Задачі вступного іспиту до програми Юліна Мрія

Опис програми. Юліна Мрія – поглиблена дослідницька програма для талановитих школярів з України, починаючих 10-11-й клас у вересні 2024. У рамках програми школярі будуть зустрічатися онлайн раз на тиждень з метою вивчення передових розділів математики за межами шкільної програми та роботи над дослідницькими проектами за допомогою академичних менторів з математичного факультету MIT та інших університетів США та Європи. Программа доступна українською, англійською та російською мовами.

Юліна Мрія – ініціатива PRIMES Program for Research in Mathematics, Engineering and Science for High School Students у Massachusetts Institute of Technology. Робочі групи в Юліній Мрії працюють за прикладом PRIMES-USA, онлайн секції PRIMES. Юліна Мрія присв'ячена пам'яті Юлії Здановської, 21-річної випускниці Київського Національного Університету, срібної медалистки Європейської математичної олімпіади серед дівчат 2017 року, та вчительки для програми Teach for Ukraine, яка була вбита російською ракетою у її рідному місті Харкові. Ми сподіваємося допомогти іншим українським хлопчикам та дівчатам досягти її мрії.

Загальні поради. Деякі з цих завдань доволі складні. Ми не радимо залишати їх на останній день. Думайте про них час від часу на протязі декількох дней. Спробуйте розв'язати щонайбільше задач, але ми рекомендуємо подавати заявку, якщо Ви розв'язали щонайменше 3 задачі. Це включає в себе частково розв'язані задачі.

Формат розв'язків. Ви можете записувати розв'язки українською, англійською чи російською мовою, на Ваш вибір. Ви можете або набрати їх, чи написати від руки та отсканувати. Будь ласка, збережіть Ваші розв'язки (найкразе у форматі PDF), завантажте до мережі, та надайте посилання у Вашій заявці. Будьте уважні, що файл повинен бути доступним за посиланням та не потребує спеціального дозволу для завантаження. Назва файлу повинна починатися з Вашого прізвища, наприклад "lastname-solutions.pdf". Напишіть Ваше повне ім'я у заголовку файлу.

Напишіть не лише відповіді, а і докази (та часткові рохв'язки/результати/ідеї, якщо задачу не вдалося вирушити повністю). Зокрема вступу до програми, Ваші розв'язки будуть використовані при призначені проекту для Вашої групи, якщо Вас буде прийнято до програми. PDF файли згенеровані LATEX є бажаними, але PDF файли згенеровані Word чи скани розв'язків записанних рукою також приймається.

Академічна доброчесність. Вам дозволяється використовувати будь які ресурси, за вийнятком допомоги інших людей. Це включає в себе калькулятори, комп'ютери, книги, та мережу Інтернет. У разі використовування книг чи матеріалів онлайн, будь ласка, надайте посилання у роботі.

Контактна інформація. Якщо у Вас є якісь питання, будь ласка, напишіть координатору програми Дмитру Матвєєвському, yuliasdream@mit.edu.

Завдання

Позачення. $\mathbb{Z}$ та $\mathbb{N}$ позначають множини цілих та натуральних чисел відповідно. Також, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ позначає множину остач при діленні на 0, а $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^{\times}$ ту саму множину без 0. Для двух натуральних чисел k та n, $\gcd(k, n)$ позначає найбільший спільний дільник k та n.

Задача 1. Гоґвортс має досить своєрідні звички та ігри.

(a) Вболівальники Ґрифіндору говорять правду якщо Ґрифіндор виграє та брешуть якщо Ґрифіндор програє. Вболівальники Гафелпафу, Рейвенклов та Слизерину поводяться так само. Після двох квідичних матчів (без нічийних результатів, кожна команда зіграла рівно один матч), серед усіх чарівників, дивившихся трансляцію, провели опитування. 500 відповили позитивно на питання “Чи підтримуєте Ви Ґрифіндор?", 600 відповили позитивно на питання “Чи підтримуєте Ви Гафелпаф?", 300 відповили позитивно на питання “Чи підтримуєте Ви Рейвенклов?", та 200 відповили позитивно на питання “Чи підтримуєте Ви Слизерин?". Скільки чарівників підтримує кожну з команд?

Примітка: Кожен чарівник підтримує рівно одну з команд.

(b) Після Хелловіну залишилося відро з N цукерками ($N \geq 2$). Друзі Герміона Ґрейнджер та Рон Візлі по черзі куштують цукерки з відра, керуючись такими правилами. На першому ході, Герміона повинна з'їсти хоча б одну цукерку але не може з'їсти усі цукерки у відрі. Далі по черзі кожен з них має з'їсти хоча б одну цукерку, але не більше ніж 9/4 помножити на кількість цукерок взятих іншим другом минулого ходу. Виграє той, хто з'їсть останню цукерку. Припустимо, що Герміона та Рон грають оптимально.

(i) Для яких N у Герміони є виграшна стратегія? Поясніть свою відповідь.

(ii) Дайте відповідь на попереднє питання, де 9/4 замінено на 3.

Задача 2. Припустимо, що кожна сторона даного опуклого шестикутника має відстань 1 від початку координат (це означає, що кожна сторона лежить на прямій, дистанція від якої до початку координат дорівнює 1). Яка мінімальна можлива площа цього шестикутника? Поясніть свою відповідь.

Задача 3. Для додатних чисел $a, b \in \mathbb{Z}$, ми визначаємо $\mathrm{pow}(a, b)$ індуктивно за такими правилами: $\mathrm{pow}(a, 1) = a$ та $\mathrm{pow}(a, b) = a^{\mathrm{pow}(a, b-1)}$ якщо $b \geq 2$.

(a) Доведіть, що для усіх додатних чисел $k, n \in \mathbb{Z}$ таких, що $\gcd(k, n) = 1$, існують $c \in \mathbb{Z}$, $0 \leq c < n$ та $M \in \mathbb{N}$ такі що $\mathrm{pow}(k, m) \equiv c \pmod n$ для всіх $m \in \mathbb{Z}$, $m \geq M$. Визначимо $f_n(k)$ як c.

(b) Доведіть, що для усіх додатних цілих чисел n, є включення $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times \subseteq \mathrm{Im}(f_n)$, де $\mathrm{Im}(f_n)$ є зображенням функції $f_n \colon \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Задача 4.

(a) Опишіть алгоритм, разом з доказом, як порахувати усі можливі способи написання даного $n \in \mathbb{N}$ як суму квадратів послідовних натуральних чисел. Нариклад, для $n = 25$, ми можемо написати $25 = 5^2$ та $25 = 3^2 + 4^2$. Включіть свій код як частину вашого розв'язку (Ви можете використовувати Вашу улюблену мову програмування).

(b) Яка часова складність вашого алгоритму?

(c) Яке перше число яке НЕ є ідеальним квадратом та може бути написано як сума квадратів послідовних натуральних чисел хоча б трьома різними способами. Порада: це число менше за 150000.

Задача 5. Непорожня множина S додатних дійсних чисел називається *адитивною множиною* якщо $x + y \in S$ для всіх $x, y \in S$. Нехай S адитивна множина. Елемент S називається *нерозкладним* якщо він не є сумою двух (не обов'язково різних) елементів S, та S називається *розкладною*, якщо кожен елемент S може бути написан як сума скінченого числа нерозкладних елементів (дозволяючи повтори та сум, що складаються з лише одного доданка). Доведіть, що якщо S адитивна множина та існує строго спадна послідовність $(x_n)_{n\geq 1}$ така що $\{x_n, x_n - x_{n+1} : n \in \mathbb{N}\} \subseteq S$, то існує адитивна підмножина S, що не є розкладною.