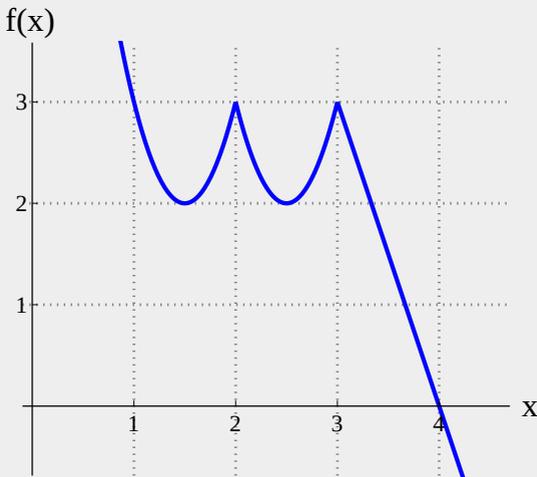


Dapre graf ki anwo a, èske  $f$  atenn yon maksimòm sou entèval  $[1, 4]$ ?

A Wi  B Non

Dapre graf ki anwo a, èske  $f$  atenn yon minimòm sou entèval  $[1, 4]$ ?

A Wi  B Non

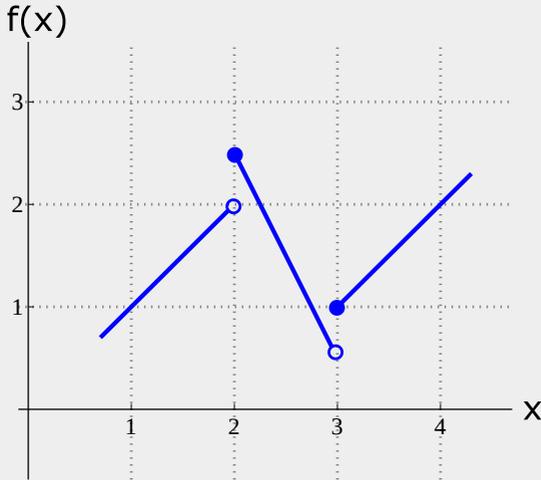
**Pwoblèm 53: Atenn ekstrèm yo? 2**

Dapre graf ki anwo a, èske  $f$  atenn yon maksimòm sou entèval  $[1, 4]$ ?

A Wi  B Non

Dapre graf ki anwo a, èske  $f$  atenn yon minimòm sou entèval  $[1, 4]$ ?

A Wi  B Non

**Pwoblèm 54: Atenn ekstrèm yo? 3**

Dapre graf ki anwo a, èske  $f$  atenn yon maksimòm sou entèval  $[1, 4]$ ?

A Wi  B Non

Dapre graf ki anwo a, èske  $f$  atenn yon minimòm sou entèval  $[1, 4]$ ?

A Wi  B Non

**Pwoblèm 55: Ki sa yo gen an komen?**

Fonksyon ki pa atenn ni maksimòm ni minimòm yo gen pwoblèm. Dapre egzanp ou te wè yo, ki defo fonksyon sa yo te genyen ki te anpeche yo atenn valè maksimòm oswa minimòm yo?

A Yo pa t diferansyab  B Yo pa t kontini

**5. Teyorèm Valè Ekstrèm**

Si  $f$  kontini sou yon entèval fèmen  $[a, b]$ , lè sa a gen pwen kote  $f$  atenn valè maksimòm li ak minimòm li sou  $[a, b]$ .

Li enpòtan pou remake ke sa garanti sèlman si entèval la se yon entèval fèmen. Nou pral pale sou entèval enfini ak entèval ouvè pi devan.

Prèv Teyorèm sa a depase objektif kou sa a, ki donk nou p ap prezante li isit la.

---

## 6. Jwenn Ekstrèmòm yo

### Pwoblèm 56: Pwen Kritik yo

An n raple tèt nou sa pwen kritik yo vle di egzakteman. Vrè oswa fo: Pwen kritik yon fonksyon  $f$  yo se sèlman pwen kote derive a  $f'$  egal a zewo.

A Vrè  B Fo

### Pwoblèm 57: Ki kote ekstremòm yo ka ye?

An n sipoze  $f$  se yon fonksyon kontini sou entèval  $[0, 10]$ .

Sipoze ke  $f$  pa gen yon pwen kritik nan  $x = 3$ . Èske  $f$  ka rive atenn minimòm oswa maksimòm li sou  $[0, 10]$  nan  $x = 3$ ?

A Wi  B Non

Èske  $f$  ka rive atenn minimòm oswa maksimòm li sou  $[0, 10]$  nan  $x = 10$ ?

A Wi  B Non

---

## 7. Kandida pou Ekstrèmòm yo

Nou vle jwenn maksimòm oswa minimòm yon fonksyon kontini sou yon entèval fèmen. Teyorèm Valè Ekstrèm garanti ke yo pral atenn. Maksimòm ak Minimòm yo ka sèlman atenn nan pwen kritik oswa nan pwen ekstrèm yo, ki donk nou bezwen pase sou tout kandida sa yo pou jwenn Maksimòm ak Minimòm yo nan  $f$ .

Nou pral fè ansanm yon egzanp!!

### Pwoblèm 58: Ekstrèmòm Egzanp 1

Nou pral jwenn valè maksimòm ak minimòm fonksyon

$$f(x) = x^3 - 6x^2 - 15x + 10 \text{ sou entèval } [-4, 6].$$

Premyèman, èske nou garanti ke  $f$  pral atenn maksimòm ak minimòm li sou entèval sa a?

A Wi  B Non

**Pwoblèm 59: Pwen kritik**

Jwenn tout kowòdone  $x$  – pwen kritik  $f$  la sou entèval  $[-4, 6]$ .

**Pwoblèm 60: Lòt kandida pou Ekstrèmòm yo**

Anplis de pwen kritik, ki lòt kowòdone  $x$  – nou bezwen tcheke?

**Pwoblèm 61: Mete yo ansanm**

Teyorèm Valè Ekstrèm nan garanti ke  $f$  dwe atenn maksimòm li ak minimòm li sou  $[-4, 6]$ , epi kounye a nou gen lis konplè kandida yo kote  $f$  ka atenn valè sa yo - pwen kritik  $f$ , ak de pwen ekstrèm yo. Bagay ki pi fasil pou fè kounye a se jis entwodui yo tout nan  $f$  epi chèche konnen kilès ki bay pi gwo valè  $f$ , ak kilès ladan yo ki bay pi piti valè  $f$ .

Ki kote maksimòm ak minimòm yo atenn, e ki sa yo ye?

( Si gen plis pase yon valè  $x$  kote yo rive jwenn valè maksimòm oswa minimòm, separe ak vigil; e.g. 1, 3.5 .)

Valè maksimòm lan atenn nan  $x =$



Valè maksimòm  $f$  sou entèval  $[-4, 6]$  se



Valè minimòm lan atenn nan  $x =$



Valè minimòm  $f$  sou entèval  $[-4, 6]$  se



## 8. Yon lòt Egzanp

### Pwoblèm 62: Ekstremòm egzanp 2

Nou pral chache jwenn valè maksimòm ak minimòm fonksyon an

$$g(x) = (3/2)x^{2/3} + x + 1 \text{ sou entèval } [-2, 1].$$

Èske nou garanti ke  $g$  pral atenn maksimòm ak minimòm li sou entèval sa a?

A Wi  B Non

### Pwoblèm 63: Pwen kritik

Jwenn tout kowòdone  $x$  – pwen kritik  $g$  nan entèval yo bay la.



### Pwoblèm 64: Repons Final

Anplis de pwen kritik ou jwenn yo, nou bezwen tcheke tou pwen ekstrèm yo sou entèval la. Koulè a, nou gen lis konplè kandida yo kote  $g$  ta ka atenn maksimòm oswa minimòm li sou entèval  $[-2, 1]$ .

Nan ki kowòdone- $x$  maksimòm ak minimòm yo rive atenn, e ki valè fonksyon an genyen la?

Valè maksimòm nan atenn nan  $x =$

Valè maksimòm  $g$  sou entèval  $[-2, 1]$  se

Valè minimòm nan atenn nan  $x =$

Valè minimòm  $g$  sou entèval  $[-2, 1]$  se

## 9. Kesyon Revizyon

### Pwoblèm 65: Pa gen Pwen Kritik

Si  $f$  se yon fonksyon kontini sou entèval  $[1, 5]$  men li pa gen okenn pwen kritik nan entèval la, kisa ki ka di sou  $f$ ?

- A  $f$  pa atenn maksimòm oswa minimòm li sou  $[1, 5]$
- B  $f$  ta ka atenn maksimòm li oswa minimòm li sou  $[1, 5]$ , oswa li ta ka pa
- C  $f$  atenn maksimòm li nan  $x = 1$  ak minimòm nan  $x = 5$ , oswa vise vèsa
- D Okenn nan sa ki anwo yo

### Pwoblèm 66: Yon pwen kritik

Vrè oswa fo: Si  $f$  se yon fonksyon kontini sou  $[1, 5]$  epi sèl pwen kritik pou  $f$  nan entèval la se nan  $x = 3$ , lè sa a  $f$  dwe atenn swa maksimòm li oswa minimòm li nan entèval la nan  $x = 3$ .

- A Vrè  B Fo

## 10. Lòt entèval yo

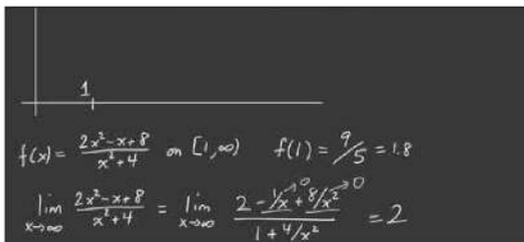
### Pwoblèm 67: Jwenn Ekstrèmòm nan Diferan Entèval yo

An poze  $f(x) = \frac{1}{x} + \sin x$ .

Sou kilès nan entèval sa yo li garanti ke  $f$  pral atenn maksimòm ak minimòm li yo? Chwazi tout sa ki aplikab.

- A  $[-12, -3]$   B  $(-2, -1)$   C  $[-\pi, \pi]$   D  $[\pi, 2\pi]$   E  $[5, \infty)$

 Videyo



**Pwoblèm 68: Ekstremòm egzanp 3**

Nou pral jwenn valè maksimòm ak minimòm fonksyon an  $g(x) = \frac{x^2}{2x^3 + 1}$  sou entèval  $[0.5, \infty)$ .

Premyèman, nou pral detèmine konpòtman fonksyon an nan pwen ekstèm yo. Ki sa ki  $g(0.5)$ ?

Ki sa ki  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x)$ ?

$g(0.5) =$

$\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) =$

**Pwoblèm 69: Egzanp 3 swit**

Kounye a, an n detèmine sa k ap pase anndan entèval la! Sonje

$g(x) = \frac{x^2}{2x^3 + 1}$  sou entèval  $[0.5, \infty)$ .

Jwenn tout kowòdone  $x$  — yo ki se pwen kritik pou  $g$  nan entèval yo bay la.



**Pwoblèm 70: Repons Final**

Liste tout kowòdone  $x$ — yo kote  $g(x) = \frac{x^2}{2x^3 + 1}$  rive atenn valè maksimòm li ak minimòm li sou entèval  $[0.5, \infty)$ .

Valè maksimòm nan rive atenn nan  $x =$

Valè minimòm nan rive atenn nan  $x =$

**Pwoblèm 71: Pwoblèm modifye**

Ann chanje entèval la yon ti kras. Liste tout kowòdone  $x$ — yo kote  $g(x) = \frac{x^2}{2x^3 + 1}$  rive atenn valè maksimòm ak minimòm li sou entèval  $[0, \infty)$ .

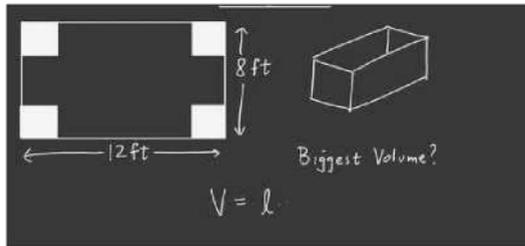
(Si gen plis pase youn, separe yo ak yon vigil; e.g pi/2 , 0.3 . Si pa gen okenn, ekri okenn.)

Valè maksimòm nan rive atenn lè  $x =$

Valè minimòm nan rive atenn lè  $x =$

**11. Pwoblèm d Optimizasyon**

 Videyo



### Pwoblèm 72: Volim

Apati videyo a, ki fòmil pou volim  $V(x)$  nan bwat la an tèm de  $x$ ?

(Sonje itilize  $*$  pou multiplikasyon;  $/$  pou divizyon;  $\wedge$  pou eksponansyasyon.)

$V(x) =$

### Pwoblèm 73: Entèval la

Ki pwen ekstrèm goch la, sou entèval valè posib pou  $x$ ?

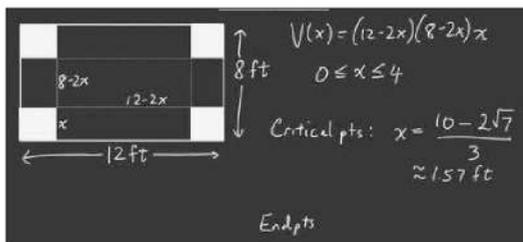
Ki pwen ekstrèm dwat la, sou entèval valè posib pou  $x$ ?

### Pwoblèm 74: Pwen kritik

Jwenn kowòdone  $x$  — yo pou tout pwen kritik nan  $V(x)$  ki nan entèval d enterè nou an.

(Si ou antre desimal, awondi yo a de chif desimal. Si gen plis pase yon pwen, separe yo ak yon vigil: e.g 1.0 , 2.0. Si pa gen okenn, ekri okenn.)

### Videyo



## 12. Pwoblèm d Optimizasyon 2

### Pwoblèm 75: Entèval la

An n sipoze nou gen 100 pous fil ke nou vle koupe an de moso. Nou pral itilize youn nan moso yo pou fè yon sèk, epi lòt la pou fè yon kare. (Li posib pou youn nan de fòm yo gen yon gwosè zewo.)

Perimèt sèk la ka sòti nan 0 rive 100 pous, epi Perimèt kare a ka tou sòti nan 0 rive 100 pous. Èske de Perimèt sa yo endepandan de youn lòt?

A Wi  B Non

### Pwoblèm 76: Sifas Total

An n sipoze ke  $c$  se perimèt sèk la, epi  $s$  reprezante perimèt kare a.

Ekri  $s$  an tèm de  $c$ .

Jwenn sipèfisi total de de fòm yo  $A(c)$  an tèm de  $c$ .

$$s =$$



$$A(c) =$$



### Pwoblèm 77: Maksimòm

Pou yon presizyon de 0.01 pous, ki valè  $c$  ta dwe genyen pou maksimize sipèfisi total la?



### Pwoblèm 78: Minimòm

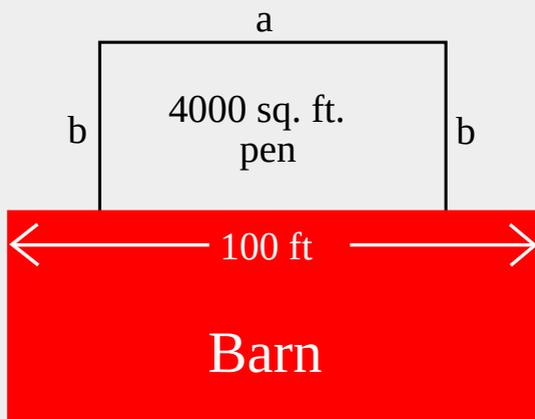
Pou yon presizyon de 0.01 pous, ki valè  $c$  ta dwe genyen pou minimize sipèfisi total la?



### 13. Pwoblèm d Optimizasyon 3

#### Pwoblèm 79: Konstriksyon yon bèjri

Yon fèmme vle bati yon kloti rektangilè pou mouton li yo sou kote kay li. Youn nan kote yo nan kloti a dwe fòme pa yon pati nan miray nò kay la, ki mezire 100 pye longè, epi lòt twa kote yo pral fòme ak kloti. Sipèfisi kloti a dwe mezire 4000 pye kare.



Si  $a$  endike longè kloti a epi  $b$  lajè li (an pye), eksprime  $b$  an tèm de  $a$ .

An n poze  $f$  reprezante kantite total kloti a. Ekri  $f$  kòm yon fonksyon  $a$ .

$$b = \text{[input field]}$$

$$f(a) = \text{[input field]}$$

#### Pwoblèm 80: Entèval la

Ki entèval akseptab pou  $a$ ?

A  $(0, 100)$   B  $[1, 100]$   C  $[1, 4000]$   D  $(0, 4000)$   E  $[100, 4000]$

F  $[0, \infty)$   G  $[1, \infty)$

**Pwoblèm 81: Kloti minimòm**

Pou ki valè  $a$  kantite kloti a atenn minimòm li?

**Pwoblèm 82: Kloti Maksimòm**

Pou ki valè  $a$  kantite kloti a atenn maksimòm li?

**14. Tiwolyèn**

Nan pwochen videyo a, nou travay sou yon kesyon ki poze nan kòmansman seksyon sa a:

Ki se distans vètikal maksimòm yon moun travèse pandan yon tiwolyèn?

Pou reponn kesyon sa a, nou vrèman reponn yon lòt kesyon ki gen rapò:

Lè yon mas pann sou yon kòd san pwa, ak de bout yo fiks, nan ki pwen mas la pral balanse?

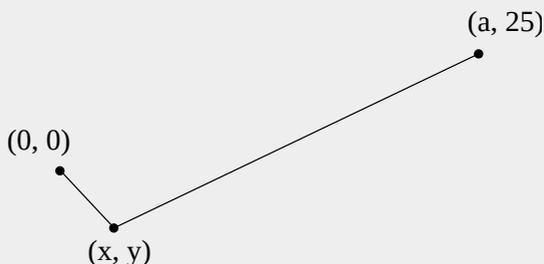
Pwen kote mas la balanse a se kowòdone minimòm  $y$  nan chemen moun k ap monte tiwolyèn nan travèse. E kowòdone minimòm  $y$  sa a koresponn egzakteman ak pwen kote moun lan fè pi gwo desant vètikal (maksimòm distans vètikal).

** Videyo**

**Pwoblèm 83: Vitès maksimòm**

Sipoze ke  $(x, y)$  reprezante pwen minimòm sou chemen eliptik yon moun ki monte tiwolyèn nan travèse. Konsidere ke moun nan kòmanse nan pwen  $(a, b) = (200, 25)$ . Pa ki kantite enèji potansyèl li redwi lè li rive nan wotè minimòm nan trajektwa li? (Sa a egal ak kantite maksimòm enèji sinetik moun nan pandan vwayaj la, sou kondisyon ke li kòmanse ak vitès zewo epi pa gen friksyon, elatriye.)

Itilize sistèm kowòdone ki tabli nan videyo a, epi ki dekri nan imaj ki anba a.



Itilize done sa yo pou kalkile repons ou a:

- Moun nan gen yon mas 50 kilogram.
- Tiwolyèn nan, pou tèt li, li pa gen mas.
- Distans orizontal ant de pwen fiks tiwolyèn nan se 200 mè.
- Chanjman nan kowòdone  $y$  ant de pwen yo se 25 mè.

(Eksprime repons ou an tèm  $g$ ,  $x$ , ak  $y$  jan sa nesèsè.)

**15. Plis pwoblèm pratik: 3 videyo resitasyon****Videyo**

 Videyo

 Videyo



---

## 16. Rezi

### Teyorèm Valè Ekstrèm lan

Si  $f$  kontini sou yon entèval fèmen  $[a, b]$ , gen pwen kote  $f$  atenn valè maksimòm li ak minimòm li sou  $[a, b]$ .

Li enpòtan pou remake ke sa garanti sèlman si entèval la se yon entèval fèmen. Nou pral pale sou entèval enfini ak entèval ouvè pi devan.

Prèy Teyorèm sa a depase objektif kou sa a, ki donk nou p ap prezante li isit la.

### Kandida pou Ekstremòm yo

Nou vle jwenn valè maksimòm oswa minimòm yon fonksyon kontini  $f$  sou yon entèval fèmen  $[a, b]$ . Teyorèm Valè Ekstrèm nan garanti ke valè sa yo ap rive atenn.

Maksimòm ak Minimòm yo ka sèlman atenn nan pwen kritik oswa nan pwen ekstrèm yo, ki donk nou bezwen pase sou tout kandida sa yo pou jwenn Maksimòm ak Minimòm yo nan  $f$ .

## Solisyon yo

### Pwoblèm 52: Atenn ekstrèm yo?

Fonksyon an vin pi gwo san limit pandan  $x \rightarrow 2$  ap pwoche soti a-dwat, ki donk li pa rive gen yon maksimòm sou entèval  $[1, 4]$ .

Menm jan an tou, li vin pi piti san limit pandan  $x \rightarrow 2$  ap pwoche soti a-gòch, ki donk li pa rive gen yon minimòm sou entèval  $[1, 4]$ .

### Pwoblèm 53: Atenn ekstrèm yo? 2

Li atenn yon minimòm sou  $[1, 4]$  nan  $x = 4$ , epi li atenn maksimòm li sou  $[1, 4]$  nan  $x = 1, 2$ , ak 3.

### Pwoblèm 54: Atenn ekstrèm yo? 3

Li atenn yon maksimòm sou  $[1, 4]$  nan  $x = 2$ , men li pa atenn yon minimòm sou  $[1, 4]$ . Remake byen ke  $f(3) = 1$ , se pa pi piti valè  $f$  sou  $[1, 4]$ , ki donk  $f$  pa atenn yon minimòm nan  $x = 3$ .

### Pwoblèm 55: Ki sa yo gen an komen?

Sou yon entèval fèmen, fonksyon yo ki pa t atenn maksimòm oswa minimòm yo pa t kontini nan tout pwen sou entèval ki entèrese nou an.

Sa se vre ke sa a enplike ke yo pa t diferansyab tou. Sepandan, sou yon entèval fèmen, yon fonksyon kontini ki PA diferansyab ap toujou atenn maksimòm ak minimòm li yo. Avètisman, sa a se pa yon reyalitye trivyal. Se yon teyorèm pwofon.

### Pwoblèm 56: Pwen Kritik yo

Definisyon pwen kritik yo enkli tou tout pwen kote  $f$  pa derivab, pwis ke pwen kote  $f$  pa derivab yo kapab kandida tou pou maksimòm lokal ak minimòm lokal.

### Pwoblèm 57: Ki kote ekstremòm yo ka ye?

Si  $f$  pa gen yon pwen kritik nan  $x = 3$ , sa vle di  $f'(3)$  egziste e  $f'(3) \neq 0$ . Sa vle di liy tanjant fonksyon an PA orizontal, ki donk pa gen maksimòm ni minimòm nan pwen sa a.

Pwen  $x = 10$  se yon pwen ekstrèm, ki donk nou dwe ranplase valè yo pou detèmine si li se yon maksimòm oswa yon minimòm. Li ka byen posib ke li se yon ekstremòm.

**Pwoblèm 58: Ekstrèmòm Egzanp 1**

Sa a se yon fonksyon kontini, ki donk Teyorèm Valè Ekstrèm lan garanti ke li pral atenn minimòm ak maksimòm li sou nenpòt entèval nan fòm  $[a, b]$ .

**Pwoblèm 59: Pwen kritik**

Nou kalkile

$$f'(x) = 3x^2 - 12x - 15 = 3(x - 5)(x + 1),$$

ki donk  $f'$  se zewo nan  $x = 5$  ak  $x = -1$ . Sa yo chita nan entèval  $[-4, 6]$ , epi yo se sèl pwen kritik fonksyon  $f$  la.

**Pwoblèm 60: Lòt kandida pou Ekstrèmòm yo**

Lòt kote ki posib  $f$  ka atenn maksimòm oswa minimòm li yo se pwen ekstrèm yo,  $x = -4$  ak  $x = 6$ .

**Pwoblèm 61: Mete yo ansanm**

Nan pwen kritik yo,  $f(5) = -90$  ak  $f(-1) = 18$ . Nan pwen ekstrèm yo,  $f(-4) = -90$  ak  $f(6) = -80$ .

Pi gwo nan sa yo se  $f(-1) = 18$ , ki donk sa dwe maksimòm pou  $f$  sou entèval sa a.

Pi piti nan sa yo se  $f(-4) = f(5) = -90$ , ki donk sa dwe minimòm pou  $f$  sou entèval sa a.

**Pwoblèm 62: Ekstrèmòm egzanp 2**

Sa a se yon fonksyon kontini, ki donk Teyorèm Valè Ekstrèm la garanti ke li pral atenn minimòm ak maksimòm li sou  $[-2, 1]$ .

**Pwoblèm 63: Pwen kritik**

Nou kalkile  $g'(x) = x^{-1/3} + 1$ . Sa a pa egziste lè  $x = 0$ , ki donk sa se yon pwen kritik. Lè n rezoud  $x^{-1/3} = -1$  li bay  $x = -1$ .

Se poutèt sa,  $x = 0$  ak  $x = -1$  se sèl pwen kritik pou  $g$ , e tou de sa yo nan entèval yo bay la  $[-2, 1]$ .

**Pwoblèm 64: Repons Final**

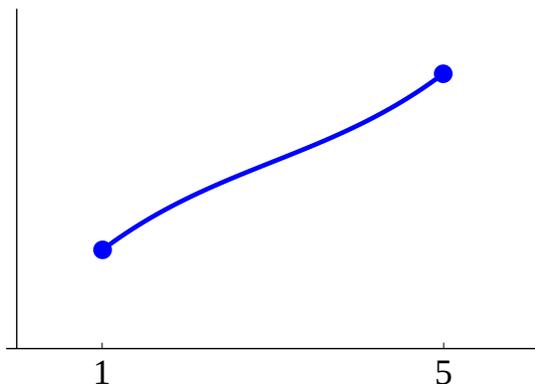
Nan pwen kritik yo,  $g(0) = 1$  ak  $g(-1) = 1.5$ . Nan pwen ekstrèm yo,  $g(-2) = (3/2)4^{1/3} - 1 \approx 1.4$ , ak  $g(1) = 7/2$ .

Pi gwo nan sa yo se  $g(1) = 3.5$ , ki donk sa dwe maksimòm pou  $g$  sou entèval sa a.

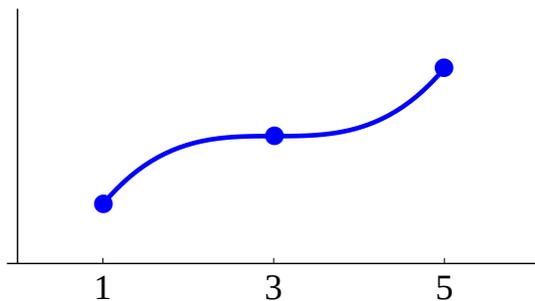
Pi piti nan sa yo se  $g(0) = 1$ , ki donk sa dwe minimòm pou  $g$  sou entèval sa a.

**Pwoblèm 65: Pa gen Pwen Kritik**

Puiske  $f$  kontini, Teyorèm Valè Ekstrèm lan garanti ke  $f$  pral atenn maksimòm li ak minimòm li sou  $[1, 5]$ . Sa yo ka rive sèlman nan pwen kritik oswa pwen ekstrèm, e depi pa gen okenn pwen kritik, li kapab se ka kote ke maksimòm nan rive atenn nan yon pwen ekstrèm, epi minimòm nan rive atenn nan lòt pwen ekstèm lan.

**Pwoblèm 66: Yon pwen kritik**

Pa nesèsèman! Fonksyon an te kapab atenn maksimòm ak minimòm li nan pwen ekstèm yo, epi yo pa gen okenn sòt de ekstrèmòm nan  $x = 3$ .



**Pwoblèm 67: Jwenn Ekstrèmòm nan Diferan Entèval yo**

Teyorèm Valè Ekstrèm lan aplike lè w ap travay ak yon fonksyon kontini sou yon entèval fèmen  $[a, b]$ . Li pa aplike lè entèval la se  $(-2, -1)$  oswa  $[5, \infty)$ .

Li pa aplike tou si  $I = [-\pi, \pi]$ , piske  $f$  pa kontini nan  $x = 0$ .

**Pwoblèm 68: Ekstrèmòm egzanzp 3**

Kalkile  $g(0.5)$  tou senpleman aritmetik.

Pou limit la, nou wè ke

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2}{2x^3 + 1} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{2 + 1/x^3} = \frac{0}{2 + 0} = 0.$$

**Pwoblèm 69: Egzanzp 3 swit**

Lè n itilize règ kosyan an, nou jwenn

$$g'(x) = \frac{(2x)(2x^3 + 1) - x^2(6x^2)}{(2x^3 + 1)^2} = \frac{2x(1 - x^3)}{(2x^3 + 1)^2}.$$

Sa toujou egziste sou entèval  $[0.5, \infty)$ , epi li zewo lè  $x = 0$  oswa  $x = 1$ . Piske  $x = 0$  pa nan entèval la, sèl pwen kritik ki enpòtan se  $x = 1$ .

**Pwoblèm 70: Repons Final**

Nou te deja kalkile ke  $g(0.5) = 0.2$  epi  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

Sèl pwen kritik nan entèval la se  $x = 1$ , ak  $g(1) = 1/3$ .

K idonk  $g$  rive atenn valè maksimòm li sou  $[0.5, \infty)$  at  $x = 1$ , men li pa atenn valè minimòm li sou  $[0.5, \infty)$ .

**Pwoblèm 71: Pwoblèm modifye**

Sèl chanjman an se ke 0 kounye a se yon pwen ekstrèm olye de 0.5. (Anplis de sa, 0 se yon pwen kritik.)

Nou te deja kalkile ke  $g(1) = 1/3$  ak  $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$ .

Nou ka wè tou ke  $g(0) = 0$ . Ki donk  $g$  rive atenn valè maksimòm li sou  $[0, \infty)$  nan  $x = 1$ , epi li atenn valè minimòm li sou  $[0, \infty)$  nan  $x = 0$ .

**Pwoblèm 72: Volim**

Wotè bwat la ap  $x$ . Anba bwat la se yon rektang; youn nan dimansyon li yo se  $12 - 2x$  e lòt la se  $8 - 2x$ . Ki donk, volim nan se  $V(x) = x(12 - 2x)(8 - 2x)$ .

**Pwoblèm 73: Entèval la**

Klèman  $x$  pa ka negatif. Epitou, si  $x > 4$  kwen yo koupe yo pral kòmanse sipèpoze. Ki donk entèval ki akseptab la se  $0 \leq x \leq 4$ .

(Yon moun ka diskite si wi ou non pwen ekstrèm yo ta dwe enkli, men li pa fè okenn diferans nan fen an.)

**Pwoblèm 74: Pwen kritik**

Nou gen  $V(x) = x(12 - 2x)(8 - 2x) = 96x - 40x^2 + 4x^3$ . Ki donk,

$$V'(x) = 96 - 80x + 12x^2.$$

Nou mete sa egal a zewo epi rezoud lè n itilize fòmil kwadratik la, sa ki bay

$$x = \frac{10 \pm \sqrt{28}}{3}.$$

Sepandan, se sèlman youn nan rasin sa yo, sa vle di

$$x = \frac{10 - \sqrt{28}}{3},$$

ki nan entèval 0 ak 4.

**Pwoblèm 75: Entèval la**

Depi w konnen konbyen fil ou itilize pou fè sèk la, ou konnen konbyen fil ou itilize pou fè kare a! Se poutèt sa de perimèt yo se pa kantite endepandan.

**Pwoblèm 76: Sifas Total**

Perimèt yo dwe ajoute 100, ki donk  $s = 100 - c$ .

Sipèfisi yon sèk ki gen perimèt  $c$  se  $c^2/4\pi$ , epi sipèfisi yon kare ki gen perimèt  $s$  se  $(s/4)^2$ , ki donk sipèfisi total la, ekprime kòm yon fonksyon de  $c$ , se

$$A(c) = \frac{c^2}{4\pi} + \left(\frac{100 - c}{4}\right)^2.$$

**Pwoblèm 77: Maksimòm**

An n premye jwenn pwen kritik yo nan  $A$ .

$$A'(c) = \frac{c}{2\pi} - \frac{100 - c}{8}.$$

Lè nou poze sa egal a zewo e rezoud li, nou jwenn  $c = \frac{100\pi}{\pi+4} \approx 43.99$  pous. Nou ka kalkile  $A(43.99) = 350$  pous kare.

Nou dwe konsidere tou pwen ekstrèm yo.  $A(0) = 625$  pous kare, epi  $A(100) = \frac{2500}{\pi} \approx 796$  pous kare. Ki donk,  $A$  maksimize lè  $c = 100$  pous - nan lòt mo, tout fil la itilize pou fè sèk la.

**Pwoblèm 78: Minimòm**

An n jwenn pwen kritik yo pou  $A$  anvan.

$$A'(c) = \frac{c}{2\pi} - \frac{100 - c}{8}.$$

Lè nou poze sa egal a zewo e rezoud li, nou jwenn  $c = \frac{100\pi}{\pi+4} \approx 43.99$  pous.

Nou ka kalkile  $A(43.99) = 350$  pous kare. Nou dwe konsidere tou pwen ekstrèm yo.  $A(0) = 625$  pous kare, epi  $A(100) = \frac{2500}{\pi} \approx 796$  pous kare. Ki donk  $A$  minimize lè  $c = 43.99$  pous.

**Pwoblèm 79: Konstriksyon yon bèjri**

Sipèfisi bèjri a dwe 4000, ki donk  $b = 4000/a$ . Se poutèt sa kantite total kloti a egal

$$F = a + 2b = a + \frac{8000}{a}.$$

**Pwoblèm 80: Entèval la**

Longè kloti a pa ka pi long pase etab la, ki donk  $a \leq 100$ . Li pa ka negatif; ni li pa ka zewo ( $b$  lè sa a ta pa defini). Ki donk  $0 < a \leq 100$ .

A

**Pwoblèm 81: Kloti minimòm**

Kantite total kloti a bay pa  $F = a + 8000/a$ . Lè nou derive, nou jwenn

$$\frac{dF}{da} = 1 - 8000/a^2,$$

ki defini nan tout pwen nan  $(0, 100]$  epi li egal a zewo lè  $a = \sqrt{8000} \approx 89.4$  pye.

Lè  $a = 89.4$  kantite total kloti a se 179 pye. Lè  $a = 100$ , kantite total kloti a se 180 pye. Epi lè  $a \rightarrow 0$  soti a dwat, kantite kloti a ap pwoche lenfini! Konsa, minimòm nan ap atenn lè  $a = 89.4$ .

**Pwoblèm 82: Kloti Maksimòm**

Kantite total kloti a bay pa  $F = a + 8000/a$ . Lè nou derive, nou jwenn

$$\frac{dF}{da} = 1 - 8000/a^2,$$

ki defini nan tout pwen nan  $(0, 100]$  epi li egal a zewo lè  $a = \sqrt{8000} \approx 89.4$  pye.

Lè  $a = 89.4$ , kantite total kloti a se 179 pye. Lè  $a = 100$ , kantite total kloti a se 180 pye. Epi lè  $a \rightarrow 0$  soti a dwat, kantite kloti a ap pwoche lenfini! Konsa, maksimòm li pa atenn!

**Pwoblèm 83: Vitès maksimòm**

Wotè vètikal total la bay pa  $25 - y$ , ki donk total enèji potansyèl la se  $50g(25 - y)$ .

---

# Rapò Relatif

---

## 1. Motivasyon

 Videyo



---

## 2. Rapò Lye

Objektif yo

Nan fen sekans sa a, epi apre kèk pratik, ou ta dwe kapab:

- Kòman pou w etabli ak rezoud pwoblèm ki gen rapò ak vitès relatif.

### 3. Pwoblèm flit lwil

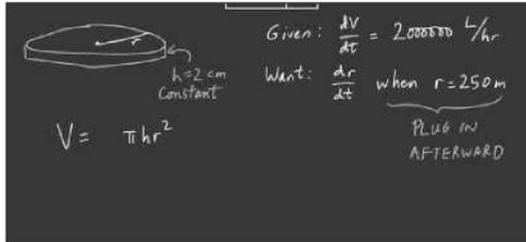
#### Pwoblèm 84: flit lwil

Yon tankè lwil (petwole) kraze e ap vide lwil nan lanmè a ak yon vitès 2 milyon lit pa èdtan. Nou ka modelize devèsman (flit) lwil la kòm yon silenn trè mens sou sifas lanmè a, ki gen volim defini pa  $V = \pi hr^2$ , kote  $r$  se reyon flit la ak  $h$  se wotè oswa epesè lwil la. Sipoze lwil ki koule a gen yon epesè konstan  $h$  de 2 cm. Nan moman sa a, reyon flit la se 250 mè. Nou ta renmen konnen nan ki vitès perimèt ekstèn devèsman an ap bouje.

Ki estrateji pami sa yo k ap ede nou jwenn repons nou ap chèche?

- A Sèvi ak ekwasyon  $V = \pi r^2 h$  pou derive  $V$  pa rapò ak  $r$
- B Rezoud  $V = \pi hr^2$  pou  $r$ , epi apre derive  $r$  pa rapò ak  $V$
- C Okenn nan sa yo pa pral bay repons final nou vle a

#### Videyo



### 4. devèsman lwil swit

#### Pwoblèm 85: Diferansyasyon enplisit

Nou vle derive ekwasyon  $V = \pi hr^2$  pa rapò ak  $t$ , kote  $h$  se yon konstan. Sou bò gòch la, nou pral jwenn  $\frac{dV}{dt}$ . Ki sa nou pral jwenn sou bò dwat la?

- A  $2\pi hr$     B  $2\pi r^2$     C  $\pi r^2 + 2h\pi r$     D  $2\pi r \frac{dr}{dt}$     E  $2\pi hr \frac{dr}{dt}$
- F  $2\pi r \frac{dh}{dt} \frac{dr}{dt}$

 Videyo




$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \pi h r^2$$

$$= \pi h \frac{d}{dt} r^2$$

$$\frac{dV}{dt} = \pi h 2r \frac{dr}{dt}$$

Given:  $\frac{dV}{dt} = 2000000 \text{ L/hr}$   
 Want:  $\frac{dr}{dt}$  when  $r = 250 \text{ m}$   
 $h = 2 \text{ cm}$   
 Constant  
 Plug in:  $2000000 \text{ L/hr} = \pi (2 \text{ cm}) (250 \text{ m}) \frac{dr}{dt}$   
 $\frac{2000000}{1000 \pi} \frac{\text{L}}{\text{hr}} = \frac{dr}{dt}$

## 5. Estrateji Rapò Lye

Pou rezoud pwoblèm ki gen rapò ak pousantaj ki lye(Rapò Lye), li itil pou swiv estrateji sa a:

1. Kòmanse ak yon bon desen!
2. Idantifye varyab ki enpòtan yo ak pousantaj ki gen rapò yo.
3. Jwenn yon ekwasyon ki relye varyab yo epi ki toujou valab.
4. Derive de fason enplisit.
5. Ranplase valè yo epi rezoud!

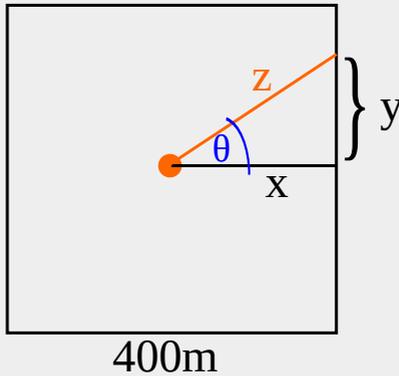
## 6. Evadman prizòn

### Pwoblèm 86: Planifye yon evadman prizòn!

Lakou prizòn w lan se yon kare ak 400 m sou chak bò. Nan sant lan, gen yon gwo limyè ki voye yon reyon ki fè yon tach klere sou miray lakou a, epi li fè 2 revolisyon pa minit. Pou senplisite, nap trete reyon an kòm yon liy dwat.

Plan evadman ou an mande pou w kouri pi vit pase tach klere ki sou miray la, konsa ou bezwen kalkile vitès maksimòm kote li ap deplase a. Pou simetri, nou bezwen sèlman konsidere kijan tach la deplase sou youn nan miray yo.

Men yon imaj lakou a, avèk reyon an an jòn make kòm  $z$ .



To varyasyon yo bay nan pwoblèm nan se kiyès nan sa yo?

- A  $\frac{dx}{dt}$ 
 B  $\frac{dy}{dt}$ 
 C  $\frac{dz}{dt}$ 
 D  $\frac{d\theta}{dt}$ 
 E Okenn nan sa ki anwo yo

Ki to varyasyon nou vle detèmine?

- A  $\frac{dx}{dt}$ 
 B  $\frac{dy}{dt}$ 
 C  $\frac{dz}{dt}$ 
 D  $\frac{d\theta}{dt}$ 
 E Okenn nan sa ki anwo yo

### Videyo



Given:  $\frac{d\theta}{dt} = 2 \text{ rev/min} = 4\pi \text{ rad/min}$   
 Want:  $\frac{dy}{dt}$   
 $\frac{y}{200} = \tan \theta$   
 $\frac{d}{dt} y = \frac{d}{dt} 200 \tan \theta$   
 $= 200 \sec^2 \theta \text{ rad} \frac{d\theta}{dt}$   
 $= 800\pi \sec^2 \theta \text{ m/min.}$

**Pwoblèm 87: Règ chèn lan?**

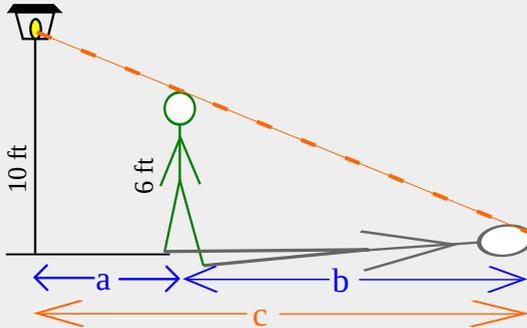
Sèvi ak varyab ki soti anwo yo, èske se vre sa

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt}?$$

- A Wi  B Non

**7. Pwoblèm vitès lonbraj****Pwoblèm 88: Vitès lonbraj**

Yon nonm ki mezire 6 pye ap mache sou lari a. Dirèkteman dèyè li, gen yon pote limyè de 10 pye wotè ki voye yon lonbraj nan lari a. Ou estasyon, 40 pye de pòs la. Lè tip lonbraj la pase, tip lonbraj sa a ap deplase ak 3 pye pa segonn. Nou swete detèmine ki vitès nonm nan ap deplase.



Lè nou itilize varyab yo make nan dyagram nan, ki to varyasyon sa a ba nou?

- A  $\frac{da}{dt}$   B  $\frac{db}{dt}$   C  $\frac{dc}{dt}$   D  $\frac{d\theta}{dt}$   E Okenn nan sa ki anwo yo

Ki to varyasyon nou vle detèmine?

- A  $\frac{da}{dt}$   B  $\frac{db}{dt}$   C  $\frac{dc}{dt}$   D  $\frac{d\theta}{dt}$   E Okenn nan sa ki anwo yo

### Pwoblèm 89: Finisyon

Jwenn yon relasyon ant de varyab yo, apre sa fè derivasyon epi rezoud.  
Ak ki vitès nonm nan ap deplase, an pye pa segond?

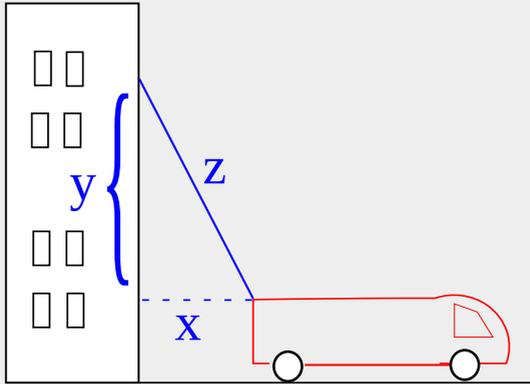


## 8. Pwoblèm kamyon ponpye

### Pwoblèm 90: Kamyon ponpye

Gen yon kamyon ponpye ki ap fè bak pou ale bò yon bilding ak yon vitès de 0.5 pye pa segonn. Li gen yon nechèl ki soti nan dèyè kamyon an epi li repoze sou kote bilding lan, epi nechèl la ap agrandi ak yon vitès de 0.2 pye pa segonn. Nechèl la kòmanse nan dèyè kamyon an, nan yon wotè 6 pye.

Pi wo a, tèt nechèl la ap frape yon gargouy ki 30 pye anlè sou kote bilding lan, lè kamyon an se 7 pye lwen bilding nan. Nou vle konnen kijan vitès tèt nechèl la ap varye (chanje) lè li frape gargouy la.



Ki to varyasyon nou vle detèmine?

- A  $\frac{dx}{dt}$   
  B  $\frac{dy}{dt}$   
  C  $\frac{dz}{dt}$   
  D  $\frac{d\theta}{dt}$   
  E Okenn nan sa ki anwo yo

Dyagram, 0.2 pye pa segonn sa yo ba nou an, a kiyès nan to (varyasyon) sa yo li egal?

- A  $\frac{dx}{dt}$   
  B  $\frac{dy}{dt}$   
  C  $\frac{dz}{dt}$   
  D  $\frac{d\theta}{dt}$   
  E Okenn nan sa ki anwo yo

Dyagram, 0.5 pye pa segonn sa yo ba nou an, a kiyès nan to (varyasyon) sa yo li egal?

- A  $\frac{dx}{dt}$   
  B  $\frac{dy}{dt}$   
  C  $\frac{dz}{dt}$   
  D  $\frac{d\theta}{dt}$   
  E Okenn nan sa ki anwo yo

 Videyo



**Pwoblèm 91: Règ chèn lan? 2**

Sèvi ak varyab ki soti anwo yo, èske se vre sa

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt} ?$$

A Wi  B Non

Sèvi ak varyab ki soti anwo yo, èske se vre sa

$$\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} ?$$

A Wi  B Non

## 9. Volim yon glasyè

### Pwoblèm 92: Volim yon glasyè

Nou vle reflechi sou volim yon aysbèg (glasyè), e nou deside modelize li kòm yon kòn. Sonje ke volim yon kòn bay pa  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$ , kote  $r$  se reyon baz la epi  $h$  se wotè a.

Kounye a, reyon an se 300 mètr epi wotè a se 60. Nou detèmine ke wotè a ap diminye pa 0.10 mètr pa jou, epi reyon an ap diminye pa 0.50 mètr pa jou. Nou vle detèmine to varyasyon volim nan.

Lè nou ap fè diferansyasyon enplisit sou bò dwat  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  pa rapò ak  $t$ , ki règ nou bezwen itilize? Chwazi tout sa ki aplikab.

- A Règ pwodui    B Règ kosyan    C Règ chèn nan

### Pwoblèm 93: Repons final la

Dapre done yo prezante, ki sa ki inite natirèl pou repons final nou an?

(Sèvi ak  $m$  pou mètr  $d$  pou jou.)



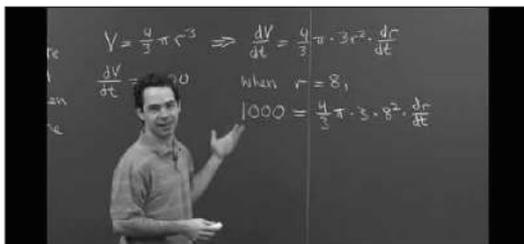
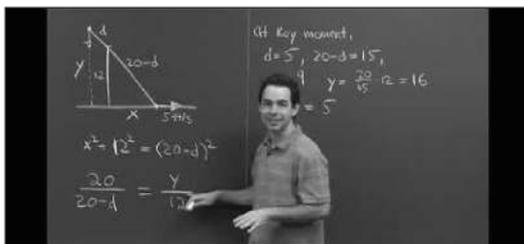
Nan inite sa yo, ki sa to varyasyon volim glas la ye?

(Antre repons lan ak 2 chif siyifikatif, sa vle di 2 chif ki pa zewo.)



## 10. Plis pratik ouvè: videyo resitasyon

Pwoblèm sa yo kite pou w trase dyagram nan, etikete varyab yo, epi rezoud pwoblèm yo sou vitès ki gen rapò. Sa a plis ouvè pase pwoblèm ou te fè nan lekòl sa a. Gade videyo yo pou jwenn pwoblèm nan, epi sispann pou travay sou pwoblèm nan pou kont ou. Ou ka rekòmanse gade videyo a si ou bloke, oswa pou konpare repons ou ak repons enstriktè a!

 Videyo

 Videyo



---

## 11. Rezime

### Estrateji Rapò Lye

Pou rezoud pwoblèm ki gen rapò ak pousantaj ki lye (Rapò Lye), li itil pou swiv estrateji sa a::

1. Kòmanse ak yon bon desen!
2. Idantifye varyab ki enpòtan yo ak pousantaj ki gen rapò yo.
3. Jwenn yon ekwasyon ki relye varyab yo epi ki toujou valab.
4. Derive de fason enplisit.
5. Ranplase valè yo epi rezoud!

## Solisyon yo

### Pwoblèm 84: flit lwil

Repons nou ap chèche a se vitès bò ekstèn lan. Derive pa rapò ak reyon an pa pral bay yon vitès, menm jan tou derive pa rapò ak volim nan pa pral bay repons lan.

### Pwoblèm 85: Diferansyasyon enplisit

Nou dwe itilize diferansyasyon enplisit, trete  $r$  kòm yon fonksyon de  $t$ . Sonje ke nou sipoze  $h$  se yon konstan! Nou jwenn:

$$\frac{d}{dt}(\pi hr^2) = 2\pi hr \frac{dr}{dt}.$$

E

### Pwoblèm 86: Planifye yon evadman prizon!

To varyasyon yo bay nan pwoblèm nan se 2 revolisyon pa minit. Sa a se vitès wotasyon limyè a, ki donk li ap di nou sou  $\frac{d\theta}{dt}$ .

Nou vle detèmine vitès tach la sou miray la. Kantite  $y$  ap mezire pozisyon tach la sou miray la sòti nan yon pwen fiks (pwen mitan miray la), ki donk  $\frac{dy}{dt}$  se sa nou bezwen.

D

B

### Pwoblèm 87: Règ chèn lan?

Wi! Paskè  $y$  ka ekri sèlman kòm yon fonksyon de  $\theta$ , epi  $\theta$  se yon fonksyon de  $t$ , konpozisyon de fonksyon sa yo bay  $y$  kòm yon fonksyon de  $t$ . Ki donk, Règ Chèn nan aplike!

**Pwoblèm 88: Vitès lonbraj**

Mezi vitès la dwe fèt soti nan yon pwen fiks. Pye nonm nan pa fiks, men baz poto lanp lan fiks. Se poutèt sa, vitès tip lonbraj la se  $\frac{dc}{dt}$ , epi vitès nonm nan se

$$\frac{da}{dt}.$$


**Pwoblèm 89: Finisyon**

Soti nan triyang ki similè a, epi ranplase  $b = c - a$ , nou genyen

$$\frac{c}{10} = \frac{b}{6} = \frac{c - a}{6}.$$

Lè n rezoud pou  $a$  li bay  $a = 2c/5$ . Ki donk,

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{5} \frac{dc}{dt}.$$

Lè nou ranplase  $\frac{dc}{dt} = 3$  pye pa segonn, nou jwenn  $\frac{da}{dt} = 1.2$  pye pa segonn.

Remake ke nou pa t bezwen enfòmasyon sou distans ou sòti nan poto a – rezilta sa a valab kèlkeswa kantite sa a!

**Pwoblèm 90: Kamyon ponpye**

Yo bay vitès nechèl ki monte sou mi bilding lan pa  $\frac{dy}{dt}$ , puiske  $y$  mezire distans vètikal la apati yon pwen fiks.

Longè nechèl la bay pa  $z$ , kidonk  $\frac{dz}{dt} = 0.2$  pye pa segond jan sa te di nan pwoblèm nan.

Se vre ke  $x$  ap mezire distans soti nan kamyon an ale nan bilding lan, men se pa

vre ke  $\frac{dx}{dt} = 0.5$  pye pa segonn. Puiske kamyon an ap bak,  $x$  ap diminye! Ki

donk,  $\frac{dx}{dt}$  ta dwe negatif!

 B

 C

 E
**Pwoblèm 91: Règ chèn lan? 2**

Non! Nan sitiyasyon sa a,  $y$  pa ka ekri sèlman kòm yon fonksyon de  $x$ , ni sèlman kòm yon fonksyon de  $z$ ; li ka sèlman ekri kòm yon fonksyon de tou de ansanm. Se poutèt sa, vèsyon Règ Chèn ki te prezante nan kou sa a, ki sèlman aplike nan konpozisyon fonksyon yon sèl varyab, pa aplike. (An reyelite, teknikman, senbòl  $\frac{dy}{dz}$  ak  $\frac{dy}{dx}$  pa menm defini!)

**Pwoblèm 92: Volim yon glasyè**

Tou de  $h$  ak  $r$  ap chanje - sa vle di nou ap trete yo tou de kòm fonksyon  $t$  lè nou fè diferansyasyon enplisit. Pou diferansye pwodui  $r^2$  ak  $h$ , nou pral bezwen Règ Pwodui a. Nou pral bezwen tou Règ Chèn nan lè n ap diferansye  $r^2$  pa rapò ak  $t$ .

**Pwoblèm 93: Repons final la**

Lè nou fè derivasyon  $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$  pa rapò ak  $t$ , sa ap bay:

$$\frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{3} \left( r^2 \frac{dh}{dt} + h \frac{d}{dt}(r^2) \right) \text{ (règ pwodwi a)} \quad (7.65)$$

$$= \frac{\pi}{3} \left( r^2 \frac{dh}{dt} + 2hr \frac{dr}{dt} \right) \text{ (règ chenn lan)} \quad (7.66)$$

$$= \frac{\pi}{3} (300^2(-0.1) + 2 \cdot 60 \cdot 300(-0.5)) \text{ (sibstitisyon)} \quad (7.67)$$

$$= -28274.3 \text{ m}^3/\text{day}. \quad (7.68)$$

Paske okenn nan valè sa yo nou bay yo pa gen plis pase 2 chif siyifikatif, li pa gen sans pou bay repons lan ak plis pase 2 chif siyifikatif. Repons kòrèk la se 28000.

# Devwa 4 Pati A

## 1. Pwoblèm Seksyon A

### Konsènan Pwoblèm Seksyon A

Pwoblèm Seksyon A yo ede w pratike mekanik kalkil. Gen anpil egzèsis ki devlope lide yo te prezante nan sekans aprantisaj ki anwo yo.

## 2. HW4A

### Pwoblèm 94: 4A (1)

Jwenn limit sa yo.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{5x} =$$



$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin(x/2)}{x - \pi} =$$



## 3. HW4A

### Pwoblèm 95: 4A (2)

Tanpri kalkile valè limit ki anba yo.

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{1/x} =$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^+} (1 + 3x)^{10/x} =$$



---

## 4. 2B-1,2a

### Pwoblèm 96: 4A (3)

Fè yon eskis (desen) pou graf ki ann apre yo.

(Desen yon lan ta dwe montre entèval kote li ap monte ak desann, epi deside konbyen solisyon ki genyen pou  $y=0$ . Make pwen kritik yo, make pwen enfleksyon yo, epi montre nenpòt asemptòt vètikal oswa orizontal.)

$$y = x^3 - 3x + 1$$



---

## 5. 2B-1b

### Pwoblèm 97: 4A (4)

Fè yon eskis (desen) pou graf ki ann apre yo.

(Desen yon lan ta dwe montre entèval kote li ap monte ak desann, epi deside konbyen solisyon ki genyen pou  $y=0$ . Make pwen kritik yo, make pwen enfleksyon yo, epi montre nenpòt asemptòt vètikal oswa orizontal.)

$$y = x^4 - 4x + 1$$



---

## 6. 2B-1d

### Pwoblèm 98: 4A (5)

Fè yon eskis (desen) pou graf ki ann apre yo.

(Desen yon lan ta dwe montre entèval kote li ap monte ak desann epi deside konbyen solisyon ki genyen pou  $y=0$ . Make pwen kritik yo. Make pwen enfleksyon yo. Epi montre nenpòt asemptòt vètikal oswa orizontal.)

$$y = x^2/(x - 1)$$



---

## 7. 2B-1h

### Pwoblèm 99: 4A (6)

Fè yon eskis (desen) pou graf ki ann apre yo.

(Desen w lan ta dwe montre entèval kote li ap monte ak desann epi deside konbyen solisyon ki genyen pou  $y=0$ . Make pwen kritik yo. Make pwen enfleksyon yo. Epi montre nenpòt asemptòt vètikal oswa orizontal.)

$$y = e^{-x^2}$$



## 8. 2B-5

### Pwoblèm 100: 4A (7)

Fè yon desen graf derive fonksyon ki afiche anba a. Mete kote derive a travès zewo epi make pwen kritik derive a.

#### Deskripsyon imaj

Lè  $x < -7$ , fonksyon  $f(x)$  pozitif, ap monte, epi konvèks

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow -7^-} f(x) = \infty$$

Lè  $-7 < x < -3$ , fonksyon an konkav desann e li gen yon liy tanjant orizontal nan  $x = -5$ . Fonksyon an ap monte lè  $-7 < x < -5$ . Fonksyon an ap desann lè  $-5 < x < -3$ . Fonksyon an pran valè  $f(-5) = 2$ .

$$\lim_{x \rightarrow -7^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -\infty$$

Lè  $-3 < x < 5$ , fonksyon an ap monte epi li travès aks  $x$  la nan 1. Fonksyon an konkav desann pou  $-3 < x < 1$ , epi konkav monte pou  $1 < x < 5$ .

$$\lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow 5^-} f(x) = \infty$$

Pou  $x > 5$ , fonksyon an negatif, konkav desann, epi ap monte.

$$\lim_{x \rightarrow 5^+} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0$$



---

## 9. HW4A

### Pwoblèm 101: 4A (8)

Ki pi gwo ak pi piti valè posib pwodwi twa nonb diferan ki gen yon distans 1 ant chak lòt yo ak nonb santral la  $x$ , si  $x$  twouve l ant  $-2$  ak  $2$  enkli?

max=

min=

---

## 10. HW4A

### Pwoblèm 102: 4A (9)

Yon konpayi avyon ap ranpli 100 plas nan yon avyon ak yon pri tikè 200. *Pouchakogmantasyon* 5 sou pri tikè a, li pèdi 2 pasaje. Pou chak diminisyon \$5, sou pri tikè a, li genyen 2 pasaje. Ki pri ki maksimize revni a?

$p =$

---

## 11. HW4A

### Pwoblèm 103: 4A (10)

Jwenn minimòm  $(x + 1)e^{-x}$ , pou  $0 \leq x < \infty$ . Si fonksyon an pa gen minimòm, antre OKENN.

min =

## 12. HW4A

### Pwoblèm 104: 4A (12)

Sab ap vide sou yon pil konik nan yon vitès de 12 mètr kib pa minit, nan yon fason ke dyamèt baz pil la toujou  $3/2$  wotè a. Chèche nan ki to wotè a ap ogmante lè pil la gen 2 mètr wotè.

$$\frac{dh}{dt} =$$

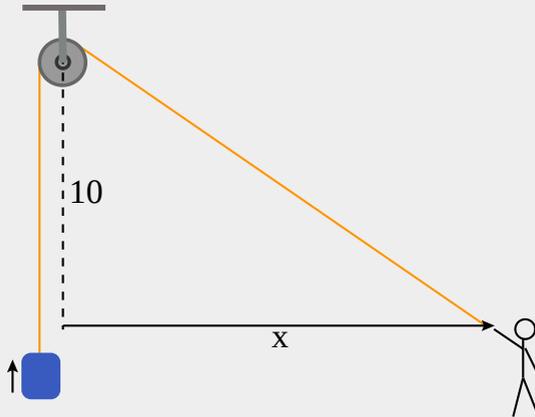


## 13. HW4A

### Pwoblèm 105: 4A (13)

Yon moun kenbe yon kòd ki pann sou yon pouli epi ki konekte ak yon pwa. An n poze aks- $x$  la paralèl ak tè a. Moun nan ap mache lwen pouli a sou aks- $x$  la. Wotè pouli a se 10 pye soti sou aks- $x$  la. Nou sipoze pwa a ap monte ak yon vitès konstan 4 pye pa segonn.

Jwenn vitès moun nan sou aks- $x$  la lè  $x = 20$  pye lwen baz pouli a.



$$v =$$



---

**14. HW4A****Pwoblèm 106: 4A (14)**

Yon tifi glise sou yon glisad ki gen fòm yon parabol  $y = (x - 1)^2$  pou  $0 \leq x \leq 1$ . Vitès vètikal li se  $dy/dt = -y(1 - y)$ . Jwenn vitès orizontal li  $dx/dt$  lè  $y = 1/2$ .

$v =$

## Solisyon yo

### Pwoblèm 94: 4A (1)

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1/x}{1} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 - 3x - 4}{x + 1} = -4. \quad \text{Pa ka itilize règ L'Hospital la.}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{5x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1/(1+x^2)}{5} = 1/5$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln \sin(x/2)}{x - \pi} = \lim_{x \rightarrow \pi} \frac{(1/2) \cot(x/2)}{1} = 0$$

### Pwoblèm 95: 4A (2)

$x^{1/x} \rightarrow 0$  pandan  $x \rightarrow 0^+$  paske  $0^\infty$  pa endetèmine, li ap pwoche 0.

Metòd dousman ak logaritm:  $x^{1/x} = e^{\frac{\ln x}{x}} \rightarrow e^{-\infty} = 0$  lè  $x \rightarrow 0^+$  paske

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{x} = \frac{-\infty}{0^+} = -\infty. \quad (\text{Nou pa ka itilize Règ L'Hospital la.})$$

$$(1 + 3x)^{10/x} = e^{\frac{10 \ln(1+3x)}{x}} \rightarrow e^{30} \text{ lè } x \rightarrow 0^+ \text{ paske}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{10 \ln(1 + 3x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{10 \cdot 3/(1 + 3x)}{1} = 30$$

0,  $e^{30}$

**Pwoblèm 96: 4A (3)**

$$y = x^3 - 3x + 1, y' = 3x^2 - 3 = 3(x - 1)(x + 1). y' = 0 \implies x = \pm 1$$

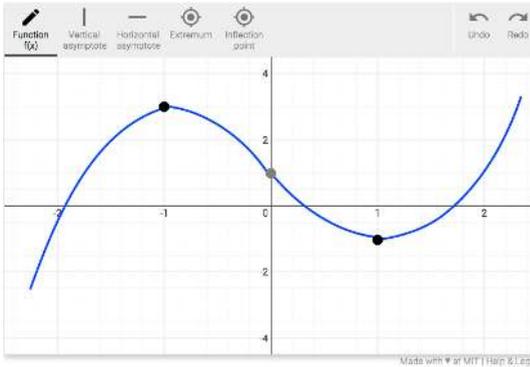
Valè ekstrèm (limit) yo:  $y \rightarrow -\infty$  pandan  $x \rightarrow -\infty$ , epi  $y \rightarrow \infty$  pandan  $x \rightarrow \infty$ .

Valè kritik yo:  $y(-1) = 3, y(1) = -1$ . Sa vle di fonksyon an ap kwaze aks- $x$  3 fwa.

Ap monte sou:  $-\infty < x < -1, 1 < x < \infty$ .

Ap desann sou:  $-1 < x < 1$ .

$y'' = 6x. y'' = 0 \implies x = 0$ . Konkav sou:  $-\infty < x < 0$ . Konvèks:  $0 < x < \infty$ .



**Pwoblèm 97: 4A (4)**

$y = x^4 - 4x + 1$ , Valè ekstrèm (limit):  $y \rightarrow \infty$  pandan  $x \rightarrow \pm\infty$ ;

$$y = x^4 - 4x + 1 \quad (7.69)$$

$$y' = 4x^3 - 4 \quad (7.70)$$

$$y' = 0 \implies x = 1 \quad (7.71)$$

$$y'' = 12x^2 \quad (7.72)$$

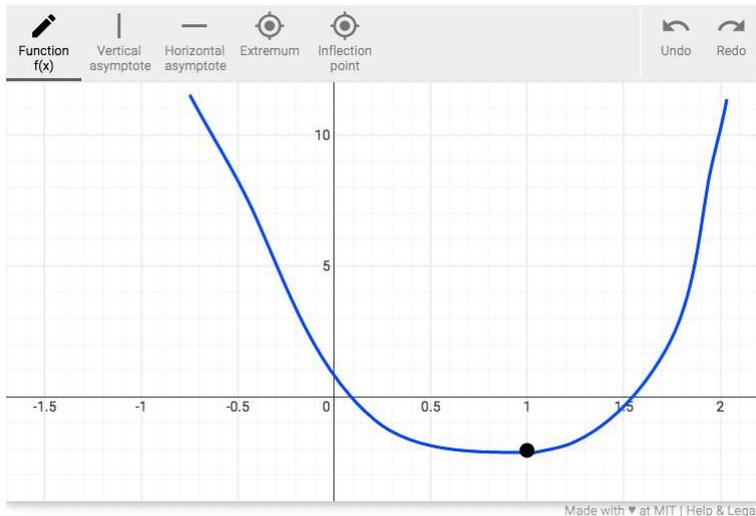
$$y'' = 0 \implies x = 0 \quad (7.73)$$

Ap monte sou:  $1 < x < \infty$ ; ap desann sou:  $-\infty < x < 1$ .

Valè kritik la se yon minimòm:  $y(1) = -2$ .

Graf la dwe travèse aks- $x$  la de fwa.

Konvèks sou tout entèval la.



**Pwoblèm 98: 4A (5)**

$$y = x^2/(x - 1),$$

**Valè ekstrèm yo:**  $y \rightarrow \infty$  pandan  $x \rightarrow \infty$  ak  $y \rightarrow -\infty$  pandan  $x \rightarrow -\infty$ .

**Diskontinite:**  $y(1^+) = +\infty$  and  $y(1^-) = -\infty$ .

**Pwen kritik**

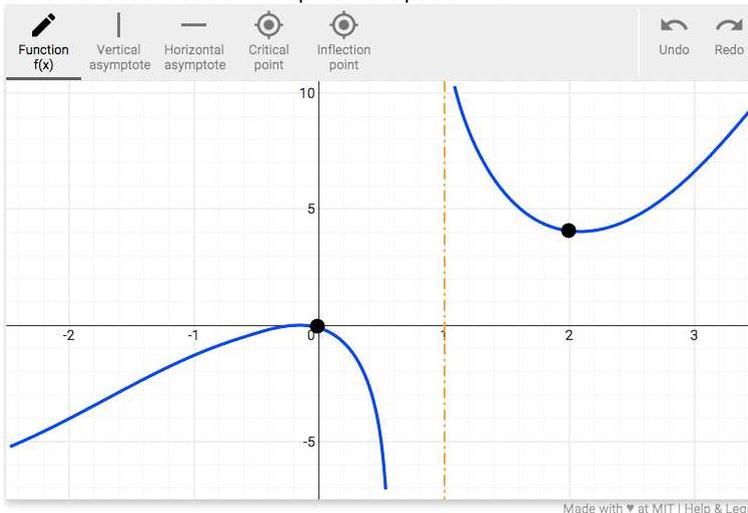
$$y' = (2x(x - 1) - x^2)/(x - 1)^2 = (x^2 - 2x)/(x - 1)^2 = (x - 2)x/(x - 1)^2.$$

Valè kritik yo:  $y(0) = 0$  ak  $y(2) = 4$ .

**Nouvo karakteristik:** Fè atansyon ak chanjman siy nan nimeratè  $y'$ . ap ogmante sou:  $-\infty < x < 0$  ak  $2 < x < \infty$  ap diminye sou:  $0 < x < 1$  ak  $1 < x < 2$

Kwaze aks- $x$  la yon sèl fwa (nan  $x = 0$ ).

**Pwen enfleksyon**  $y'' = 2/(x - 1)^3$ . Pa gen okenn pwen enfleksyon. Fonksyon an konkav desann sou  $x < 1$  epi konvèks pou  $x > 1$ .



**Kòmantè sou diskontinite:** Fè atansyon ak chanjman siy nan kote  $y'$  egal a zewo epi kote  $y'$  endefini:  $y' = 0$  endike yon posib chanjman siy nan nimeratè a, epi  $y'$  endefini endike yon posib chanjman siy nan denominatè a. Nan ka sa a, pa te gen okenn chanjman siy nan  $y'$  nan  $x = 1$ , men ta gen yon chanjman siy si te gen yon puisans epè  $(x - 1)$  nan denominatè a.

**Pwoblèm 99: 4A (6)**

$$y = e^{-x^2},$$

Valè ekstrèm yo:  $y \rightarrow 0$  pandan  $x \rightarrow \pm\infty$ .

$$y' = -2xe^{-x^2} \quad (7.74)$$

$$y' = 0 \implies x = 0 \quad (7.75)$$

$$y'' = (4x^2 - 2)e^{-x^2} \quad (7.76)$$

$$y'' = 0 \implies x = \pm 1/\sqrt{2} \quad (7.77)$$

Valè kritik:  $y(0) = 1$ .

Ogmante sou :  $-\infty < x < 0$

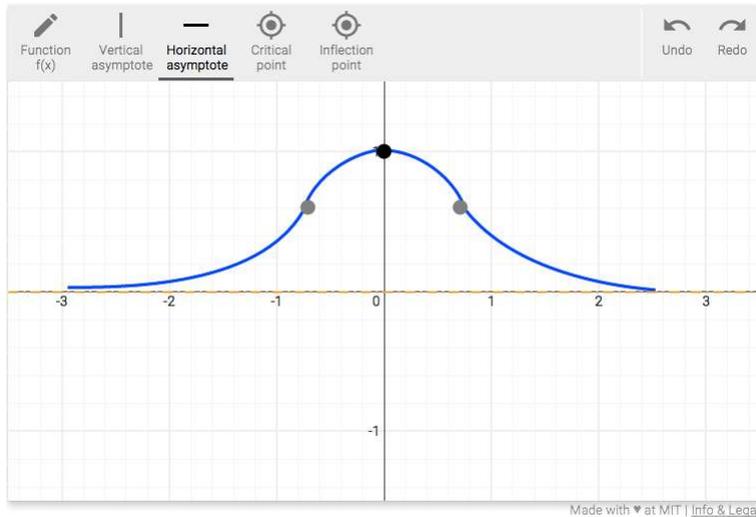
Desann sou :  $0 < x < \infty$

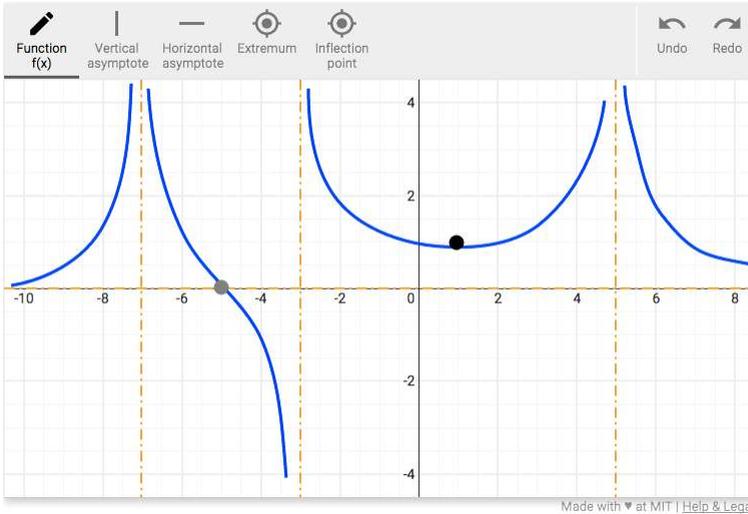
Graf la pa janm travèse aks- $x$  la. (Fonksyon an simetrik pa rapò ak orijin.)

Pwen enfleksyon yo:  $x = \pm 1/\sqrt{2}$

Konvèks sou  $-\infty < x < -1/\sqrt{2}$  ak  $1/\sqrt{2} < x < \infty$ .

Konkav sou  $-1/\sqrt{2} < x < 1/\sqrt{2}$ .



**Pwoblèm 100: 4A (7)**

Sonje ke pwen kritik yo vin tounen pwen enfleksyon, epi pwen enfleksyon yo vin tounen pwen kritik. Derive a gen menm asemptòt vètikal ak orizontal yo.

**Pwoblèm 101: 4A (8)**

Pou jwenn maks ak min  $y = x(x + 1)(x - 1) = x^3 - x$ , premyeman, jwenn pwen kritik yo:

$$y' = 3x^2 - 1 = 0 \quad \text{if} \quad x = \pm \frac{1}{\sqrt{3}}; \quad (7.78)$$

$$y\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}\right) = \frac{-2}{3\sqrt{3}} \quad \text{rel. min} \quad (7.79)$$

$$\begin{aligned} y\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) &= -\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{2}{3}\right) \\ &= \frac{2}{3\sqrt{3}} \quad \text{rel. max.} \end{aligned} \quad (7.80)$$

Verifye pwen ekstrèm yo:  $y(2) = 6 \implies 2$  se maksimòm absoli.  
 $y(-2) = -6 \implies -2$  se minimòm absoli.

(Sa a se yon *pwoblèm pwen ekstrèm*. Pwen ekstrèm yo dwe teste, sof si foto fizik oswa jeyometrik la deja fè li klè si maksimòm oswa minimòm nan rive nan yon pwen ekstrèm.)

**Pwoblèm 102: 4A (9)**

An n sipoze  $p$  reprezante pri a an dola. Konsa, pral gen  $100 + (2/5)(200 - p)$  pasaje. Konsa, revni total la se:

$$R = p(100 + (2/5)(200 - p)) = p(180 - (2/5)p)$$

Nan "bout yo" lè pri a  $p = 0$ , (gratis), ak lè pa gen pasaje ditou,  $p = (5/2)180 = 450$ , revni an egal a zewo. Sa vle di ke revni maksimòm lan rive nan yon pwen kritik ant de bout sa yo.

$$R' = (180 - (2/5)p) - (2/5)p = 180 - (4/5)p = 0 \implies p = (5/4)180$$

225

**Pwoblèm 103: 4A (10)**

Pa gen minimòm. Derive fonksyon an se  $-xe^{-x} < 0$ , sa vle di ke fonksyon an ap diminye. Dapre Règ L'Hôpital,  $xe^{-x} \rightarrow 0$  pandan  $x \rightarrow \infty$ .

*OKENN***Pwoblèm 104: 4A (12)**

$V = (\pi/3)r^2h$  ak  $2r = d = (3/2)h$  sa enplike ke  $h = (4/3)r$ .

Sepandan,

$$V = (\pi/3)r^2h = (4\pi/9)r^3$$

Anplis,  $dV/dt = 12$ , ki donk

$$\frac{dV}{dt} = \frac{dV}{dr} \frac{dr}{dt} = \left( \frac{d}{dr} (4\pi/9)r^3 \right) \frac{dr}{dt} = (4\pi/3)r^2 \left( \frac{dr}{dt} \right) = 12.$$

ki donk,  $\frac{dr}{dt} = \frac{9}{\pi r^2}$ . Lè  $h = 2$ , reyon an se  $r = 3/2$ , ki donk sa a vin

$$\frac{dr}{dt} = \frac{4}{\pi} \quad \text{mèt pa min} \quad (7.81)$$

$$\frac{dh}{dt} = \frac{16}{3\pi} \quad \text{mèt pa min.} \quad (7.82)$$

**Pwoblèm 105: 4A (13)**

Enfòmasyon nou genyen yo se

$$x^2 + 10^2 = z^2, \quad z' = 4$$

Nou vle evalye  $x'$  nan  $x = 20$ . (Derivasyon yo fèt pa rapò ak tan.) Se konsa nou jwenn

$$2xx' = 2zz' \quad \text{and} \quad z^2 = 20^2 + 10^2 = 500$$

Se poutèt sa,

$$x' = (zz')/x = 4\sqrt{500}/20 = 2\sqrt{5}.$$

**Pwoblèm 106: 4A (14)**

$dy/dt = 2(x-1)dx/dt$ . Remake sa nan entèval  $x < 1$ ,  $x-1$  negatif, ki donk  $(x-1) = -\sqrt{y}$ . Se kon sa,

$$dx/dt = (1/2(x-1))(dy/dt) = -(1/2\sqrt{y})(dy/dt) = +(\sqrt{y})(1-y)/2$$

Metòd 2: Si nou fè li dirèkteman, sa vin pi rapid:

$$x = 1 - \sqrt{y} \implies dx/dt = -(1/2)y^{-1/2}dy/dt$$

Lòt pati a rete menm jan ak anvan.

---

# Devwa 4 Pati B

---

## 1. Evolisyon Ekwasyon yo

### Pwoblèm 108: Pi dousman pase log

Jwenn yon fonksyon ki grandi pou ale nan lenfini pi dousman pase  $\ln(x)$  lè  $x \rightarrow \infty$ .



## 2. Eskis Graf

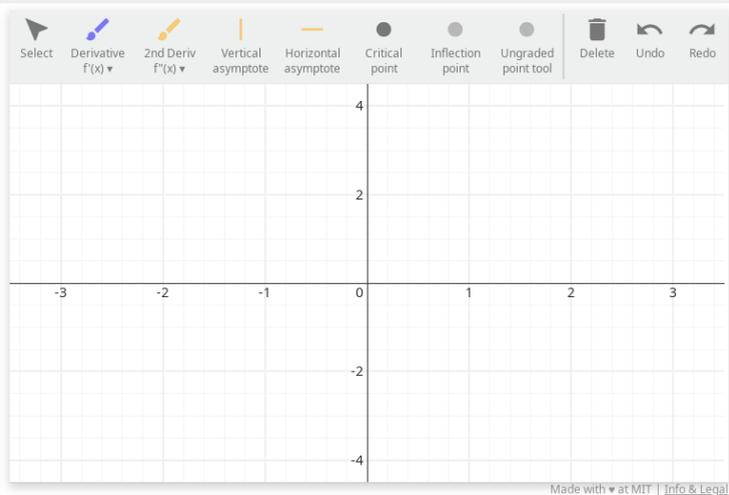
### Pwoblèm 109: Eskis Graf

Eskis Graf fonksyon  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$ .

The image shows a digital graphing tool interface. At the top, there is a toolbar with icons for a document and a pencil. Below that is a main toolbar with the following tools: Select (black arrow), Function  $f(x)$  (blue pencil), Vertical asymptote (orange vertical line), Horizontal asymptote (orange horizontal line), Extremum (black dot), Inflection point (grey dot), Ungraded point tool (grey dot), Delete (trash can), Undo (curved arrow), and Redo (curved arrow). The main workspace is a coordinate grid with the x-axis ranging from -3 to 3 and the y-axis ranging from -4 to 4. The grid lines are spaced at intervals of 0.5 units. The origin (0,0) is labeled. The x-axis has labels at -3, -2, -1, 0, 1, 2, and 3. The y-axis has labels at -4, -2, 2, and 4. At the bottom right of the grid, there is a small text label: "Made with at MIT | [Info & Legal](#)".

**Pwoblèm 110: Eskis derive premye ak derive dezyèm yo**

Trase graf derive  $f'$  ak  $f''$  fonksyon  $f(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$  la (Gade pwoblèm ki anwo a).



**Pwoblèm 111: Kalkil derive ak derive segondè yo**

Kalkile  $f'$  ak  $f''$  lè w sèvi avèk  $\frac{1}{x^2 - 1} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{x - 1} - \frac{1}{x + 1} \right)$ .

$f'(x) =$

$f''(x) =$

### 3. Ang Kamera

#### Pwoblèm 112: Ang kamera ak aktè

An n sipoze yon kamera fikse nan pwen  $(0, 0)$  nan plan koòdone  $a$  (mezire an pye). Yon aktè kòmanse nan  $(10, 10)$  epi li deplase atè (direksyon  $y$  negatif) ak vitès 1 pye pa segonn, epi li deplase a dwat (direksyon  $x$  pozitif) ak vitès 1 pye pa segonn, ki donk pozisyon li nan tan  $t$  se  $(10 + t, 10 - t)$ .

Se pou  $\theta$  reprezante ang ant direksyon  $x$  pozitif ak liy vizyon soti nan kamera a rive nan aktè a, kòm yon fonksyon tan  $t$ . Jwenn to varyasyon  $\theta$  an fonksyon tan  $t$ .

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{[input field]}$$

#### Pwoblèm 113: Pousantaj relativ

Sipoze kamera a fikse nan pwen  $(0, 0)$  epi aktè a kòmanse nan pwen  $(a, b)$  nan tan  $t = 0$ . An n sipoze plis ke to varyasyon pozisyon aktè a nan direksyon  $x$  se yon konstan  $u$  pye pa segonn, epi to varyasyon nan direksyon  $y$  se yon konstan  $v$  an pye pa segonn. Jwenn fòmil pou  $\tan(\theta)$ , epi Sèvi ak diferansyasyon enplisit pou jwenn yon fòmil pou to varyasyon ang  $\theta$ .

#### Endis

Varyab  $\theta$  pa gen okenn inite fizik. Konfime ke inite  $d\theta/dt$  yo kòrèk.

$$\tan(\theta) = \text{[input field]}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \text{[input field]}$$

Eksplike kijan fòmil ou te jwenn nan Pousantaj Relatif yo mache ak fòmil ki soti nan Ang ak Aktè yo.

#### Gade eksplikasyon an

Nan premye pati a,  $u = 1$  ak  $v = -1$ , epi  $a = 10$  ak  $b = 10$ . Lè nou ranplase valè sa yo nan ekwasyon nou te jwenn nan, nou jwenn repons ki te anwo a.

## 4. Pòt k ap balanse

### Pwoblèm 114: Pozisyon inisyal ak vitès inisyal

Ang  $A$  yon pòt ki lou e ki gen anpil amotisman chanje ak tan selon fòmil sa a

$$A = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a},$$

kote  $a$  ak  $b$  se konstan pozitif ki depann de nivo amotisman, pwa pòt la, ak resò pòt la.

Varyab  $t$  a mezire an segonn, epi  $A$  se ang lan an radyan.

Kisa ki pozisyon angilè inisyal la ak vitès angilè inisyal la lè  $t = 0$ ?

Pozisyon inisyal  $A(0) =$

Vitès angilè inisyal  $A'(0) =$

### Pwoblèm 115: Amplitid Maksimòm

Etdandone modèl pou ang  $A$  yon pòt ki lou e ki gen anpil amotisman

$$A = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a},$$

nan ki moman  $t_M$  anplitid la pi gwo?

$t_M =$

### Pwoblèm 116: Amotisman Kritik

Lè  $b = a$ , amotisman an rele "kritik"; Ki relasyon ant  $A$  ak  $t$ ?

(Antre repons ou an tèm  $e$ , varyab  $t$ , ak paramèt  $a$ .)

$A =$

**Pwoblèm 117: Trase graf la**

Nan ka kote  $A$  gen yon amotisman kritik epi  $\alpha = 1$ , trase graf  $A$ .

(Desen an ka kalitatif. Make tout asemptòt, pwen kritik, ak pwen enfleksyon yo kalitatifman.)



## Solisyon yo

### Pwoblèm 108: Pi dousman pase log

Gen plizyè repons posib. Men youn nan repons yo se  $\ln(\ln(x))$ . Nou ka verifie sa lè n sèvi ak règ l'Hôpital:

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \ln(x)}{\ln(x)} &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{x \ln(x)}}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln(x)} = 0\end{aligned}$$

**Pwoblèm 109: Eskis Graf**

Fonksyon  $f(x)$  la pa defini nan  $x = \pm 1$ . Genyen 2 asenptòt vètikal nan pwens sa yo.

Lè n kalkile limit yo, nou jwenn:

$$f(1^+) = 1/0^+ \rightarrow +\infty \quad (7.84)$$

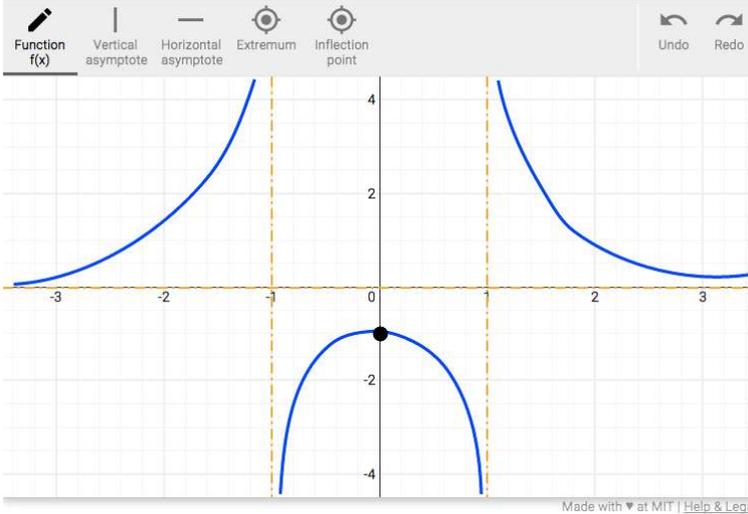
$$f(1^-) = 1/0^- \rightarrow -\infty \quad (7.85)$$

$$f(-1^+) = 1/0^- \rightarrow -\infty \quad (7.86)$$

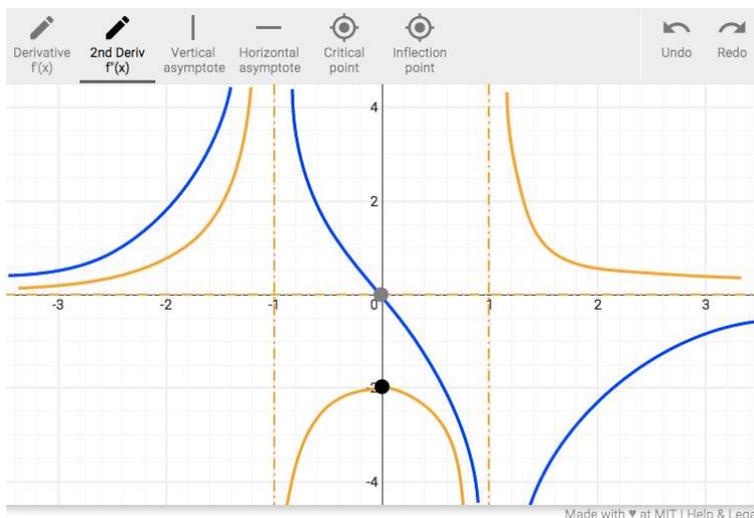
$$f(-1^-) = 1/0^+ \rightarrow +\infty \quad (7.87)$$

Pwen ekstrèm dwat ak goch yo se  $\pm\infty$ , ak  $f(\pm\infty) = 0$ , ki donk gen yon asenptòt orizontal nan  $y = 0$ .

Remake ke  $f(x)$  se yon fonksyon pè, sa vle di  $f(-x) = f(x)$ , se poutèt sa, nou konnen  $f(x)$  simetrik sou aks  $-y-$ . Nou kalkile  $f(0) = -1$ , e sa sèlman ase pou n ka trase graf fonksyon an.



**Pwoblèm 110: Eskis derive premye ak derive dezyèm yo**



Remake ke nou te jwenn yon pwen kritik  $f'(0) = 0$  lè nou obsève simetri fonksyon  $f(x)$  ki anwo yo. Nou idantifye siy  $f'(x)$  sou chak entèval ki entèresan, epi n analize konpòtman nan chak pwen ekstrèm:

siy de $f'$	entèval	pwen ekstrèm goch	pwen ekstrèm dwat
$f'(x) > 0$	pou $x$ sou entèval $(-\infty, -1)$	$f'(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow -\infty$	$f'(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -1^-$
$f'(x) > 0$	pou $x$ sou entèval $(-1, 0)$	$f'(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -1^+$	$f'(0) = 0$
$f'(x) < 0$	pou $x$ sou entèval $(0, 1)$	$f'(0) = 0$	$f'(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 1^-$
$f'(x) < 0$	pou $x$ sou entèval $(1, \infty)$	$f'(x) \rightarrow -\infty$ $x \rightarrow 1^+$	$f'(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow \infty$

Nou te wè ke derive yon fonksyon pè ( $f(x) = f(-x)$ ) se yon fonksyon epè ( $f(x) = -f(-x)$ ), sa nou ka verifiye sou graf  $f'$  la.

Finalman, nou itilize graf derive  $f'$  pou n jwenn enfòmasyon kalitatif sou graf derive segondè a.

siy de $f''$	entèval	pwen ekstrèm goch	pwen ekstrèm dwat
$f''(x) > 0$	pou $x$ sou entèval $(-\infty, -1)$	$f''(x) \rightarrow 0$ $x \rightarrow -\infty$	$f''(x) \rightarrow +\infty$ $x \rightarrow -1^-$

$$f''(x) \leq 0 \quad \begin{array}{l} \text{pou } x \text{ sou} \\ \text{entèval} \\ (-1, 1) \end{array} \quad f''(x) \xrightarrow{x \rightarrow -1^+} -\infty \quad f''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^-} -\infty$$

$$f''(x) > 0 \quad \begin{array}{l} \text{pou } x \text{ sou} \\ \text{entèval} \\ (1, \infty) \end{array} \quad f''(x) \xrightarrow{x \rightarrow 1^+} +\infty \quad f''(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0$$

Remake an patikilye, nou konnen ke  $f''(0) = -2$  ki dwe yon maksimòm lokal, epi derive yon fonksyon enpè se yon fonksyon pè, ki donk  $f''$  lan dwe simetrik sou aks  $y$ .

**Pwoblèm 111: Kalkil derive ak derive segondè yo**

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left( \frac{-1}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x+1)^2} \right)$$

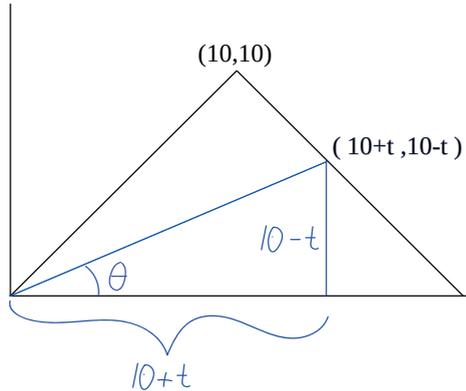
$$f''(x) = \left( \frac{1}{(x-1)^3} - \frac{1}{(x+1)^3} \right)$$

Remake ke derive sa yo koresponn ak sa nou te kalkile yo.

$$\frac{0.5}{(x+1)^2} - \frac{0.5}{(x-1)^2}, \quad -\frac{1}{(x+1)^3} + \frac{1}{(x-1)^3}$$

**Pwoblèm 112: Ang kamera ak aktè**

Ang  $\theta$  a pi fasil pou dekri an fòm enplisit kòm  $\tan(\theta) = \frac{10-t}{10+t}$ .



Nou itilize derivasyon enplisit pou nou jwenn to varyasyon ang kamera a:

$$\sec^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} = \frac{-20}{(10+t)^2}$$

Nou kapab dekri  $\sec(\theta)$  an tèm de  $t$  kòm

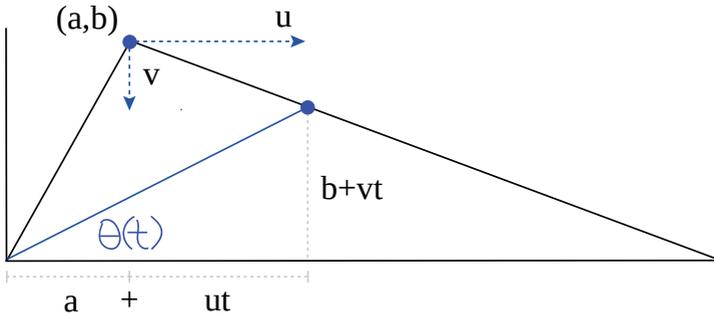
$$\sec(\theta) = \frac{\sqrt{(10+t)^2 + (10-t)^2}}{10+t}$$

Lè nou ranplase valè sa yo nan ekwasyon enplisit ki dekri to varyasyon  $\theta$  nou jwenn

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} &= \frac{-20}{(10+t)^2} \frac{(10+t)^2}{(10+t)^2 + (10-t)^2} \\ &= \frac{-20}{(10+t)^2 + (10-t)^2} \end{aligned}$$

**Pwoblèm 113: Pousantaj relativ**

Dapre desen an,  $\tan(\theta) = \frac{b + vt}{a + ut}$ .



Lè n ap diferansye an fòm enplisit, nou jwenn

$$\begin{aligned} \sec^2(\theta) \frac{d\theta}{dt} &= \frac{v(a + ut) - u(b + vt)}{(a + ut)^2} \\ &= \frac{va - ub}{(a + ut)^2} \\ \frac{d\theta}{dt} &= \cos^2(\theta) \frac{va - ub}{(a + ut)^2} \\ &= \left( \frac{a + ut}{\sqrt{(a + ut)^2 + (b + vt)^2}} \right)^2 \frac{va - ub}{(a + ut)^2} \\ &= \frac{va - ub}{(a + ut)^2 + (b + vt)^2} \end{aligned}$$

**Pwoblèm 114: Pozisyon inisyal ak vitès inisyal**

$$A(t) = \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a} \quad (7.88)$$

$$A(0) = 0 \quad (7.89)$$

$$A'(t) = \frac{-ae^{-at} - -be^{-bt}}{b - a} \quad (7.90)$$

$$A'(0) = \frac{-a + b}{b - a} = 1 \quad (7.91)$$

**Pwoblèm 115: Amplitid Maksimòm**

Pou nou jwenn yon maksimòm, nou verifiye valè fonksyon an nan pwen ekstrèm yo ak nan pwen kritik yo. Pwen ekstrèm yo se  $t = 0$  ak  $t = \infty$ . Nou te wè pi wo ke pozisyon inisyal la se  $A(0) = 0$ .

Yon verifikasyon rapid montre ke  $\lim_{t \rightarrow \infty} A(t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a} = 0$ . (Sa konfime modèl nou an, paske nou atann nou ak yon pòt k ap balanse ap pèdi enèji ak tan.)

Après sa, nou chèche pwen kritik kote  $A'(t) = 0$ .

$$A'(t) = \frac{-ae^{-at} + be^{-bt}}{b - a} = 0 \quad (7.92)$$

$$\implies -ae^{-at} + be^{-bt} = 0 \quad (7.93)$$

$$be^{-bt} = ae^{-at} \quad (7.94)$$

$$e^{-(b-a)t} = \frac{a}{b} \quad (7.95)$$

Nou aplike log sou tou de bò yo:

$$\ln\left(e^{-(b-a)t}\right) \ln\left(\frac{a}{b}\right) \quad (7.96)$$

$$(a - b)t = \ln(a/b) \quad (7.97)$$

$$t = \frac{\ln(a/b)}{a - b} \quad (7.98)$$

Sa ta ka yon minimòm olye ke yon maksimòm, men si  $a \neq b$ ,  $A(t) \geq 0$ , sa konfime ke moman sa a se vrèman tan kote ang lan pi gran.

**Pwoblèm 116: Amotisman Kritik**

Nou vle evalye limit sa a lè  $\lim_{b \rightarrow a} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a}$ . Nou ka rezoud sa swa avèk règle l'Hôpital la, oswa nou ka rekonèt ke sa a se ekspresyon derive a selon  $a$ . Nou pral montre dezyèm metòd la isit la.

$$\lim_{a \rightarrow b} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{b - a} = - \lim_{a \rightarrow b} \frac{e^{-at} - e^{-bt}}{a - b} \quad (7.99)$$

$$= - \frac{d}{da} e^{-at} \quad (7.100)$$

$$= te^{-at} \quad (7.101)$$

Remake ke nou derive ekspresyon an pa rapò ak  $a$  NON pa rapò ak  $t$ .

**Pwoblèm 117: Trase graf la**

Remake ke fo nksyon sa a defini pou  $0 < t < \infty$ .

Anvan nou fè trase a, an n kalkile konpòtman li nan pwen ekstrèm yo, sa vle di lè  $\pm\infty$ . Nan  $+\infty$ , ekspresyon  $xe^{-x}$  se yon fòm endetèmine  $\infty \cdot 0$ , ki donk nou re-ekri li kòm  $\frac{x}{e^x}$  ki se fòm  $\frac{\infty}{\infty}$  epi nou ka itilize règ l'Hôpital's la.

$$xe^{-x} = \frac{x}{e^x} \xrightarrow{\text{L'Hop}} \frac{1}{e^x} \xrightarrow{x \rightarrow \infty} 0.$$

Piske fonksyon an defini sèlman pou  $t > 0$ , nou egzamine konpòtman li lè  $t$  ap pwoche 0 bò kote dwat:  $A(t) = te^{-t}$  ap pwoche 0.

Aprè sa, nou pral kalkile derive yo.

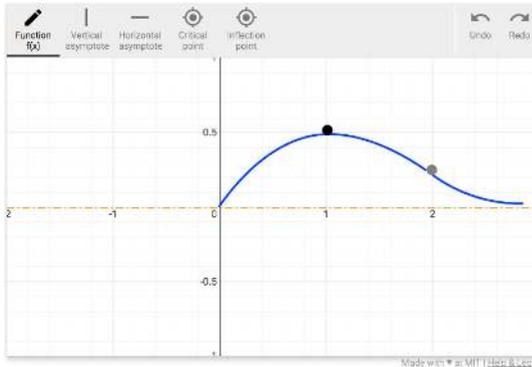
$$\frac{d}{dx} xe^{-x} = -(x-1)e^{-x} \quad (7.102)$$

$$\frac{d^2}{dx^2} xe^{-x} = (x-2)e^{-x} \quad (7.103)$$

Gen yon pwen kritik nan  $t = 1$ . Piske  $e^{-x} > 0$  pou tout  $x$ , sa vle di derive a negatif pou  $x > 1$  epi li pozitif pou  $x < 1$ . Daprè tès premye derive a, pwen kritik sa a se yon maksimòm lokal (ki an reyalyte se maksimòm global fonksyon an).

Gen yon pwen d enfleksyon nan  $x = 2$ , epi fonksyon an gen yon koub ki vire anlè (konvèks) pou  $x > 2$  epi li vire anba (konkav) lè  $x < 2$ .

Lè nou mete tout enfòmasyon sa yo ansanm, nou ka fè yon trase graf fonksyon an.



# Endèks

- akselerasyon
  - Akselerasyon, 163
  - Akselerasyon joumou o somè, 164
  - Pwoblèm akselerasyon, 164
  - pozisyon, Vitès, ak Akselerasyon, 203
- aplikasyon
  - Aplikasyon Tès Premye Derive an, 433
- apwoksimasyon
  - Apwoksimasyon Enstantane Swit, 68
  - Apwoksimasyon lineyè, 212
  - Videyo apwoksimasyon lineyè, 215
  - Apwoksimasyon lineyè, 215
  - Apwoksimasyon lineyè ak Erè nan Mezi, 346
  - Apwoksimasyon lineyè tou pre zewo, 348
  - Konbinezon apwoksimasyon, 349
  - Pratik sou apwoksimasyon erè, 356
  - Apwoksimasyon kwadratik, 368
  - Apwoksimasyon kwadratik pwòch 0, 370
  - Apwoksimasyon kwadratik, 371
  - Pwoblèm apwoksimasyon kwadratik siplemantè, 371
  - Apwoksimasyon kwadratik pwodui yo, 372
  - Konbinezon apwoksimasyon pratik, 374
- arctan
  - Arctan, 289
- asenptop
  - Limit ak asenptop yo, 999
- bato
  - Bato nan yon kanal, 213
- bezbol
  - Bezbol, 408
- chèn
  - Règ chèn nan, 249
  - Konpozisyon ak Anchènman, 252
  - Derivasyon Règ chèn lan, 999
  - Règ chèn lan, 999
  - Règ Kosyan vs Règ pwodwi ak règ chèn, 257
  - Pratike règ chenn lan, 999
- definisyon
  - Definisyon limit a-dwat ak limit a-goch, 4
  - Definisyon limit, 9
  - Definisyon derive a, 70
  - Definisyon delta, 127
  - Definisyon derive kosinis, 179
  - Revizyon definisyon, 188
  - Definisyon fonksyon envès, 278
  - Definisyon ak pwoblèm sou fonksyon enjektif, 281
  - Definisyon nonb e, 304
- derivabilite
  - Derivabilite, 191
- derivasyon
  - Derivasyon sinis nan zewo, 177
  - Derivasyon kosinis nan zewo, 178
  - Derivasyon Règ chèn lan, 999
- derive
  - Ki sa ki derive a?, 66
  - Derive nan yon pwen, 70
  - Definisyon derive a, 70
  - Yon derive negatif?, 72
  - Derive zewo, 73
  - Inite derive yo, 73
  - Entèpretasyon jeyometrik derive a, 78
  - Estimasyon derive yo, 85
  - Plis estimasyon derive yo, 90
  - Kalkil Derive yo, 123
  - Derive dezyèm pwisans, 123
  - Derive fonksyon lineyè yo, 126
  - Lineyarite derive a, 999
  - Prèy derive miltip konstan, 131
  - Derive ak lineyarite, 132
  - Distenksyon ant liy tanjant ak derive, 137
  - Derive nan sifas sèk yo, 144
  - Sipèfisi sèk ak derive, 147
  - Pwodui derive aji sou fonksyon, 147
  - Derive segon ak pwisans, 999
  - Derive segon, 152
  - Entwodiksyon sou derive pi wo pwisans, 152
  - Yon twazyèm derive, 153
  - Derive segon swit, 153
  - Derive segon ak konkavite, 157
  - Derive sinis, 176
  - Definisyon derive kosinis, 179
  - Pratik sou derive yo, 179
  - Derive segon, 180
  - Trase derive a, 190
  - Trasaj derive a yon lòt fwa ankò., 191
  - Dezyèm derive, 193
  - Ki sa derive yon pwodwi pa ye, 999
  - Pwodwi derive?, 999
  - Fonksyon envès ak derive yo, 277
  - Derive fonksyon envès, 285
  - Derive yon fonksyon envès, 286
  - Pratik sou derive envès, 287
  - Derive fonksyon trig envès, 288
  - Fonksyon eksponansyèl yo ak derive yo, 300
  - Jwenn derive a, 302
  - Derive yon fonksyon eksponansyèl, 302
  - Logaritm ak Derive yo, 311
  - Derive Logaritm natirèl la, 316
  - Pratik derive logaritm ak ekspozan yo, 320
  - Tès Premye Derive an, 431
  - Aplikasyon Tès Premye Derive an, 433
  - Pi lwen Tès Derive Premye a, 434
  - Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an, 435
  - Tès Dezyèm Derivasyon an, 436
  - Tès Dezyèm Derivasyon pratik, 437
  - Reprezantasyon Grafik ak Dezyèm Derive, 438
  - Twazyèm Derivasyon (Opsyonèl), 442

- diferansyasyon
  - Diferansyasyon sinis ak kosinis, 999
  - Diferansyasyon Enplisit, 265
  - Diferansyasyon logaritm lan, 999
  - Diferansyasyon fonksyon eksponansyèl yo, 316
  - Metòd 2: diferansyasyon logaritmik, 318
- dilatasyon
  - Dilatasyon tanporèl, 350
- distenksyon
  - Distenksyon ant liy tanjant ak derive, 137
- divizyon
  - Limit ak divizyon, 43
  - Règ pou w kalkile limit pou divizyon, 46
  - Itilizasyon règ pou w kalkile limit divizyon yo, 999
  - Limit divizyon kesyon, 48
  - Divizyon ki enplike limit enfini, 53
- domèn
  - Domèn ak Plaj, 314
- dèlta
  - Definisyon dèlta, 127
- egziste
  - Poukisa e egziste, 305
- ekipotansyèl
  - Egzanp pratik: Yon koub ekipotansyèl, 268
- eksis
  - Trase derive a, 190
  - Trasaj derive a yon lòt fwa ankò., 191
  - Trase fonksyon an, 456
  - Pwoblèm eskis fonksyon, 468
  - Eskis Graf, 536
- eksplore
  - Eksplore poukisa se pa sa, 226
- eksponansyèl
  - Fonksyon eksponansyèl yo ak derive yo, 300
  - Derive yon fonksyon eksponansyèl, 302
  - Diferansyasyon fonksyon eksponansyèl yo, 316
  - Fòm Eksponansyèl Endetèmèine, 464
  - Tretman lòt fòm eksponansyèl endetèmèine, 466
- ekstrèm
  - Teyorèm Valè Ekstrèm, 486
- ekstrèmòm
  - Jwenn Ekstrèmòm yo, 487
  - Kandida pou Ekstrèmòm yo, 487
- ekwasyon
  - Ekwasyon yon liy tanjant, 90
  - Evolisyon Ekwasyon yo, 535
- endetèmèine
  - Egzanp Limit Endetèmèine, 459
  - Lòt Fòm Endetèmèine yo, 462
  - Lòt Fòm Endetèmèine, 463
  - Fòm Eksponansyèl Endetèmèine, 464
  - Tretman lòt fòm eksponansyèl endetèmèine, 466
- enfleksyon
  - Pwen d enfleksyon, 438
- enjektif
  - Definisyon ak pwoblèm sou fonksyon enjektif, 281
- enplisit
  - Diferansyasyon Enplisit, 265
  - Diferansye enplisitman sèk la, 267
  - Fonksyon enplisit yo, 267
- enstantane
  - Mwayèn vs. Enstantane, 67
  - Apwoksimasyon Enstantane Swit, 68
- entwisyon
  - Entwisyon pou liy tanjant yo, 80
  - Intwisyon jeyometrik, 369
- entèmedyè
  - Teyorèm Valè Entèmedyè, 31
- entèpretasyon
  - Entèpretasyon jeyometrik derive a, 78
- entèval
  - Lòt entèval yo, 490
- envès
  - Fonksyon envès ak derive yo, 277
  - Kisa yon fonksyon envès ye?, 278
  - Definisyon fonksyon envès, 278
  - Kesyon sou envès, 279
  - Grafik envès yo, 999
  - Eske chak fonksyon gen yon envès?, 280
  - Ki fonksyon ki gen envès?, 281
  - Envès Pasyèl, 282
  - Envès fonksyon trigonometrik, 283
  - Derive fonksyon envès, 285
  - Derive yon fonksyon envès, 286
  - Pratik sou derive envès, 287
  - Derive fonksyon trig envès, 288
- erè
  - Apwoksimasyon lineyè ak Erè nan Mezi, 346
  - Erè nan mezi, 352
  - Kontinyasyon sou estimasyon erè a, 354
  - Pratik sou apwoksimasyon erè, 356
- estimasyon
  - Plis estimasyon derive yo, 90
  - Kontinyasyon sou estimasyon erè a, 354
- estrateji
  - Estrateji jeneral ak egzanp pratik, 454
  - Estrateji Rapò Relatif, 999
- evadman
  - Evadman prizon, 509
- evolisyon
  - Evolisyon Ekwasyon yo, 535
- fonksyon
  - Katalòg fonksyon kontini yo, 30
  - Yon lòt fonksyon, 51
  - fonksyon lineyè, 86
  - Derive fonksyon lineyè yo, 126
  - Pwodui derive aji sou fonksyon, 147
  - Liy tanjant apwoksimatif fonksyon an, 215
  - Derive tout fonksyon trigonometrik, 999
  - Fonksyon ki pi konplike, 255
  - Fonksyon enplisit yo, 267
  - Fonksyon envès ak derive yo, 277

- Kisa yon fonksyon envès ye?, 278
- Definisyon fonksyon envès, 278
- Èske chak fonksyon gen yon envès?, 280
- Ki fonksyon ki gen envès?, 281
- Definisyon ak pwoblèm sou fonksyon enjektif, 281
- Envès fonksyon trigonometrik, 283
- Fonksyon trigonometrik pou fonksyon arc-trig, 284
- Derive fonksyon envès, 285
- Derive yon fonksyon envès, 286
- Derive fonksyon trig envès, 288
- Fonksyon eksponansyèl yo ak derive yo, 300
- Derive yon fonksyon eksponansyèl, 302
- Pwopriyete fonksyon logaritm lan, 313
- Diferansyasyon fonksyon eksponansyèl yo, 316
- Pwodui fonksyon yo, 351
- Fonksyon konplike, 374
- Trase fonksyon an, 456
- Pwoblèm eskis fonksyon, 468
- fòmil
  - Jwenn yon fòmil, 70
- glasyè
  - Volim yon glasyè, 514
- GPS
  - GPS: sansibilite mezi a, 412
- grafik
  - Limit a pati graf yo, 10
  - Motivasyon grafik, 174
  - Grafik envès yo, 999
  - Reprezantasyon Grafik ak Pwen Kritik, 999
  - Reprezantasyon Grafik ak Dezyèm Derive, 438
  - Reprezantasyon grafik, 453
  - Pwen kritik nan graf, 455
  - Eskis Graf, 536
- joumou
  - Jete yon joumou, 71
  - Akselèrasyon joumou o somè, 164
- kalkil
- kalkile
  - Kòman nou kapab kalkile limit yo?, 21
  - kòman nou kapab kalkile limit kosyan yo?, 42
- kamera
  - Ang Kamera, 538
- kanal
  - Bato nan yon kanal, 213
- konbinezon
  - Konbinezon apwoksimasyon, 349
  - Konbinezon apwoksimasyon pratik, 374
- konkavite
  - Konkavite, 156
  - Derive segon ak konkavite, 157
  - Detèminasyon konkavite, 158
  - Konkavite, 156
- konpozisyon
  - Konpozisyon ak Anchènman, 252
- konstan
  - Prèv derive miltip konstan, 131
- kontini
  - Katalòg fonksyon kontini yo, 30
- kontinite
  - Kontinuite, 22
  - Kesyon sou kontinuite, 24
  - Plis kesyon sou kontinuite an, 25
  - Kontinuite global, 27
  - Kontinuite swit, 27
  - Lwa pou w kalkile limit yo ak kontinuite, 28
  - Revizyon sou kontinuite, 29
- konvèjans
  - To de konvèjans, 386
  - Echèk de konvèjans, 387
- kosinis
  - Diferansyasyon sinis ak kosinis, 999
  - Derivasyon kosinis nan zewo, 178
  - Definisyon derive kosinis, 179
- kosyan
  - Limit kosyan yo, 42
  - kòman nou kapab kalkile limit kosyan yo?, 42
  - Kosyan ti nonb tou piti yo, 43
  - Règ kosyan an, 236
  - Entwodiksyon règ kosyan an, 238
  - Règ kosyan an, 240
  - Règ kosyan an: yon siyifikasyon, 240
  - Pratike règ kosyan an, 242
  - Règ Kosyan vs Règ pwodwi ak règ chèn, 257
- kritik
  - Reprezantasyon Grafik ak Pwen Kritik, 999
  - Pwen kritik, 428
  - Yon tès pou pwen kritik, 432
  - Pwen kritik nan graf, 455
- kwadratik
  - Apwoksimasyon kwadratik, 368
  - Pi bon ajisteman kwadratik, 369
  - Apwoksimasyon kwadratik pwòch 0, 370
  - Apwoksimasyon kwadratik, 371
  - Pwoblèm apwoksimasyon kwadratik siplemantè, 371
  - Apwoksimasyon kwadratik pwodui yo, 372
- kwasans
  - Zòn kwasans, 228
- Leibniz
  - Notasyon Leibniz, 143
- lenfini
  - Limit lenfini 2, 52
  - Limit nan lenfini, 441
- limit
  - Introdiksyon sou Limit, 2
  - Limit yon bò, 999
  - Definisyon limit a-dwat ak limit a-gocho, 4
  - Kèk limit adisyonèl, 5
  - Konpòtman limit posib, 7

- Kesyon rapid sou limit yo, 8
- Limit global, 9
- Definisyon limit, 9
- Limit a pati graf yo, 10
- Limit LawsRèg pou w kalkile yo, 999
- Kòman nou kapab kalkile limit yo?, 21
- Lwa pou w kalkile limit yo ak kontinuite, 28
- Limit kosyan yo, 42
- kòman nou kapab kalkile limit kosyan yo?, 42
- Limit ak divizyon, 43
- Règ pou w kalkile limit pou divizyon, 46
- Règ limit yo, 47
- Itilizasyon règ pou w kalkile limit divizyon yo, 999
- Limit divizyon kesyon, 48
- Limit ki pa egziste yo, 50
- Limit lenfni 2, 52
- Ki limit la?, 53
- Divizyon ki enplike limit enfni, 53
- Limit liy sekant yo, 83
- Limit nan lenfni, 441
- Limit ak asenptop yo, 999
- Egzanp Limit Endetèmine, 459
- lineyarite
  - Lineyarite derive a, 999
  - Linearite swit, 130
  - Derive ak lineyarite, 132
  - Egzanp lineyarite, 133
  - Egzanp Lineyarite, 134
- lineyè
  - fonksyon lineyè, 86
  - Derive fonksyon lineyè yo, 126
  - Lineyarite derive a, 999
  - Linearite swit, 130
  - Derive ak lineyarite, 132
  - Egzanp lineyarite, 133
  - Egzanp Lineyarite, 134
  - Apwoksimasyon lineyè, 212
  - Videyo apwoksimasyon lineyè, 215
  - Apwoksimasyon lineyè, 215
  - Depase Linyè, 216
  - Apwoksimasyon lineyè ak Erè nan Mezi, 346
  - Apwoksimasyon lineyè tou pre zewo, 348
- logaritm
  - Logaritm ak Derive yo, 311
  - Pwopriyete fonksyon logaritm lan, 313
  - Diferansyasyon logaritm lan, 999
  - Derive Logaritm natirèl la, 316
  - Metòd 2: diferansyasyon logaritmik, 318
  - Pratik derive logaritm ak ekspozan yo, 320
- lwa
  - Limit LawsRèg pou w kalkile yo, 999
  - Lwa pou w kalkile limit yo ak kontinuite, 28
- lwil
  - Tank lwil, 338
  - Pwoblèm flit lwil, 507
  - devèsman lwil swit, 507
- machin
  - Prè pou Machin, 373
- metòd
  - Metòd 2: diferansyasyon logaritmik, 318
  - Metòd Newton, 383
  - Rasin ak Metòd Newton, 384
  - Metòd Newton an jeneral, 385
  - Metòd Newton, 385
  - Ki jan metòd Newton lan ka echwe?, 387
  - Metòd Newton, 410
- mezi
  - Apwoksimasyon lineyè ak Erè nan Mezi, 346
  - Erè nan mezi, 352
  - GPS: sansibilite mezi a, 412
- mwayèn
  - Mwayèn vs. Enstantane, 67
  - To varyasyon mwayèn ak pant sekant, 81
- natirèl
  - Derive Logaritm natirèl la, 316
- negatif
  - Yon derive negatif?, 72
- Newton
  - Metòd Newton, 383
  - Rasin ak Metòd Newton, 384
  - Metòd Newton an jeneral, 385
  - Metòd Newton, 385
  - Ki jan metòd Newton lan ka echwe?, 387
  - Metòd Newton, 410
- nimerik
  - Rezilta nimerik, 303
- notasyon
  - Notasyon Leibniz, 143
  - Notasyon, 144
  - Notasyon Gran-O, 372
- objektif
  - Objekif, 999
  - Objektif, 66
- pant
  - To varyasyon mwayèn ak pant sekant, 81
  - Pant liy sekant yo, 82
- pasyèl
  - Envès Pasyèl, 282
- ping pong
  - Boul ping pong, 407
- plaj
  - Domèn ak Plaj, 314
- polinòm
  - Polinòm, 192
- pozisyon
  - Pozisyon, Vitès, ak Akselasyon, 203
  - Konpozisyon ak Anchènman, 252
- prizon
  - Evadman prizon, 509
- prèv
  - Prèv derive miltip konstan, 131

- Prèy règ puisans lan pou tout nonb reyèl, 319
- pwisans
  - Derive dezyèm pwisans, 123
  - Videyo sou Règ Puisans, 999
  - Egzanp Règ Puisans, 999
  - Règ puisans prolonje, 135
  - Kesyon jeneral sou règ puisans lan, 136
  - Derive segon ak pwisans, 999
  - Règ puisans revize, 241
  - Règ puisans pou ekspozan rasyonèl, 267
  - Prèy règ puisans lan pou tout nonb reyèl, 319
- pwodwi
  - Pwodui derive aji sou fonksyon, 147
  - Règ pwodwi, 225
  - Ki sa derive yon pwodwi pa ye, 999
  - Pwodwi derive?, 999
  - Règ pwodwi, 229
  - Règ pwodwi, fòmèlman, 231
  - Pratik règ pwodui, 999
  - Règ Kosyan vs Règ pwodwi ak règ chèn, 257
  - Pwodui fonksyon yo, 351
  - Apwoksimasyon kwadratik pwodui yo, 372
- pwojè
  - Pwojè, 355
- rapò relatif
  - Rapò Relatif, 999
  - Estrateji Rapò Relatif, 999
- rasin
  - Rasin yo, 33
  - Rasin ak Metòd Newton, 384
- rasyonèl
  - Règ puisans pou ekspozan rasyonèl, 267
- reprèzantasyon
  - Reprèzantasyon Grafik ak Pwen Kritik, 999
  - Reprèzantasyon Grafik ak Dezyèm Derive, 438
  - Reprèzantasyon grafik, 453
- rezoud
  - Rezoud pwoblèm nan, 347
- règ
  - Règ pou w kalkile yo, 999
  - Limit Laws Règ pou w kalkile yo, 999
  - Règ pou w kalkile limit pou divizyon, 46
  - Règ limit yo, 47
  - Itilizasyon règ pou w kalkile limit divizyon yo, 999
  - Videyo sou Règ Puisans, 999
  - Egzanp Règ Puisans, 999
  - Règ puisans prolonje, 135
  - Kesyon jeneral sou règ puisans lan, 136
  - Règ pwodwi, 225
  - Règ pwodwi, fòmèlman, 231
  - Pratik règ pwodui, 999
  - Règ kosyan an, 236
  - Entwodiksyon règ kosyan an, 238
  - Règ kosyan an, 240
  - Règ kosyan an: yon siyifikasyon, 240
  - Règ puisans revize, 241
  - Pratik règ kosyan an, 242
  - Règ chèn nan, 249
  - Derivasyon Règ chèn lan, 999
  - Règ chèn lan, 999
  - Règ Kosyan vs Règ pwodwi ak règ chèn, 257
  - Pratik règ chèn lan, 999
  - Règ puisans pou ekspozan rasyonèl, 267
  - Prèy règ puisans lan pou tout nonb reyèl, 319
  - Règ l'Hospital la, 999
  - Jistifikasyon yon ka espesyal règ l'Hospital la vèsyon 1, 460
  - Aplikasyon règ l'Hospital la plizyè fwa, 999
  - Gade avan ou itilize règ l'Hôpital la, 999
- sansibilite
  - GPS: sansibilite mezi a, 412
- sekant
  - Liy sekant, 81
  - To varyasyon mwayèn ak pant sekant, 81
  - Pant liy sekant yo, 82
  - Sekant ak liy tanjant yo, 83
  - Limit liy sekant yo, 83
- sinis
  - Diferansyasyon sinis ak kosinis, 999
  - Derive sinis, 176
  - Derivasyon sinis nan zewo, 177
  - Derivasyon kosinis nan zewo, 178
  - Definisyon derive kosinis, 179
- sèk
  - Derive nan sifas sèk yo, 144
  - Sipèfisi sèk ak derive, 147
- sèn
  - Miz an plas sèn nan, 237
- sòm
  - Sòm yo, 131
- tan
  - Dilatasyon tanporèl, 350
  - Aplikasyon règ l'Hospital la plizyè fwa, 999
- tanjant
  - Liy tanjant, 79
  - Entwisyon pou liy tanjant yo, 80
  - Sekant ak liy tanjant yo, 83
  - Lè liy tanjant lan pa egziste, 86
  - Ekwasyon yon liy tanjant, 90
  - Distenksyon ant liy tanjant ak derive, 137
  - Liy tanjant, 189
  - Liy tanjant apwoksimatif fonksyon an, 215
- tank
  - Tank lwil, 338
- teyorèm
  - Teyorèm Valè Entèmedyè, 31

- Teyorèm Valè Ekstrèm, 486
- tiwolyèn
  - Yon pwoblèm ak yon tiwolyèn, 346
  - Tiwolyèn, 496
- trigonometrik
  - Derive tout fonksyon trigonometrik, 999
  - Envès fonksyon trigonometrik, 283
  - Fonksyon trigonometrik pou fonksyon arc-trig, 284
- TVE
  - Entwo TVE, 30
- tès
  - Tès Premye Derive an, 431
  - Yon tès pou pwen kritik, 432
  - Tès Premye Derive an, 432
  - Aplikasyon Tès Premye Derive an, 433
- Pi lwen Tès Derive Premye a, 434
- Fini ak Tès Dezyèm Derivasyon an, 435
- Tès Dezyèm Derivasyon an, 436
- Tès Dezyèm Derivasyon pratik, 437
- varyasyon
  - To de varyasyon, 999
  - To varyasyon mwayèn ak pant sekant, 81
  - Chanjman inite, 250
- vitès
  - Pozisyon, Vitès, ak Akselerasyon, 203
- vitèsmèt
  - Vitèsmèt, 200
- zòn
  - Sipèfisi sèk ak derive, 147
  - Zòn kwasans, 228