

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN



Faculté des Sciences
Institut de Physique Théorique

Ondelettes et Détection de Sources Gamma dans l'Univers.

Mémoire présenté en vue de
l'obtention du diplôme de
licencié en sciences physiques
par **Laurent Demanet**

Promoteur : **Jean-Pierre Antoine**

Louvain-la-Neuve
Année académique 2000-2001

J'aimerais avant tout exprimer ma gratitude à mon promoteur, Jean-Pierre Antoine, pour avoir lancé dans le cadre de ce mémoire une collaboration avec le CEA/Saclay et en particulier l'équipe d'Isabelle Grenier. Son enseignement éclairant m'aura initié aux joies interdisciplinaires et trop peu connues de la "physique mathématique appliquée".

Je remercie vivement Laurent Jacques pour sa disponibilité, sa relecture et ses conseils pratiques indispensables. L'héritage de l'implémentation des ondelettes sur la sphère et de la toolbox YAWTb pour Matlab m'auront épargné un travail considérable.

Le point de vue complémentaire d'astrophysicien et d'expérimentateur de Régis Terrier du CEA/Saclay est toujours venu à point dans ma recherche, je lui en suis également reconnaissant. Il est entre autres responsable des illustrations les plus intéressantes du chapitre 4. Merci aussi pour la relecture.

Enfin, merci à tous mes amis et à ma famille sans qui tout ceci n'aurait pu être possible.

Table des matières

Notations	3
Introduction	5
I Détection de sources gamma	7
1 Contexte	9
1.1 Objectifs et découvertes scientifiques	9
1.2 Caractéristiques du télescope et des données	10
1.3 Modélisation des données	13
1.3.1 Le comptage	13
1.3.2 La stationnarité	14
1.3.3 Le binning	15
1.3.4 La PSF	16
1.3.5 L'exposition	17
1.3.6 Agrégation des cartes	18
2 Méthodes existantes	19
2.1 Méthodes paramétriques	19
2.2 Méthodes nonparamétriques	20
2.2.1 La transformée continue en ondelettes	20
2.2.2 Estimation du fond	23
2.2.3 Seuillage	25
3 Améliorations	27
3.1 La transformée continue en ondelettes sur la sphère	27
3.2 Détermination des seuils de détection	29
3.3 Estimation du fond multi-échelle	37
3.4 Déconvolution et détection de sources	37
3.5 Filtrage directionnel et détection de sources isotropes.	38

4	Traitement des données	41
4.1	Cartes sur la planisphère	41
4.2	Seuils de détection	42
II	Ondelettes directionnelles sur la sphère	49
5	Localisation temps-échelle et position-échelle	51
5.1	Localisation en temps et en fréquence	51
5.2	Localisation temps-fréquence : transformée de Fourier à fenêtres	52
5.2.1	Le cas 1D	53
5.2.2	Le cas 2D	54
5.3	Localisation temps-échelle : transformée en ondelettes	56
5.3.1	Le cas 1D	56
5.3.2	Le cas 2D	59
5.4	Mécanique quantique et localisation dans l'espace de phase	62
6	Localisation angulaire et directionnalité	65
6.1	Critères classiques de directionnalité	65
6.2	Un critère universel de directionnalité	66
7	Les ondelettes directionnelles sur la sphère	71
7.1	Des directions sur la sphère?	71
7.2	Critères de directionnalité sur la sphère	73
7.2.1	Une condition nécessaire	73
7.2.2	Une condition nécessaire et suffisante	74
7.3	Implémentation	76
7.4	Détection de sources gamma isotropes	80
	Conclusion	83
A	Généralisations et démonstrations	85
A.1	Généralisation multivariée de la proposition 3.1	85
A.2	Généralisation normale de la proposition 3.1	86
A.3	Démonstration de la proposition 6.1	87
A.4	Démonstration de la proposition 7.1	88
A.5	Démonstration de la proposition 7.4	89

Notations

$\overline{\psi}$	Complexe conjugué de ψ
S^2 , “la sphère”	La sphère unité de \mathbb{R}^3 , d'équation $ \mathbf{x} ^2 = 1$
$SO(N)$	Groupe des rotations (matrice orthogonales) dans \mathbb{R}^N
Y_l^m	Harmoniques sphériques
$\hat{f}(l, m)$	Coefficients de Fourier sur la sphère : $\langle Y_l^m f \rangle$
η	Un point sur la sphère S^2
$d\eta$	Mesure $SO(3)$ -invariante sur la sphère
$[\eta]$	L'élément de $SO(3)$ qui correspond à η par la section $[\cdot] : S^2 \rightarrow SO(3)$.
(θ, ϕ)	Coordonnées sur la sphère : θ est la colatitute et ϕ est la longitude.
θ'	3e angle d'Euler, pour la rotation d'une ondelette sphérique sur elle-même.
sr	Stéradian (unité d'angle solide)
Φ	Densité de flux de photons en $sr^{-1}cm^{-2}s^{-1}$
ϵ	Exposition en cm^2s
X	Variable aléatoire $Po(\Phi, \epsilon)$
$f_Y(y)$	Fonction densité de probabilité de la v.a. Y
$\hat{f}(s)$	Transformée de Laplace bilatère (chap. 3) : $\hat{f}(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{st} dt$
$\hat{f}(k)$	Transformée de Fourier 1-D (chap. 5) : $\hat{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-ikt} dt$
$\hat{f}(\mathbf{k})$	Transformée de Fourier n-D (chap. 5) : $\hat{f}(\mathbf{k}) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\mathbf{x})e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} d\mathbf{x}$
$\langle \cdot \cdot \rangle$	Produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^n)$ ou $L^2(S^2)$, linéaire à droite
$\langle A \rangle_f$	Valeur moyenne de l'opérateur A dans l'état f , $\frac{\langle f A f \rangle}{\langle f f \rangle}$.
$(\Delta A)_f^2$	Variance de l'opérateur A dans l'état f , $\langle f (A - \langle A \rangle_f)^\dagger (A - \langle A \rangle_f) f \rangle_f$

Introduction

Les physiciens se doutaient depuis longtemps de l'existence de sites émissifs de rayonnement de très haute énergie dans l'univers avant que les premiers photons gamma venant de l'espace soient observés vers la fin des années 1960. C'est entre autres grâce aux satellites militaires américains Vela, destinés à traquer les essais nucléaires russes dans l'espace, que les premières bouffées de rayonnement gamma extraterrestre ont été détectées au début des années 70. Les missions dans l'espace se sont alors succédées pour dresser une carte grossière de l'émission galactique ainsi qu'un bref catalogue de quelques sources totalement inattendues. Après des débuts un peu difficiles dans les années 80 à cause de lancements ratés (Challenger en 1986 par exemple), l'âge d'or de l'astronomie gamma a commencé il y a une dizaine d'années grâce au satellite *Compton*. Une de ses expériences, *EGRET*, est à la base de la dernière carte du ciel gamma : une vraie mine d'or pour les astrophysiciens. Par exemple, la détection de sursauts très brefs et très localisés de photons gamma nous laisse sans réponse quant à leur origine, et la présence d'un halo entourant la galaxie est au centre des débats sur la masse manquante de l'univers.

L'astronomie gamma est à juste titre appelée "astronomie de l'extrême" au vu des challenges expérimentaux qu'elle impose. A des énergies au-delà de 30 keV, le rayonnement gamma est en effet bloqué par l'atmosphère et n'est pas focalisable à la manière de la lumière visible ou même des rayons X. Ceci explique pourquoi les seules expériences convaincantes sont des détecteurs appropriés embarqués à bord de satellites. Le problème de la détection de sources gamma est également hautement intéressant du point de vue de l'analyse des données, et c'est principalement ce point qui sera traité ici. A la croisée des techniques classiques de traitement d'image et d'estimation statistique, vient s'ajouter la difficulté due à la gamme d'énergie explorée. C'est dans le rayonnement gamma que les photons détectés sont les plus rares. Dès lors, quelle significativité donner à une poignée de photons qui semblent indiquer une structure sur un fond diffus lui-même très pauvre ? Quels critères permettent d'extraire une source réelle du bruit de fond ? Au vu de l'importance scientifique de ces questions, il est nécessaire de leur donner une réponse soignée.

Le premier chapitre nous donne l'occasion de nous familiariser avec le problème. Après un bref passage en revue des motivations scientifiques et de l'instrumentation d'EGRET, nous clarifions les questions conceptuelles sur la modélisation des données et en particulier les statistiques de comptage. Il s'agit d'une étape importante qui est à notre goût trop souvent passée sous silence. Ceci impose des lignes de conduite pour le chapitre 2, où les méthodes classiques de détection de sources (gamma ou autres) sont passées en revue et

leurs avantages et inconvénients sont discutés. C'est ici que la transformée continue en ondelettes dans le plan fait son entrée. Les chapitres suivants tentent de compléter et de corriger ces méthodes sous plusieurs angles :

- Les récentes *ondelettes sur la sphère* trouvent ici une première application naturelle. Les données, intrinsèquement sur la planisphère céleste, perdent en effet à être filtrées de manière classique après projection sur un plan.
- Une fois le filtre choisi, les *seuils statistiques de détection* de source gagnent à être déterminés de manière précise. Les approches existantes présentent toutes cette étape comme étant approximative, ad hoc, et parfois laborieuse pour arriver à des résultats acceptables. La difficulté principale tient en ce que le “bruit de fond” est hautement structuré et non-uniforme. En tenant compte de cette information, nous donnons une procédure exacte et rapide pour le calcul de ces seuils.
- Il faut ensuite remettre en question l'idée de faire un filtrage linéaire si on veut améliorer substantiellement les détections. La proposition que nous avons retenue se base de manière cruciale sur les *ondelettes directionnelles*, et a pour but d'éliminer les fausses détections des méthodes classiques. Les premiers essais sont prometteurs.

En particulier, le chapitre 3 explique ces idées alors que le chapitre 4 présente leur application aux données d'EGRET.

La deuxième partie est ensuite dédiée au développement d'un nouvel outil, les *ondelettes directionnelles sur la sphère*, en vue d'étendre la dernière méthode proposée. Les chapitres 5 et 6 développent l'idée de *localisation* de signaux à l'aide de la transformée en ondelette, avec pour objectif de reformuler le critère de *directionnalité* d'une ondelette en vue de le généraliser à la sphère. Le dernier chapitre, enfin, détaille la définition des ondelettes directionnelles sur la sphère, ainsi que les aspects liés à leur implémentation. Des essais préliminaires de détection de source sont présentés.

Le lecteur aura l'occasion de remarquer de nombreux intermédiaires théoriques inhabituels pour ce genre de discipline. Loin d'être malvenus, ils sont souvent la source de méthodes concrètes d'analyse de données. Nous pensons qu'un recul conceptuel suffisant doit nécessairement compléter le contexte étroit du problème posé pour que des innovations intéressantes puissent être envisagées. Ce mémoire n'est que l'illustration de cette conviction.

Première partie

Détection de sources gamma

Chapitre 1

Contexte

1.1 Objectifs et découvertes scientifiques

L'objectif de l'astronomie gamma spatiale est d'identifier les sources de rayonnement gamma (en tant qu'objets physiques) et d'en étudier de manière détaillée les caractéristiques. Il s'agit d'une discipline où l'observation permet des découvertes en général inattendues, plutôt que des confirmations de théories.

Parmi les découvertes d'EGRET et de ses prédécesseurs, citons :

- Les données de SAS2, un télescope antérieur à EGRET, ont été à la base de la découverte d'un pulsar, Geminga, qui n'émet pas dans le domaine radio. Les pulsars sont des étoiles à neutrons qui tournent sur elles-mêmes, ce qui accélère de la matière sous forme de jets qui sont détectés périodiquement lorsque l'axe magnétique pointe en direction de la Terre. C'est le rayonnement synchrotron de ces particules dans le champ magnétique intense du pulsar qui produit le rayonnement gamma, X ou radio que nous pouvons observer.
- L'identification d'une cinquantaine de blazars déjà identifiés dans les domaines radio et visible. Les blazars sont, au même titre que les quasars, un type de noyau actif de galaxie (AGN - Active Galactic Nucleus), c'est-à-dire vraisemblablement d'immense trou noir au centre d'une galaxie. Le mécanisme d'émission de rayonnement gamma fait intervenir le rayonnement synchrotron mais aussi la diffusion Compton inverse (production de photon gamma après collision entre des électrons de haute énergie et des photons gamma émis par effet synchrotron - modèle SSC). L'intensité de tous ces objets est parfois hautement variable dans le temps, avec des sursauts d'activité de l'ordre du jour ou de l'heure.
- La détermination avec grande certitude de la nature galactique de la majorité du rayonnement gamma. Il s'agit de l'émission diffuse, due à l'interaction de rayons cosmiques avec le gaz interstellaire. EGRET a permis d'en dresser une carte assez précise.
- Une mesure de l'émission diffuse extragalactique, dont les non-uniformités sont un débat actuel parmi les astrophysiciens [12].

alors déduites des quantités correspondantes des particules matérialisées lors de l'interaction. C'est également à cause de cet effet de paire que les télescopes gamma se trouvent dans l'espace : tout rayonnement gamma émis vers la Terre est en effet automatiquement absorbé dans la haute atmosphère en créant une gerbe de particules secondaires¹.

Le champ de vue du télescope est très large pour ce type de détecteur, 80°, mais la surface effective de détection ainsi que la résolution angulaire (voir section 1.3.4) se dégradent significativement au-delà de 30° par rapport à l'axe du télescope. La résolution angulaire dépend également fortement de l'énergie des photons incidents.

L'instrumentation est basée sur les cinq dispositifs suivants (voir figure 1.2) :

Plans convertisseurs (interleaved foils) : Réalisés en Tantale (Ta), c'est là que les rayons gamma interagissent pour former les paires $e^+ e^-$.

Chambres à étincelles : Intercalées entre les plans convertisseurs, elles servent à mesurer la direction des électrons et positrons.

Hodoscope (time of flight coincidence system) : Monté à l'arrière des chambres à étincelles, il leur fournit une impulsion électrique de haute tension lorsqu'un événement est identifié comme étant une particule qui va de l'avant vers l'arrière. Les étincelles qui éclatent permettent alors de visualiser les trajectoires dans les chambres à étincelles (d'où leur nom).

Calorimètre : Constitué d'un cristal de NaI(Tl), il sert à mesurer l'énergie des électrons et positrons.

Dôme d'anticoïncidence : Il permet d'éviter les détections parasites causées par les très nombreuses particules chargées venant de l'espace (rayons cosmiques). Constitué d'une couche mince d'un matériau de type scintillateur organique, il agit en bloquant le signal de l'hodoscope lorsqu'un rayon cosmique est détecté.

Les données acquises par EGRET sont organisées en périodes d'observation (VP - *viewing periods*) d'approximativement deux semaines où le télescope pointe dans une même direction du ciel. Pour chaque VP, les données se composent d'une liste d'événements : les photons indexés par leur direction d'incidence, leur énergie, et le moment précis où ils ont été détectés. Pour la facilité de l'analyse, ces événements sont regroupés par gammes d'énergie en *cartes de comptage*, comme à la figure 1.3. Cette image correspond à une région du ciel d'approximativement 80° de diamètre, où chaque point représente un ou plusieurs photons détectés en fonction du niveau de gris.

En plus de la liste des événements, il est nécessaire de disposer de la *carte d'exposition*, en cm^2s , qui tient compte du temps d'exposition et de la surface efficace du détecteur. Cette dernière varie notablement en fonction de l'angle avec l'axe du télescope. On peut en voir un exemple à la figure 1.5, qui correspond à la même VP que ci-dessus. On peut alors pondérer chaque événement en fonction de l'exposition qui lui correspond : la *carte*

¹Cet effet est mis à profit pour la détection de photons de très haute énergie (de l'ordre du Tev ou plus) : dans ce cas la gerbe de particule se propage jusqu'au sol en produisant dans l'air un pinceau de lumière par effet Tcherenkov. Les détections basées sur l'identification de ces événements sont encore très peu fiables à l'heure actuelle.

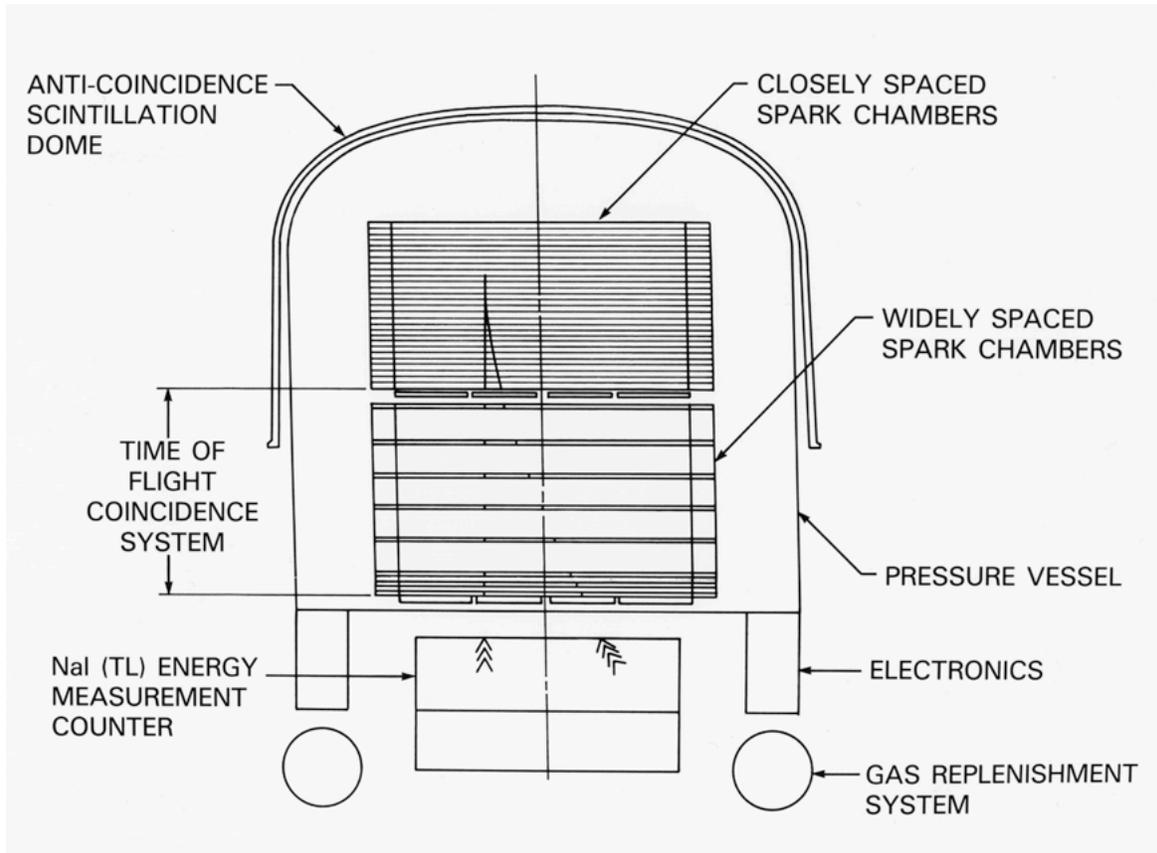


FIG. 1.2 – Vue schématique du télescope EGRET

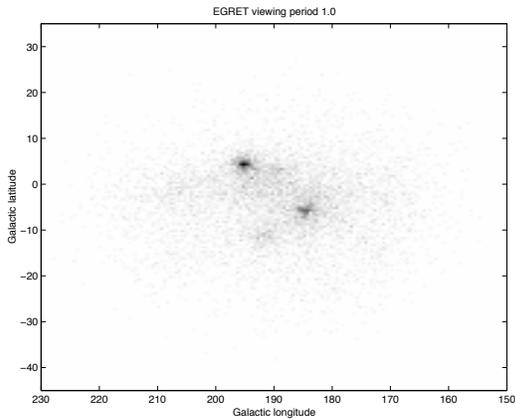


FIG. 1.3 – Carte en taux de comptage pour la période d'observation 1.0. Gamme d'énergie 100 MeV et plus.

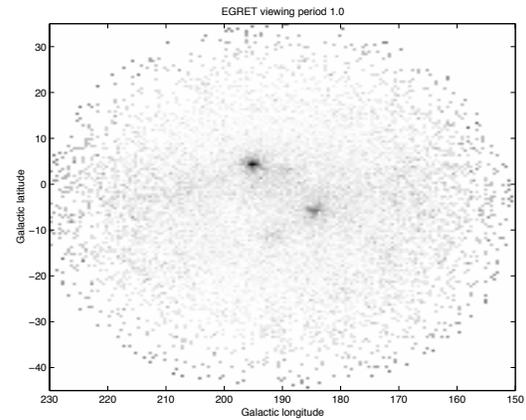


FIG. 1.4 – Carte en intensité correspondante.

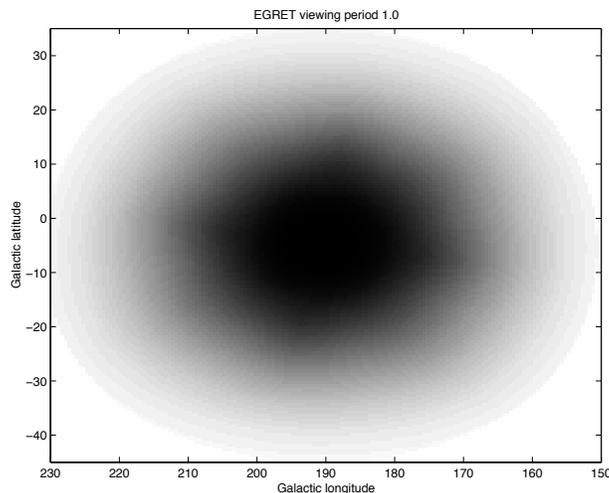


FIG. 1.5 – Carte d’exposition pour la période d’observation 1.0. Les régions claires correspondent aux inefficacités du détecteur.

en intensité est obtenue en divisant la carte en comptage par la carte en exposition, voir figure 1.4. Cette dernière opération a pour but de récupérer l’information loin de l’axe du télescope et de débiaiser les positions des sources, faussées par la non-uniformité de l’exposition. La carte en intensité est ainsi une information plus “physique” que la carte en comptage brute. On appelle cette opération le *flat-fielding*.

Comme on le voit sur ces cartes les photons gamma détectés sont extrêmement peu nombreux. Ceci est dû au fait que les astres actifs rayonnent très peu en gamma : à puissance égale, il y a beaucoup moins de quanta de rayonnement gamma puisqu’ils emportent chacun une grande quantité d’énergie.

1.3 Modélisation des données

La “modélisation” des données est souvent passée sous silence parce qu’il s’agit d’une étape hybride entre l’instrumentation et le traitement des données proprement dit. De plus, ce cadre théorique n’a pas lieu d’être remis en cause chaque fois qu’une nouvelle avancée voit le jour, c’est pourquoi il est souvent implicite dans la littérature. En tant que non-expert, pour nous mettre à niveau, nous avons estimé utile de passer un certain temps à clarifier ces concepts. Cette modélisation est par ailleurs très intéressante dans notre cas puisque la discussion est essentiellement *déterminée* par des hypothèses très larges. Pas seulement plausible, le modèle est même difficilement réfutable, comme nous le verrons.

1.3.1 Le comptage

La première hypothèse que nous faisons est que les photons sont détectés de manière indépendante. Plus précisément, la direction, l’énergie et le temps d’arrivée d’un photon

détecté sont statistiquement indépendants de la direction, de l'énergie et du temps d'arrivée des autres photons déjà détectés et attendus. Il est évident que ces caractéristiques dépendent de l'endroit, du moment et du processus de l'émission, ou encore de caractéristiques expérimentales variables, mais il ne s'agit pas de cela ici : nous faisons juste l'hypothèse que les photons ne se "gênent" pas entre eux au moment précis de la détection. Cette hypothèse est largement supportée par le nombre extrêmement restreint d'événements, et serait d'autant plus confirmée que les détections simultanées sont permises par le télescope.

On peut alors considérer que les photons arrivent selon un processus de comptage où le système *ne dépend pas du moment où on le regarde*, et en particulier ne se souvient pas des arrivées passées². Un résultat de base de théorie des processus stochastiques [15] nous apprend que les temps d'arrivée des photons sont alors des variables aléatoires exponentielles, et de manière duale que le nombre d'événements enregistrés après un certain temps suit une loi de Poisson. Plus précisément, la probabilité de détecter n photons (indépendamment de leur direction et de leur énergie) dans l'intervalle de temps $[0, t]$ et pour un taux d'arrivée variable $\mu(\tau)$ est donnée par

$$P(X(\mu(\cdot), t) = n) = \frac{m(t)^n e^{-m(t)}}{n!},$$

où $m(t) = \int_0^t \mu(\tau) d\tau$. La variable aléatoire X , qui représente le nombre de photons détectés, dépend bien de t et de la fonction taux d'arrivée $\mu(\cdot)$, c'est-à-dire de toutes ses valeurs dans l'intervalle $[0, t]$. Le processus de comptage est alors plus communément appelé un processus de Poisson (à taux variable), et la quantité $\mu(\tau)$ correspond physiquement au flux instantané de photons détectés, quelle que soit leur direction et leur énergie. Les sections suivantes ont pour objet de raffiner ce modèle dans le cadre des données d'EGRET ou d'autres détecteurs en régime de comptage.

1.3.2 La stationnarité

L'intensité des sources gamma est souvent très variable dans le temps, et l'étude de ces variations est très intéressante en soi. Ce n'est pourtant pas le problème qui nous intéresse ici, nous allons donc considérer un flux moyen de photons détectés

$$\bar{\mu} = \frac{1}{t} \int_0^t \mu(\tau) d\tau,$$

qui définit sans approximation un processus *stationnaire* équivalent :

$$P(X(\bar{\mu}, t) = n) = \frac{(\bar{\mu}t)^n e^{-\bar{\mu}t}}{n!}.$$

²En termes techniques, cfr. [15], il s'agit d'une file d'attente $M/G/\infty$, où les photons "clients" arrivent de manière indépendante (des autres et du temps) dans la file, et que cette dernière est immédiatement vidée grâce à une infinité de "guichets".

1.3.3 Le binning

Nous n'avons pas encore parlé des deux quantités importantes enregistrées par le détecteur : la direction et l'énergie des photons incidents. Une direction peut être considérée comme un point sur la sphère unité (S^2), alors qu'une énergie est un nombre positif (de \mathbb{R}^+). Ces événements vont être groupés en *bins* de direction et d'énergie en partitionnant la sphère et la droite positive. On perd ainsi d'autant plus d'information que les bins sont grands, mais le but est de rendre possible le traitement des données. Les centres des bins sont donc des points $\{(\eta_i, E_j)\}_{ij}$ de $S^2 \times \mathbb{R}^+$.

La question est maintenant de savoir quelle est la nature du processus de comptage relatif à un seul bin (η_i, E_j) . Premièrement, l'hypothèse de base est autant valable pour un bin que pour le détecteur tout entier. La distribution de probabilité sera donc encore de type Poisson. Deuxièmement, la propriété d'additivité des processus de Poisson³, prise à la limite, montre que le taux d'arrivée de photons à un bin est directement proportionnel au volume de ce bin. On définit donc une densité de flux de photons $\bar{\mu}(\eta, E)$ en $sr^{-1}MeV^{-1}s^{-1}$ de telle manière que le flux de photons détectés au bin (η_i, E_j) soit

$$\bar{\mu}_{ij} = \int_{bin(i,j)} d\eta dE \bar{\mu}(\eta, E),$$

et a bien les unités s^{-1} . La probabilité que n photons soient détectés dans le bin (η_i, E_j) dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est donc donnée par

$$P(X(\bar{\mu}_{ij}, t) = n) = \frac{(\bar{\mu}_{ij}t)^n e^{-\bar{\mu}_{ij}t}}{n!}.$$

Il est important de se souvenir pour le chapitre 3 que $X(\bar{\mu}_{ij}, t)$ et $X(\bar{\mu}_{kl}, t)$ sont des variables aléatoires statistiquement *indépendantes* dès que $i \neq k$ ou $j \neq l$.

Il est remarquable de voir que les considérations des sections précédentes nous amènent naturellement, et sans l'avoir cherché, à la définition des quantités d'intérêt : $\bar{\mu}_{ij}$, introduit comme un taux d'arrivée, est en fait le flux physique, et $X(\bar{\mu}_{ij}, t)$, la variable aléatoire correspondante, correspond aux observations par le biais de ses réalisations. Le *bruit de comptage* est également univoquement spécifié : il est dû au fait que les réalisations des $X(\bar{\mu}_{ij}, t)$ peuvent être assez différentes d'un bin à l'autre. C'est donc en particulier une erreur de considérer que ce bruit est additif ou gaussien. Le bruit de comptage ne devient gaussien qu'à la limite où t ou μ tendent vers l'infini. Ce modèle de bruit de Poisson est, à notre connaissance, adopté par la majorité des auteurs en traitement des données de l'astronomie gamma [9, 10, 21, 23, 25, 26, 32, 33], bien qu'il n'y soit nulle part justifié.

Etant donné le caractère très général de nos hypothèses, ce que nous avons dit jusqu'ici doit rester valable quelles que soient les autres sources d'imprécisions, ou de "bruit". Il est donc *nécessaire* que ces imprécisions se retrouvent d'une manière ou d'une autre dans la quantité μ , pas dans la loi qui lie X à μ . Nous allons tout de suite en voir un exemple.

³La somme de deux processus de Poisson indépendants de taux μ_1 et μ_2 respectifs est encore un processus de Poisson de taux $\mu_1 + \mu_2$, voir [15] pour plus de détails.

1.3.4 La PSF

La PSF (Point Spread Function) est une mesure de la dispersion angulaire du télescope. Ce n'est rien d'autre que la réponse impulsionnelle de la détection, considérée comme système linéaire qui à la direction incidente associe la direction détectée. Il s'agit donc de manière équivalente de l'image enregistrée par le télescope d'une source que l'on sait être ponctuelle. Dans le cas d'EGRET, cette PSF est une somme de gaussiennes pour une énergie fixée, mais devient sensiblement différente si on considère de grands bins en énergie [23] : elle est alors plus piquée qu'une gaussienne au centre, mais a des queues plus larges. La PSF est variable avec l'*indice spectral* de la source, qui rend compte de ses différences d'activité en fonction de l'énergie.

Malheureusement, cette définition n'est valable que pour des systèmes déterministes, avec comme arguments d'entrée et de sortie des fonctions sur la sphère. En régime de comptage de photons, il faut réinterpréter cette PSF à partir du phénomène qu'elle veut modéliser : les fausses détections. Supposons que l'on travaille dans une tranche d'énergie fixée, et qu'il n'y a pas d'erreurs dans l'estimation de l'énergie d'un photon. Lorsqu'un photon est détecté en η_j alors qu'il aurait dû l'être en η_i , c'est parce qu'il existe une probabilité p_{ij} non nulle qu'il en soit ainsi⁴, avec $\sum_j p_{ij} = 1$. La question est maintenant de savoir si le processus de comptage reste Poisson dans ce cadre plus général de fausses détections. La réponse, affirmative, est donnée par la propriété de subdivision des processus de Poisson⁵ : si les photons arrivent au bin η_j suivant un processus de Poisson de taux $\bar{\lambda}_j$, ils seront détectés en η_i selon un processus de Poisson de taux $p_{ij}\bar{\lambda}_j$. Par la propriété d'addition des processus de Poisson, le taux total d'arrivée de photons au bin η_i est donné par

$$\bar{\mu}_i = \sum_j p_{ij}\bar{\lambda}_j.$$

Ceci nous donne donc une relation entre les flux idéaux (physiques) $\bar{\lambda}_j$ et les flux enregistrés $\bar{\mu}_i$ de photons détectés. Le même genre de conclusion peut être tirée si on s'intéresse aux erreurs de détermination de l'énergie. Les flux idéaux $\bar{\lambda}_j$, ou la densité de flux $\bar{\lambda}(\eta)$, sont maintenant les quantités physiques d'intérêt.

Montrons comment ces probabilités p_{ij} se ramènent à la PSF, mieux connue des astronomes. Traduite en terme de densité de flux, la relation ci-dessus devient approximativement (si la subdivision de la sphère est suffisamment fine)

$$\mu(\eta_i)d\eta_i = \sum_j p_{ij}\lambda(\eta_j)d\eta_j.$$

⁴Ces p_{ij} définissent des probabilités de transition au sens de la modélisation par chaînes de Markov

⁵Si un processus de Poisson de taux λ est subdivisé en deux processus, chaque arrivée étant envoyée au premier avec une probabilité p et au second avec une probabilité $1 - p$, alors ces deux processus sont encore Poisson, de taux λp et $\lambda(1 - p)$ respectifs. En plus, ces deux processus sont indépendants l'un de l'autre, en ce sens que les temps d'arrivée sont des variables aléatoires indépendantes. (Ils ne sont évidemment pas indépendants si conditionnés par le processus de départ, puisque dans ce cas la connaissance d'un processus détermine complètement le second). Voir [15].

Une source ponctuelle en η_k est telle que $\lambda(\eta_j) = c_k \delta_{jk}$ pour tout j , donc le flux réel qui y correspond est

$$\mu(\eta_i) d\eta_i = p_{ik} c_k d\eta_k.$$

A la limite où le temps d'observation tend vers l'infini, le bruit de comptage disparaît⁶, et l'intensité observée est proportionnelle au flux qui la génère. Donc $\mu(\eta_i)$ ci-dessus est proportionnel à la PSF G . A une constante multiplicative près, on a donc

$$G_{ik} = \mu(\eta_i) = \frac{d\eta_k}{d\eta_i} p_{ik}.$$

La seule différence entre les probabilités de transitions et la PSF est donc le rapport des surfaces des bins : c'est logique, puisque la PSF ne doit pas dépendre de la manière dont on subdivise la sphère en bins. La propriété intéressante est alors

$$\mu(\eta_i) = \sum_j G_{ij} \lambda(\eta_j),$$

c'est-à-dire que le filtrage par G se fait au niveau des flux, pas au niveau des observations X . Le modèle continu de la PSF est alors obtenu comme $G_{ij} = G(\eta_i, \eta_j)$, où G est une fonction régulière de deux arguments sur la sphère. En général, nous supposons la PSF uniforme et isotrope, auquel cas on pourra écrire $G(\eta_i, \eta_j) = \tilde{G}(\eta_i \cdot \eta_j)$, où $\eta_i \cdot \eta_j$ désigne le produit scalaire dans \mathbb{R}^3 de η_i et η_j . On parlera alors seulement dans ce cas-là de convolution sphérique par la PSF, et cette dernière sera alors à juste titre appelée une fonction de transfert.

1.3.5 L'exposition

Les deux sections suivantes sont plus spécifiques à l'astronomie gamma et ne s'appliquent sans doute pas telles quelles à d'autres problèmes impliquant le comptage de photons.

La quantité que les astronomes considèrent en pratique à la place de $\bar{\mu}_{ij}$ est un peu différente, nous l'appellerons l'intensité :

$$\Phi_i = \frac{1}{S d\eta_i} \int_{bin(i)} d\eta \int_{E_0}^{E_1} dE \bar{\mu}(\eta, E)$$

a le sens d'un flux de photons détectés par sr divisé par la surface du détecteur (S en cm^2). Ses unités sont donc des $sr^{-1} s^{-1} cm^{-2}$. Pour ne pas alourdir les notations, les bornes E_0 et E_1 sont fixées une fois pour toutes et ne requièrent pas d'indice j .

On définit alors l'exposition ϵ_i comme étant le produit du temps d'exposition par la surface efficace du détecteur en η_i . En effet, le fait de se trouver dans un bin η_i où le

⁶Le signal-to-noise ratio (SNR) d'un processus de comptage est \sqrt{N} où N est le nombre d'événements. En effet, dans ce cas la moyenne et la variance de la v.a. de Poisson sont toutes les deux égales à N , et donc moyenne/écart-type vaut bien \sqrt{N} .

détecteur est moins efficace (parce qu'on est loin de l'axe du télescope) joue le même rôle qu'un temps d'exposition moindre dans une zone plus efficace. Les unités de ϵ_i sont donc des cm^2s . De cette façon, on retombe bien sur la loi de Poisson :

$$P(X(\Phi_i, \epsilon_i) = n) = \frac{(\Phi_i \epsilon_i d\eta_i)^n e^{-\Phi_i \epsilon_i d\eta_i}}{n!}.$$

Pour passer de la carte en comptage (X) à la carte en intensité, comme expliqué à la section 1.2, il suffit de diviser X par ϵ . Ceci donne une caractérisation plus naturelle des données où elles sont pondérées de manière à retrouver les unités de Φ , la quantité physique. La distribution de probabilité pour $\frac{X(\Phi_i, \epsilon_i)}{\epsilon_i}$ n'est plus une loi de Poisson :

$$P\left(\frac{X(\Phi_i, \epsilon_i)}{\epsilon_i} = p\right) = \frac{(\Phi_i \epsilon_i d\eta_i)^{p\epsilon_i} e^{-\Phi_i \epsilon_i d\eta_i}}{(p\epsilon_i)!}, \quad (1.1)$$

puisque $p \in \frac{\mathbb{N}}{\epsilon_i}$ n'est plus nécessairement entier. C'est l'expression que nous retiendrons pour nos développements ultérieurs.

1.3.6 Agrégation des cartes

Les cartes des périodes d'observation, telles que définies à la section 1.2, correspondent chacune à une région limitée du ciel. On peut mettre toutes ces cartes ensemble pour couvrir la planisphère ; concrètement il faut

1. Sommer les cartes de comptage des VP pour obtenir la carte de comptage globale.
2. Sommer les cartes d'exposition des VP pour obtenir la carte d'exposition globale.
3. Diviser la carte de comptage globale par la carte d'exposition globale pour obtenir la carte d'intensité globale.

Il n'est pas difficile de montrer que cette façon de faire est toujours meilleure que de moyenner les cartes d'intensité des VP par exemple.

Chapitre 2

Méthodes existantes

L’objectif de ce chapitre est de présenter les deux classes de méthodes existantes pour résoudre le problème de la détection. Nous verrons leurs avantages et leurs inconvénients, et en particulier comment la question initiale de l’identification des sources gamma trouve réponse dans chaque cas.

2.1 Méthodes paramétriques

Il s’agit essentiellement de variations autour d’un même thème : l’analyse par maximum de vraisemblance. C’est la méthode qui a été utilisée de manière prédominante pour l’analyse des données d’EGRET, elle a en particulier été utilisée pour la confection de tous les catalogues officiels de sources [23].

L’idée est de quantifier dans quelle mesure les données supportent un modèle statistique. La vraisemblance (*likelihood*) est la probabilité conjointe des données observées étant donnée l’hypothèse de départ H_0 (*null hypothesis*). On estime ensuite les paramètres de ce modèle (d’où le nom de méthode paramétrique) de manière à maximiser la vraisemblance. Pour le test d’hypothèse, on calcule le rapport de la vraisemblance L_0 de l’hypothèse H_0 et de la vraisemblance L_1 de l’hypothèse alternative H_1 . Le théorème de Wilks établit alors une formule très utile pour ce rapport de vraisemblance : la statistique de test $T = -2(\log L_0 - \log L_1)$ est distribuée dans l’hypothèse H_0 asymptotiquement comme une v.a. χ^2 lorsque le nombre de données tend vers l’infini. On peut alors accepter ou rejeter H_0 sur base de la valeur observée de la statistique de test, et ce avec un certain niveau de significativité (*confidence level*).

Dans le cas qui nous intéresse, il s’agit de comparer les données d’un candidat source (à partir de la carte en comptage) avec un modèle. Ce modèle fait typiquement intervenir la PSF de la source plus des termes représentant le fond diffus et les PSF des sources déjà détectées (pour plus de détails, voir [23]). L’hypothèse H_0 est l’absence de source au point considéré, et le modèle de H_0 contient deux paramètres relatifs au fond diffus (un pour le fond diffus galactique, un autre pour le fond diffus extragalactique). L’hypothèse alternative H_1 est la présence d’une source, et son modèle contient trois paramètres : les

deux de fond, et un paramètre relatif au nombre de photons de la source. Les expressions pour L_0 et L_1 sont maximisées par itération sur les valeurs des paramètres mentionnés. On procède ensuite au test statistique : la significativité du candidat source est établie sur base de la valeur de la statistique de test T . Plus cette dernière est grande, plus il est probable que le candidat soit une vraie source. Les variations à partir de ce schéma résident par exemple dans le choix des modèles ou dans la détermination plus ou moins approximative de la distribution de la statistique de test.

Avantages Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour l'identification des sources ponctuelles. Le traitement statistique est rigoureux et décider de la présence ou non d'une source par test d'hypothèse est conceptuellement très satisfaisant. Une détermination précise de la position et du flux d'une source sont également possibles.

Inconvénients Le principal inconvénient réside dans le temps de calcul nécessaire pour calculer et optimiser les vraisemblances [25]. Celles-ci font intervenir des intégrales multiples très lourdes. De plus, les intégrands de ces expressions demandent pour le stockage un espace mémoire non négligeable. Le second inconvénient réside en l'approximation asymptotique de la statistique de test par une distribution χ^2 , ce qui n'est pas forcément une bonne idée à bas taux de comptage comme c'est précisément le cas ici. Vouloir remédier à ce second problème semble inévitablement alourdir les calculs. Le troisième inconvénient est que cette méthode demande une liste a priori de candidats sources sous peine de tâtonnements itératifs très gourmands en temps calcul.

La question de départ, à savoir "*Où se trouvent les sources gamma ?*" est inévitablement reformulée et précisée dès qu'une méthode est utilisée plutôt qu'une autre. Ici, cette question devient : "*Si je mets à jour mon modèle de fond en lui ajoutant une source en (x, y) , est-ce que l'accord avec le modèle est significativement amélioré ?*" et trouve en la significativité du test statistique un complément d'information intéressant.

2.2 Méthodes nonparamétriques

Il s'agit également de méthodes qui procèdent par test statistique, mais d'une manière un peu différente. On ne cherche pas à estimer les paramètres d'un modèle de la source, l'idée est plutôt de filtrer l'image de départ pour mettre en évidence les sources, puis de faire un test statistique sur la valeur de l'image filtrée. Si cette valeur est au-dessus d'un certain seuil, basé sur l'émission de fond, alors on détecte la source. Pour l'étape de filtrage, on fait typiquement appel à la transformée continue en ondelettes.

2.2.1 La transformée continue en ondelettes

Le développement de cet outil, au début des années 1980, a reflété le besoin de passer à une représentation plus efficace des signaux couramment rencontrés en pratique. La transformée de Fourier rapide (FFT), très largement utilisée jusqu'alors souffre en effet de

plusieurs désavantages, le principal étant que l'information en temps est enfouie de manière inexploitable dans les phases des coefficients. Pour un signal correspondant à un morceau de musique, la FFT permet donc de mettre en évidence les fréquences jouées, mais pas les moments où elles sont jouées... De plus, les signaux réels contiennent des singularités (discontinuités, pics) qui correspondent souvent aux informations les plus intéressantes : consonnes dans un signal de parole, contours d'un objet dans une image, ou raies dans un signal de spectroscopie. La transformée de Fourier, adaptée lorsque le signal est lisse, ne permet pas de représenter de manière efficace ces caractéristiques pourtant intuitives.

L'idée de la transformée continue en ondelettes (*CWT* - *Continuous Wavelet Transform*) est de passer à une représentation *temps-échelle*, dépendant donc de deux paramètres b et a . Les parties lisses du signal sont capturées par les grandes échelles (grands a), et une singularité en t n'est présente au niveau de la transformée qu'au voisinage de t (b proches de t). Explicitement, on définit la CWT d'un signal f comme étant l'intégrale de son recouvrement avec une *ondelette* ψ dilatée et translatée :

$$(W_\psi f)(b, a) = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{\psi_{ba}(t)} f(t) dt \quad (2.1)$$

avec $\psi_{ba}(t) = \frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$. Une ondelette est intuitivement une fonction localisée de moyenne nulle, d'où son nom. Plus précisément, la condition nécessaire et suffisante (standard) pour que $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ soit une ondelette est

$$c_\psi = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\psi}(k)|^2 \frac{dk}{|k|} < \infty,$$

appelée condition d'admissibilité, parce qu'alors il existe une formule d'inversion qui rappelle celle de la transformée de Fourier :

$$f(t) = c_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db \psi_{ba}(t) (W_\psi f)(b, a). \quad (2.2)$$

L'interprétation de la CWT est simple : la valeur de la CWT de f en (b, a) est représentative des caractéristiques de f autour de l'échelle a et de la position b . Une ondelette est donc un filtre passe-bande ; il est parfois dit de la CWT qu'elle a les propriétés d'un "microscope mathématique".

D'autre part, les propriétés mathématiques des ondelettes sont aussi riches que leurs applications en traitement des signaux : citons par exemple la construction de bases orthogonales d'ondelettes régulières et localisées [11], la caractérisation d'espaces fonctionnels [11], ou le lien avec les états cohérents de la mécanique quantique et la théorie de la représentation des groupes [3]. Cette diversité est née de l'interaction de quelques scientifiques venant d'horizons très différents (mathématiciens, ingénieurs, physiciens). Néanmoins, ces dernières années, c'est plutôt le phénomène inverse que l'on observe : la communauté des 'ondelettistes' s'est tellement agrandie que les centres d'intérêt et de recherche ont divergé jusqu'à ne plus avoir grand chose en commun. Par exemple, les problèmes d'estimation

de signaux bruités et de compression de données ont connu des avancées spectaculaires grâce aux ondelettes, mais ceci fait intervenir des notions tout simplement différentes de la transformée continue “séminale” qui nous intéresse ici. La référence [22] discute toutes ces différences.

Les définitions s’étendent à deux dimensions où le signal est maintenant une image, ou plutôt une carte en intensité pour le problème qui nous intéresse. On définit la CWT 2D par (cfr. [3])

$$(W_\psi f)(\mathbf{b}, a, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi_{\mathbf{b}a\theta}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \quad (2.3)$$

avec $\psi_{\mathbf{b}a\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} \psi\left(r_{-\theta} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{a}\right)$. Le paramètre angulaire θ fait maintenant son apparition à travers la matrice de rotation $r_{-\theta}$ pour tenir compte de la géométrie bidimensionnelle plus riche. La fonction $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ sera une ondelette si par définition

$$c_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 \frac{d^2\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} < \infty,$$

ce qui revient en pratique à demander, de manière nécessaire et presque suffisante, que ψ soit de moyenne nulle. On a aussi une formule de reconstruction :

$$f(\mathbf{x}) = c_\psi^{-1} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{b} \psi_{\mathbf{b}a\theta}(\mathbf{x}) (W_\psi f)(\mathbf{b}, a, \theta). \quad (2.4)$$

Remarquons que si ψ est zonale (isotrope), alors l’information en angle est inutile, mais la formule de reconstruction reste valable. On omettra dans ce cas le paramètre θ . L’interprétation de la CWT est essentiellement la même qu’en 1D : elle permet d’extraire les parties du signal bidimensionnel f qui vivent autour de la position \mathbf{b} , de l’échelle a , et qui sont orientées selon θ . Cette nouvelle propriété de détection de directions demande que ψ ait des propriétés de directionnalité : il ne suffit pas qu’elle soit simplement orientée. Ces aspects seront clarifiés dans le chapitre 6.

Pour l’heure, restreignons-nous à une ondelette ψ isotrope ; la première étape des méthodes paramétriques considérées sera de prendre la CWT de la carte en intensité. Nous avons choisi pour tous nos essais l’ondelette “Chapeau mexicain”, qui n’est rien d’autre que le laplacien d’une gaussienne¹ :

$$\psi_{\mathbf{b}a}(\mathbf{x}) = \left(2 - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{b}|^2}{a^2}\right) e^{-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{b}|^2}{2a^2}}.$$

Le choix de la transformée en ondelettes et du chapeau mexicain en particulier pour notre problème sont motivés par les raisons suivantes :

Moyenne nulle Les ondelettes ont moyenne nulle, donc un bruit *uniforme* sera filtré à zéro en moyenne.

¹La normalisation choisie ici pour la dilatation n’est pas la même que plus haut : une dilatation préserve ici la norme uniforme (L^∞) alors que pour les autres équations elle préservait la norme L^2 plus naturelle. La raison du choix de normalisation L^∞ , comme dans [9], sera détaillée au chapitre 3.

Forme L'ondelette utilisée est isotrope et a la forme d'une cloche, donc met en évidence par une valeur élevée de la transformée les structures similaires. Les sources ponctuelles (pics pas très pointus) en sont un exemple.

Multiéchelle La CWT offre une décomposition multiéchelle des données. Des structures aplaties de grande dimension ne sont pas comparables à des sources ponctuelles bien localisées : elles seront en effet détectées à des échelles différentes.

CWT vs. DWT Nous pensons que la transformée *continue* en ondelettes est bien mieux adaptée au problème que la transformée discrète (*DWT - Discrete Wavelet Transform*). La DWT est en effet limitée à un ensemble d'échelles restreint pour des raisons algorithmiques : seules les valeurs de la transformée aux échelles dyadiques (puissances de 2) sont calculées. Il serait dommage de se priver de la liberté de considérer des échelles quelconques sur base de la rapidité de l'implémentation, particulièrement accessoire ici.

2.2.2 Estimation du fond

La seconde étape est de donner une estimation du fond diffus, c'est-à-dire de l'émission gamma qui n'est pas due aux sources elles-mêmes. On détaillera à la section suivante comment ce fond est utilisé pour déterminer le seuil de détection. Il existe deux méthodes pour calculer ce fond :

Méthode a priori : Il s'agit d'un modèle physique d'émission diffuse galactique [19] auquel on ajoute l'émission extragalactique observée [31]. Ce modèle avait déjà été utilisé de manière un peu différente dans les méthodes paramétriques classiques. Les paramètres libres du modèle sont calibrés pour être en adéquation avec les données.

Méthodes a posteriori : On estime ici la carte de fond à partir des données, indépendamment de l'interprétation physique. L'idée est d'appliquer un filtre passe-bas ad hoc pour éliminer les sources tout en gardant un fond structuré. Dans [9], ce fond est déterminé par lissage gaussien suivi d'un filtre médian dont la taille dépend de l'échelle considérée par la CWT. Le filtre gaussien a pour but d'éliminer les artefacts du détecteur (une autre solution serait de diviser par l'exposition, cfr. chapitre 1), et le filtre médian a pour but d'enlever les sources. Dans [33], l'approche est plus grossière : le fond est déterminé (implicitement) à partir d'un filtre moyen dont la taille, de la même manière que ci-dessus, dépend de l'échelle considérée par la CWT. D'autres tentatives moins récentes de traitement nonparamétrique des données supposent même un fond uniforme...

La composante la moins uniforme de ce fond (l'émission diffuse galactique), obtenue a priori, est représentée à la figure 2.2.2 : on peut imaginer qu'il sera nécessaire d'en tenir compte pour la détection des sources qui viennent s'y ajouter.

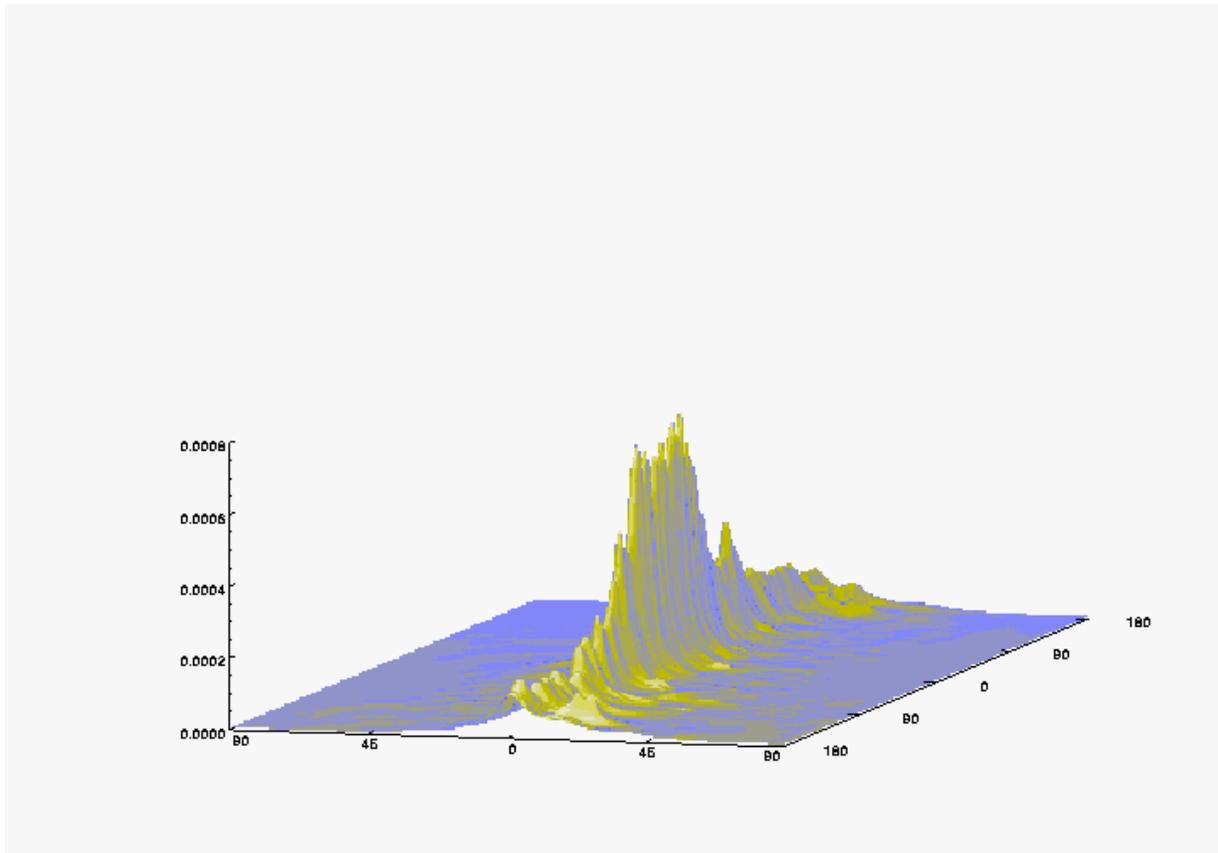


FIG. 2.1 – Fond hautement structuré dû à l'émission diffuse galactique. Les valeurs élevées du flux correspondent au plan galactique.

2.2.3 Seuillage

La troisième étape consiste à utiliser la connaissance que l'on a du fond pour dériver les seuils de confiance de détection des sources. Intuitivement, il existe une variabilité intrinsèque du fond, due au bruit de comptage, dont les candidats-sources doivent s'extraire pour pouvoir prétendre au statut de source. Comme la transformée en ondelettes permet de séparer assez efficacement les sources du bruit, la comparaison se fera sur les valeurs des transformées, et pas directement sur les données.

Explicitement, les étapes sont les suivantes :

1. A partir de l'estimation du fond Φ et de l'exposition ϵ (que l'on connaît), on considère la variable aléatoire de comptage associée $X = \text{Po}(\Phi, \epsilon)$ dont les réalisations rendent compte du bruit de comptage.
2. On approxime la variable aléatoire Y qui est la transformée en ondelettes de X , et en particulier on extrait de manière approchée les quantiles supérieurs q_α (percentiles) intéressants. Par exemple, $\alpha = 0.999$.
3. Une source sera détectée au niveau α si la valeur de la CWT de la carte en comptage est au-dessus de q_α .

Il s'agit donc également d'un test d'hypothèse statistique, où l'hypothèse H_0 est l'absence de source (le candidat n'est pas une source, il s'agit de fluctuations du bruit de comptage du fond), et l'hypothèse H_1 est la présence d'une source. Dans les notations ci-dessus, la statistique de test n'est autre qu' Y .

Avantages : Effectuer la détection par la méthode décrite ci-dessus ne prend typiquement pas plus que quelques secondes. En outre, l'utilisateur n'est pas obligé de spécifier les positions des candidats-sources, celles-ci sont données par les maxima de la transformée. On dit que la méthode est *non-supervisée*.

Inconvénients : Premièrement, les méthodes de détection utilisant les ondelettes ne sont pas encore mûres : aucune solution ne sort du lot de manière autoritaire. Les problèmes qu'il reste à résoudre concernent les approximations mentionnées ci-dessus dans le calcul de la statistique de test, l'ajout de la PSF², l'arbitraire dans le choix du filtre, ou encore l'arbitraire dans l'estimation du fond. Deuxièmement, on peut raisonnablement penser que la vraisemblance est une statistique de test plus appropriée que celle que nous avons décrite ici. Le poids que l'on accorde au test d'hypothèse est donc plus grand si la statistique de test est cataloguée par la pratique (de manière subjective) comme étant plus adéquate.

La question de départ, “Où se trouvent les sources gamma ?” est ici reformulée en “Est-ce que mon filtre considère que la source dépasse le bruit de comptage intrinsèque du fond diffus ?”. On remarque que la philosophie des méthodes nonparamétriques est donc un peu différente des méthodes paramétriques plus classiques.

²Il s'agit d'une information primordiale qui n'apparaît nulle part dans la présentation que nous avons faite des méthodes nonparamétriques

Chapitre 3

Améliorations

Les deux premiers chapitres avaient pour but de planter un décor suffisant pour une lecture critique de la littérature récente. La vocation du présent chapitre est de montrer que ce panorama est également suffisant pour répondre de manière conceptuelle à certaines des objections faites aux méthodes à base d'ondelettes. Les développements seront nécessairement plus quantitatifs que précédemment.

3.1 La transformée continue en ondelettes sur la sphère

Comme annoncé au chapitre 1, l'agrégation des cartes des périodes d'observation (VP) donne une carte globale du ciel gamma qui se trouve en fait sur la planisphère céleste. Les petites cartes des VP sont elles-mêmes, dans une moindre mesure, distordues lorsqu'elles sont projetées (cfr. exemples des chapitres 1 et 4). Cette erreur serait bénigne s'il ne s'agissait que de visualisation ; ce qui est plus gênant c'est que le filtrage par ondelettes 2D se sert *aussi* de la géométrie euclidienne des données projetées. Et certaines structures à grande échelle perdent inévitablement à être vue projetées. La solution définitive à ce problème est de passer aux ondelettes sur la sphère [6, 4, 38]. Cette section est essentiellement un résumé de ces références.

L'idée est toujours de passer à une représentation position-échelle des données. Au lieu de la translation et de la dilatation habituelles, les deux opérations correspondantes sur la sphère sont :

- Une rotation : en effet, les déplacements isométriques sur la sphère sont donnés par les rotations de $SO(3)$. Pour $\gamma \in SO(3)$, la représentation de ces rotations sur les fonctions de S^2 est

$$(R_\gamma f)(\eta) = f(\gamma^{-1}\eta) = (U_{qr}(\gamma)f)(\eta).$$

Il s'agit en fait de la représentation quasi-régulière bien connue de $SO(3)$ dans $L^2(S^2)$, dont la réduction donne les espaces invariants de $L^2(S^2)$ engendrés par les harmoniques sphériques.

- Une dilatation stéréographique autour du pôle nord : il s'agit de l'opération qui à un point $\eta = (\theta, \phi)$ associe le point $\eta_a = (\theta_a, \phi)$, avec $\tan \frac{\theta_a}{2} = a \tan \frac{\theta}{2}$. Intuitivement,

on projette η stéréographiquement sur le plan tangent au pôle nord¹, on dilate de manière classique dans ce plan, puis on fait la projection stéréographique inverse pour se ramener à la sphère. Sur les fonctions, une dilatation d'un facteur $a \in \mathbb{R}_*^+$ devient

$$(D_a f)(\eta) \equiv f_a(\eta) = \lambda(a, \theta)^{\frac{1}{2}} f(\eta_{\frac{1}{a}}),$$

avec

$$\lambda(a, \theta) = \frac{4a^2}{[(a^2 - 1) \cos \theta + (a^2 + 1)]^2}.$$

Cette action correspond elle aussi à une représentation de groupe. Plus précisément, les rotations ($SO(3)$) et les dilatations (\mathbb{R}_*^+) sont plongées dans le groupe de Lorentz $SO_0(3, 1)$ via sa décomposition d'Iwasawa $SO_0(3, 1) = SO(3) \times \mathbb{R}_*^+ \times \mathbb{C}$: les dilatations sont alors interprétées comme des boosts de Lorentz. La représentation des dilatations et rotations dans $L^2(S^2)$ est alors obtenue à partir d'une bonne représentation (unitaire et irréductible) de $SO_0(3, 1)$ dans $L^2(S^2)$, restreinte aux éléments du groupe qui nous intéressent par une section de l'espace des paramètres $SO(3) \times \mathbb{R}_*^+$ dans $SO_0(3, 1)$. La référence pour ces développements est [6].

La question de savoir ce qu'est une dilatation autour d'un point autre que le pôle nord ne se posera pas puisqu'une ondelette ψ , centrée au pôle nord, sera d'abord dilatée avant d'être tournée dans l'expression de la transformée en ondelettes sur la sphère :

$$(W_\psi f)(\gamma, a) = \int_{S^2} d\eta \overline{(R_\gamma D_a \psi)(\eta)} f(\eta), \quad (3.1)$$

où $d\eta$ est la mesure $SO(3)$ -invariante sur la sphère. En pratique, ψ sera isotrope (*radial-basis*) et on peut restreindre γ à l'espace homogène $S^2 \simeq SO(3)/SO(2)$. On obtient donc une transformée dont l'espace des paramètres est S^2 pour les déplacements et \mathbb{R}_*^+ pour les dilatations.

Une ondelette ψ est admissible lorsque

$$c_\psi^l \equiv \frac{8\pi^2}{2l+1} \sum_{|m| \leq l} \int_0^\infty \frac{da}{a^3} |\hat{\psi}_a(l, m)|^2 < c < \infty \quad (3.2)$$

(en notant $\hat{\psi}(l, m) \equiv \langle Y_m^l | \psi \rangle$ les coefficients de Fourier sur la sphère), ce qui correspond de manière nécessaire à la condition de "moyenne nulle"

$$\int_0^\pi \frac{\psi(\theta)}{1 + \cos \theta} \sin \theta d\theta = 0.$$

Sous cette condition d'admissibilité, on a une formule d'inversion

$$(Af)(\eta) = \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{S^2} d\eta (W_\psi f)(\gamma, a) R_\gamma \psi_a,$$

¹C'est-à-dire on considère la droite passant par $\eta \in S^2$ et le pôle sud, la projection stéréographique de η est l'intersection de cette droite avec le plan tangent au pôle nord.

pour tout $f \in L^2(S^2)$ qui n'en est pas vraiment une puisque l'opérateur A n'est pas l'identité. Il est néanmoins borné et à inverse borné (c'est un opérateur dit de repère), et son expression est relativement simple dans l'espace de Fourier, ce qui permet (en principe) son inversion et donc la reconstruction complète :

$$(\widehat{Af})(l, m) = c_\psi^l \hat{f}(l, m),$$

où c_ψ^l a été défini ci-dessus.

Il existe un autre choix de normalisation pour la dilatation, qui préserve la norme $L^1(S^2)$, que l'on note par un indice supérieur :

$$(D^a f)(\eta) \equiv f^a(\eta) = \lambda(a, \theta) f(\eta_\perp).$$

Contrairement à la CWT euclidienne, passer de la dilatation D_a à la dilatation D^a n'est pas trivial : cela change la condition d'admissibilité nécessaire en

$$\int_{S^2} \psi(\eta) d\eta = 0,$$

et demande de rajouter à la formule de reconstruction un terme faisant intervenir la fonction d'échelle, voir [4]. De manière équivalente, il suffit en fait de rajouter la *moyenne* du signal et de remplacer $\frac{da}{a^3}$ par $\frac{da}{a}$ à la formule de reconstruction classique. Attention : les grandes valeurs de a correspondent bien aux grandes échelles du signal comme dans le cas euclidien, mais les *très* grandes valeurs de a correspondent ici aux petites échelles *autour du point antipodal* au point considéré !

La moyenne nulle de l'ondelette est en fait une propriété que nous recherchons : la CWT d'un bruit uniforme a alors une espérance nulle. C'est donc le formalisme L^1 que nous adopterons pour nos analyses. Les résultats préliminaires, encourageants, sont montrés au chapitre 4.

Pour l'implémentation, nous avons utilisé l'algorithme "rapide" introduit dans [4]. Cet algorithme est de complexité $O(N^3 \log N)$ où N est l'ordre de grandeur du nombre d'abscisses (en longitude) et d'ordonnées (en latitude). Une autre approche, de complexité $O(N^2 \log^2 N)$, serait de considérer la convolution sphérique comme une multiplication dans l'espace de Fourier de la sphère [17] et d'utiliser une transformée rapide en harmoniques sphériques basée entre autres sur les relations de récurrence des polynômes de Legendre. Cette approche est beaucoup plus rapide que la précédente, principalement parce que le code fourni par les auteurs est compilé (C++) plutôt qu'interprété (Matlab), mais souffre d'un inconvénient majeur : le nombre d'abscisses doit être égal au nombre d'ordonnées et doit être égal à une puissance de 2, sinon le code doit être réécrit...

3.2 Détermination des seuils de détection

Cette section a pour objectif de fournir un cadre convenable pour la détermination des seuils statistiques de détection à partir d'un fond et d'une exposition tous deux non-uniformes. Nous mentionnerons comment ceci complète et corrige les approches existantes : [9, 10] et [32, 33].

Le fond Φ peut être vu comme une densité de flux de photons sur la sphère, cfr. chapitre 1, et donc comme une fonction très régulière $\Phi(\eta)$. Soit $K(\eta, \eta')$ un noyau, par exemple une ondelette, avec laquelle on filtre le fond : ceci s'écrit

$$\Psi(\eta) = \int_{S^2} d\eta' K(\eta, \eta') \Phi(\eta'),$$

qui correspond à une limite de sommes de Riemann

$$\Psi(\eta_i) = \lim_{h \rightarrow 0} \sum_j d\eta_j K(\eta_i, \eta_j) \Phi(\eta_j),$$

où $h = \max_i \{d\eta_i\}$, le diamètre de la subdivision, tend vers zéro. Comme indiqué au chapitre précédent, c'est la transformée du champ aléatoire de comptage associé à Φ qui sera intéressante² :

$$Y_h(\eta_i) = \sum_j K(\eta_i, \eta_j) \frac{X(\Phi_j, \epsilon_j)}{\epsilon_j}.$$

Prendre la limite $h \rightarrow 0$ dans l'équation ci-dessus est plus délicat qu'une simple somme de Riemann, puisqu'elle fait intervenir des quantités aléatoires qui dépendent de h . En particulier, on voit le $d\eta_i$ a été absorbé dans X , c'est normal qu'il ne soit plus là. La limite $h \rightarrow 0$ correspond pourtant à une situation bien réelle : l'absence de binning, où les directions sont repérées de manière exacte sur la sphère. Un binning de plus en plus fin (i.e. $h \rightarrow 0$) tend donc à localiser les événements de manière de plus en plus précise, c'est-à-dire à faire converger les réalisations de $X(\Phi_j, \epsilon_j)$ vers la vraie distribution d'événements sur la sphère. La v.a. Y_h converge donc pour *chacune de ses réalisations* vers un certain Y , ce qui résout le problème de la convergence. On peut alors énoncer le résultat suivant, central pour notre problématique.

Proposition 3.1. *Soit $\frac{X(\Phi_i, \epsilon_i)}{\epsilon_i}$ un champ aléatoire de Poisson sur la sphère unité, non-uniforme et mis à l'échelle par ϵ . Supposons $\Phi_i = \Phi(\eta_i)$ où $\Phi : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est borné et intégrable, et $\epsilon_i = \epsilon(\eta_i)$ où $\epsilon : S^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ est borné, à inverse borné, et intégrable. Soit $K : S^2 \times S^2 \rightarrow \mathbb{R}$ un noyau borné intégrable. Posons*

$$Y_h(\eta) = \sum_j K(\eta, \eta_j) \frac{X(\Phi_j, \epsilon_j)}{\epsilon_j},$$

où $h = \max_i \{d\eta_i\}$. Alors $Y(\eta) = \lim_{h \rightarrow 0} Y_h(\eta)$ a une densité de probabilité $f_{Y(\eta)}$ dont la fonction caractéristique est donnée par

$$\hat{f}_{Y(\eta)}(s) = \exp \int_{S^2} d\eta' \Phi(\eta') \epsilon(\eta') \left(e^{s \frac{K(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta')}} - 1 \right). \quad (3.3)$$

Pour rappel $s \in \mathbb{C}$ en général.

²On se souvient (chapitre 1) que la meilleure manière de représenter les données est de passer à la carte en intensité, c'est-à-dire de diviser la carte en comptage X par l'exposition ϵ

Démonstration. La fonction caractéristique (ou génératrice des moments) de $Y_h(\eta)$ n'est rien d'autre que la transformée de Fourier complexe de $f_{Y_h(\eta)}$ (attention aux conventions). Elle est aussi, et beaucoup plus souvent, appelée transformée de Laplace bilatère.

$$\begin{aligned}
 \hat{f}_{Y_h(\eta)}(s) &= \int_{-\infty}^{\infty} dy e^{sy} f_{Y_h(\eta)}(y) \\
 &= E[e^{sY_h(\eta)}] \\
 &= E\left[e^{s \sum_j K(\eta, \eta_j) \frac{X(\Phi_j, \epsilon_j)}{\epsilon_j}}\right] \\
 &= E\left[\prod_j e^{sK(\eta, \eta_j) \frac{X(\Phi_j, \epsilon_j)}{\epsilon_j}}\right] \\
 &= \prod_j E\left[e^{sK(\eta, \eta_j) \frac{X(\Phi_j, \epsilon_j)}{\epsilon_j}}\right] \quad \text{par indépendance} \\
 &= \prod_j \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(\Phi_j \epsilon_j d\eta_j)^n e^{-\Phi_j \epsilon_j d\eta_j}}{n!} e^{s \frac{K(\eta, \eta_j)}{\epsilon_j} n} \\
 &= \prod_j \exp\left[\Phi_j \epsilon_j d\eta_j \left(e^{s \frac{K(\eta, \eta_j)}{\epsilon_j}} - 1\right)\right] \\
 &= \exp \sum_j d\eta_j \Phi_j \epsilon_j \left(e^{s \frac{K(\eta, \eta_j)}{\epsilon_j}} - 1\right),
 \end{aligned}$$

où nous reconnaissons une somme de Riemann. Par la régularité supposée de Φ , ϵ et K , on déduit

$$\hat{f}_{Y(\eta)}(s) = \exp \int_{S^2} d\eta' \Phi(\eta') \epsilon(\eta') \left(e^{s \frac{K(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta')}} - 1\right)$$

qui conclut la preuve³. □

L'indépendance des $X(\Phi_j, \epsilon_j)$, nécessaire pour démontrer ce résultat, a été largement discutée et justifiée au chapitre 1. Aucune autre hypothèse sur le champ de Poisson n'est requise pour tirer la conclusion. Les généralisations de ce résultat aux cas multivarié et normal se trouvent à l'annexe A.

La formule 3.3 est directement intéressante d'un point de vue pratique : nous disposons maintenant d'une expression analytique de la densité de probabilité des valeurs que prend la CWT du fond en chaque point (à une transformée de Fourier près). Comme indiqué au chapitre précédent, il suffit maintenant de calculer les quantiles supérieurs de cette distribution pour déterminer les seuils de détection de manière rigoureuse.

Attardons-nous sur quelques propriétés de la formule 3.3.

³Remarquons en passant que la simplicité de la limite $h \rightarrow 0$ dans cette dernière expression nous conforte dans notre discussion sur la convergence de Y_h vers Y .

Dépendance en η : Si nous supposons $\epsilon(\eta) = \epsilon$ (exposition uniforme), $\Phi(\eta) = \Phi$ (fond uniforme) et $K(\eta, \eta') = \tilde{K}([\eta]^{-1}\eta')$ (convolution sphérique, dans les notations du chapitre 7), le résultat devient

$$\begin{aligned}\hat{f}_Y(s) &= \exp \left[\Phi \epsilon \int_{S^2} d\eta' \left(e^{s \frac{\tilde{K}([\eta]^{-1}\eta')}{\epsilon}} - 1 \right) \right] \\ &= \exp \left[\Phi \epsilon \int_{S^2} d\eta' \left(e^{s \frac{\tilde{K}(\eta')}{\epsilon}} - 1 \right) \right],\end{aligned}$$

par invariance de la mesure, et est indépendant de η comme il se doit.

Le cas euclidien : Tout ceci est valable mutatis mutandis lorsque l'image est définie dans un plan, pas sur la sphère. Explicitement,

$$\hat{f}_{Y(\mathbf{x})}(s) = \exp \int_{\mathbb{R}^2} d\mathbf{x}' \Phi(\mathbf{x}') \epsilon(\mathbf{x}') \left(e^{s \frac{K(\mathbf{x}, \mathbf{x}')}{\epsilon(\mathbf{x}')}} - 1 \right).$$

Supposons comme ci-dessus que $\Phi(\mathbf{x}) = \Phi$ et $\epsilon(\mathbf{x}) = \epsilon$, et que l'on ne met pas à l'échelle les données X par l'exposition ϵ (il n'y a plus lieu de le faire puisqu'elle elle constante). Supposons en outre que le noyau K soit une ondelette ψ_a à l'échelle a , et que cette dilatation respecte la norme uniforme :

$$\psi_a(\mathbf{x}) = \psi\left(\frac{\mathbf{x}}{a}\right).$$

Alors l'expression de la fonction caractéristique devient

$$\hat{f}_Y(s) = \exp \left[\Phi \epsilon a^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{x} \left(e^{s\psi(\mathbf{x})} - 1 \right) \right]$$

et montre que f_Y ne dépend que de la quantité adimensionnelle $\Phi \epsilon a^2$. Ceci est un résultat qui avait déjà été discuté dans [9], et que nous démontrons de manière rigoureuse. Plus important encore, nous détaillons les hypothèses assez restrictives sous lesquelles ce résultat est valable :

- le fond et l'exposition sont uniformes ;
- on traite les cartes en comptage (X), pas en intensité ($\frac{X}{\epsilon}$) ;
- les cartes de comptage sont données dans le plan, pas sur la sphère ;
- la dilatation choisie respecte la norme uniforme (ce qui n'est pas un choix standard).

Décroissance : Il est facile de voir que la fonction caractéristique $\hat{f}_{Y(\eta)}$ est infiniment dérivable ; ceci se traduit par une décroissance exponentielle de la densité de probabilité associée $f_{Y(\eta)}$. C'est une bonne nouvelle puisqu'on cherche en définitive les percentiles (quantiles) supérieurs de cette distribution.

Régularité : Par contre, on peut aussi se convaincre que la fonction caractéristique, restreinte à l'axe imaginaire ($s = -2\pi i\omega$), a une décroissance très lente vers l'infini.

Heuristiquement, le terme $e^{-2\pi i \omega \frac{K(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta')}} = \left(e^{-2\pi i \frac{K(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta')}} \right)^\omega$ devrait tendre vers une distribution uniforme de points sur le cercle⁴, indexés par η et η' . Pour un binning suffisamment fin et un fond et une exposition pas trop singuliers, on s'attend à ce que l'intégrale

$$\int_{S^2} d\eta' \Phi(\eta') \epsilon(\eta') e^{-2\pi i \omega \frac{K(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta')}}$$

oscille autour de zéro lorsque $\omega \rightarrow \infty$. En en prenant l'exponentielle, et en multipliant par une constante non nulle, on conclut $\hat{f}_{Y(\eta)}$ doit s'approcher d'une *constante différente de zéro*. L'évaluation numérique confirme ce comportement. Du côté de la densité de probabilité, on s'attend donc à des singularités de type delta de Dirac⁵, ce qui est également confirmé par l'implémentation, voir figure 3.2. En particulier, on remarque une singularité en zéro qui n'est pas de carré intégrable, signature du fait que la partie réelle de la transformée de Fourier est bornée inférieurement. Cette singularité est donc plus proche du delta de Dirac que d'une simple asymptote verticale.

Passons maintenant à l'implémentation. Un résultat préliminaire est donné par la proposition suivante.

Proposition 3.2. Théorème central limite. Notons $Y(\eta, t)$ la CWT du champ aléatoire de Poisson X lorsque l'exposition est donnée par $\epsilon_t(\eta') = t\epsilon(\eta')$. Alors

$$Y(\eta, t) \rightarrow N \left(\int_{S^2} d\eta' K(\eta, \eta') \Phi(\eta'), \int_{S^2} d\eta' K^2(\eta, \eta') \frac{\Phi(\eta')}{\epsilon_t(\eta')} \right)$$

lorsque $t \rightarrow \infty$, au sens de la convergence étroite des densités⁶.

Démonstration. Restreignons s à \mathbb{R} . A partir de 3.3, il est évident que $\log \hat{f}_{Y(\eta)}(s)$ est infiniment dérivable. On a même explicitement, pour $n \geq 1$,

$$\frac{d \log \hat{f}_{Y(\eta)}(s)}{ds^n} = \int_{S^2} \Phi(\eta') \frac{K^n(\eta, \eta')}{\epsilon^{n-1}(\eta')} e^{s \frac{K(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta')}} d\eta'.$$

Pour développer $\log \hat{f}_{Y(\eta)}(s)$ en série de Taylor partout convergente autour de $s = 0$, [24] nous apprend qu'il reste à vérifier qu'il existe C et M tels que

$$\left| \frac{d \log \hat{f}_{Y(\eta)}(s)}{ds^n} \right|_{s=0} \leq CM^n,$$

⁴De la même manière que la densité invariante de l'application $2x \bmod 1$ est uniforme en théorie ergodique des systèmes dynamiques.

⁵Si $\hat{f}(\omega)$ est borné inférieurement lorsque $\omega \rightarrow \pm\infty$, f appartient au mieux à l'espace de Sobolev $H^{-\frac{1}{2}-\varepsilon}(\mathbb{R})$. Voir [40].

⁶La convergence étroite est la convergence au sens des mesures sur l'espace $BV(\mathbb{R})$, l'espace des fonctions-test à variations bornées. La convergence étroite est faible, d'où l'utilisation du symbole \rightarrow , mais elle est plus forte que la convergence vague ou que la convergence au sens des distributions tempérées. Voir [40].

ce qui est bien le cas à partir des hypothèses de la proposition 3.1. On peut donc écrire, pour tout $s \in \mathbb{R}$,

$$\log \hat{f}_{Y(\eta)}(s) = \sum_{n=0}^{\infty} (\log \hat{f}_{Y(\eta)})^{(n)}(0) \frac{s^n}{n!}, \quad (3.4)$$

ou en ne s'intéressant qu'aux deux premiers ordres

$$\log \hat{f}_{Y(\eta)}(s) = \log \hat{f}_{Y(\eta)}(0) + s(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'(0) + \frac{s^2}{2}(\log \hat{f}_{Y(\eta)})''(0) + \frac{s^3}{6}(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'''(\xi), \quad (3.5)$$

avec $|\xi| \leq |s|$. Puisque f est une densité de probabilité, $\hat{f}_{Y(\eta)}(0) = \int_{\mathbb{R}} f_{Y(\eta)}(y) dy = 1$ et le premier terme disparaît. La seconde étape de la démonstration consiste à remarquer qu'une mise à l'échelle de l'exposition s'exprime de manière simple au niveau de f : il est facile de vérifier que

$$\begin{aligned} \log \hat{f}_{Y(\eta,t)}(s) &= t \log \hat{f}_{Y(\eta)}\left(\frac{s}{t}\right) \\ &= s(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'(0) + \frac{s^2}{2t}(\log \hat{f}_{Y(\eta)})''(0) + \frac{s^3}{6t^2}(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'''(\xi_t), \end{aligned}$$

avec $|\xi_t| \leq \frac{|s|}{t}$. Puisque $(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'''(s) < |(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'''(0)|$ est uniformément borné, on a la convergence de

$$\log \hat{f}_{Y(\eta,t)}(s) - \left(s(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'(0) + \frac{s^2}{2t}(\log \hat{f}_{Y(\eta)})''(0) \right)$$

vers 0 ponctuellement lorsque $t \rightarrow \infty$. Comme l'exponentielle est continue, on a même

$$\hat{f}_{Y(\eta,t)}(s) - \exp \left(s(\log \hat{f}_{Y(\eta)})'(0) + \frac{s^2}{2t}(\log \hat{f}_{Y(\eta)})''(0) \right) \rightarrow 0$$

ponctuellement lorsque $t \rightarrow \infty$. La troisième étape de la démonstration est l'utilisation du théorème de Lévy [40] qui relie la convergence ponctuelle dans l'espace de Fourier (prendre s imaginaire pur) à la convergence étroite des mesures. Par transformée de Fourier inverse, on conclut la convergence étroite de

$$f_{Y(\eta)} \left(\frac{y - (\log \hat{f}_{Y(\eta)})'(0)}{\sqrt{(\log \hat{f}_{Y(\eta)})''(0)}} \right)$$

vers la mesure gaussienne $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{y^2}{2}}$. La thèse est obtenue en substituant leur valeur explicite aux dérivées de $\log \hat{f}_{Y(\eta)}$ en zéro. \square

Le lecteur suspicieux aura tôt fait de se poser la question, à raison, de l'intérêt pratique d'un tel développement théorique au beau milieu d'une méthode de traitement de données astrophysiques. La réponse tient en deux points :

1. Les estimations asymptotiques explicites du premier et du deuxième moment de la distribution sont deux informations importantes pour *localiser* a priori f , et donc échantillonner en y et en s de manière optimale sans aucun tâtonnement itératif.
2. L'équation 3.4 permet d'éviter le (lourd) calcul de l'expression de $\hat{f}_{Y(\eta)}$ pour un nombre prohibitif d'abscisses s . En se servant des premiers termes du développement de Taylor du logarithme, on multiplie la vitesse d'implémentation par un facteur typiquement compris entre 10 et 100 sans perte notable de précision⁷. Cette méthode est employée pour tous nos calculs de quantiles.

L'implémentation proprement dite, outre le calcul de $\hat{f}_{Y(\eta)}$ en suffisamment de points s , consiste en la transformée inverse de cette fonction, puis en l'estimation des quantiles sur base des valeurs de la distribution cumulée de $Y(\eta)$ (c'est-à-dire l'intégrale de $f_{Y(\eta)}$). Ceci doit être fait pour chaque point η de la VP ou de la planisphère. On obtient ainsi une carte des quantiles q_α pour chaque VP et chaque α , et les détections se font de manière standard en comparant les valeurs de la transformée de la carte en intensité à ces niveaux de confiance.

D'un point de vue pratique, les erreurs d'arrondi ne se manifestent qu'à partir du moment où on calcule des valeurs de $\hat{f}_{Y(\eta)}$ correspondant à des abscisses très grandes en valeur absolue. Il y a donc un compromis entre les erreurs d'arrondi et le phénomène de Gibbs au moment de la transformée de Fourier inverse (parce qu'on a tronqué la transformée de Fourier).

Pour l'estimation des quantiles proprement dite, en vue de réduire le temps de calcul, nous avons expérimenté sans succès plusieurs méthodes de la littérature [1, 35]. Ces méthodes consistent en une inversion plus ou moins complète de la transformée de Laplace basée sur la seule connaissance des *moments* de la densité de probabilité. Rappelons que ces moments sont par exemple obtenus par dérivation de la fonction caractéristique en 0. Etant des méthodes d'inversion a priori, elles ne rivalisent pas avec la connaissance relativement détaillée que nous avons de la densité de probabilité en l'équation 3.4.

Enfin, pour conclure cette section, mentionnons que l'erreur principale des approches précédentes ([9, 10, 32, 33]) était de faire l'approximation d'un fond *localement* uniforme, c'est-à-dire qu'au lieu de l'équation 3.3, ils utilisent implicitement

$$\hat{f}_{Y(\eta)}(s) = \exp[\Phi(\eta)\epsilon(\eta) \int_{S^2} d\eta' \left(e^{s \frac{K(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta)}} - 1 \right)]$$

avec un fond Φ plus ou moins ad hoc, lui-même implicite dans [32, 33]. Il est évident que ces auteurs ne disposaient pas de l'équation ci-dessus, mais la philosophie des leurs s'y

⁷La condition empirique suffisante pour qu'il en soit ainsi est que $\Phi\epsilon d\eta$ soit globalement supérieur à 10^{-2} , c'est-à-dire que le nombre de photons du fond soit en moyenne supérieur à 10^{-2} par bin. C'est *toujours* le cas au centre des VP de basse énergie à cause de l'émission diffuse extragalactique uniforme. Cette condition empirique suppose aussi que l'ondelette soit à une échelle de l'ordre de grandeur de la PSF, ce qui est également toujours le cas. Lorsque la condition n'est pas remplie, c'est parce que $\hat{f}_{Y(\eta)}$ a des queues trop larges mal approximées par des exponentielles décroissantes. A ce moment, on peut recourir à la formule 3.3.

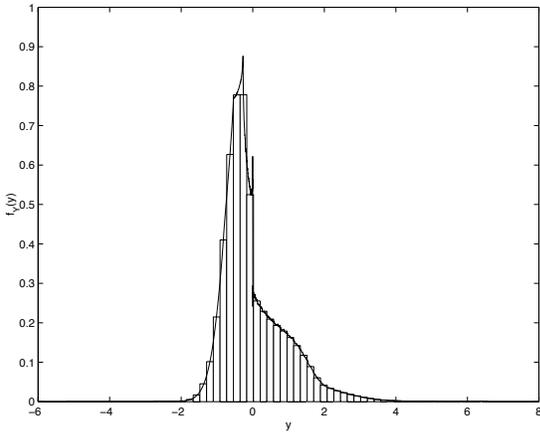


FIG. 3.1 – Densité de probabilité des valeurs de la CWT pour une ondelette “chapeau mexicain” à une échelle $a = 4$. Le fond est pris uniforme de niveau $7,5 \cdot 10^{-3}$ photon/bin, c’est-à-dire une moyenne de 192 photons par VP. La courbe est calculée à partir de l’évaluation directe de la formule 3.3. L’histogramme, obtenu par simulation Monte-Carlo, confirme la validité de cette évaluation directe.

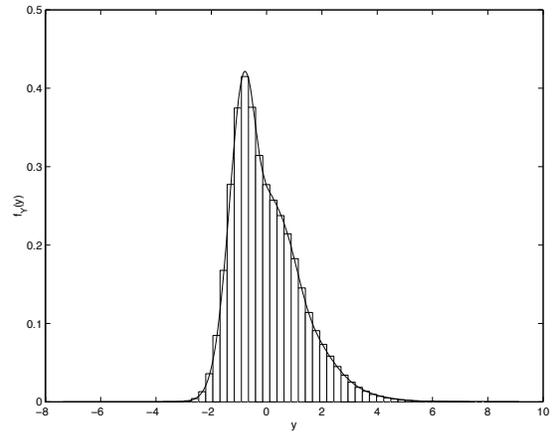


FIG. 3.2 – Idem, $1,5 \cdot 10^{-2}$ photon/bin, soit 384 photons en moyenne par VP. Nous sommes ici dans le domaine de validité de l’implémentation rapide par développement de Taylor du logarithme. La courbe en trait plein donne donc le même résultat que soit la méthode d’évaluation de 3.3. Elle reste en théorie singulière malgré son apparence lisse !

ramène entièrement. Nous montrons au chapitre suivant que l'approximation est parfois grossière.

Dans [21], au contraire, l'auteur se rend compte de cette erreur : “*A rigorous approach is clearly desirable (...) one which deals with the Poisson nature of the data (...) given an arbitrarily complex background*”. Mais il se sent obligé d'utiliser une ondelette de Haar pour récupérer (à une approximation près!) un calcul rigoureux des seuils. Rappelons que l'ondelette de Haar, de forme rectangulaire, n'est pas adaptée à la géométrie du problème.

3.3 Estimation du fond multi-échelle

Aucune des deux approches de reconstruction du fond Φ mentionnées au chapitre 2 n'est vraiment satisfaisante. Dans le cas d'un modèle physique, le fond ne correspond pas toujours fidèlement aux données. Dans le cas de reconstruction du fond basée sur les données, un simple lissage fait perdre des informations du fond tout en incluant une contribution des sources, que l'on veut éviter. Idéalement, en vue de décider si un candidat source en est une, il faudrait disposer d'une carte où le fond ainsi que les autres sources déjà détectées sont présents. Autrement dit, il ne faudrait supprimer que le candidat source et le bruit de comptage. C'est assez différent d'un lissage classique...

Nous voyons deux types de solutions à ce problème :

Suppression de pics . Partant des données brutes, on calcule leurs *paquets d'ondelettes continus* [37, 38], c'est-à-dire essentiellement leur transformée en ondelette à plusieurs échelles, prête à être inversée. Après avoir repéré la signature d'un candidat source à travers les échelles, on pourra imaginer l'en enlever. Par la même occasion, on pourra enlever le bruit de comptage en seillant la transformée (mise à zéro des petites valeurs).

Ajout de sources . Partant d'un modèle physique, après l'avoir correctement calibré, il faut rajouter les sources détectées les unes après les autres. Ces sources à rajouter sont modélisées par leur PSF (différente pour chaque source en fonction de leur indice spectral) ou par leur reconstruction par paquets d'ondelettes continus. Les structures plus compliquées à rajouter nécessiteront cette approche par paquets d'ondelettes continus.

Dans les deux cas, le fond est multi-échelle, c'est-à-dire différent en fonction de l'échelle à laquelle on veut détecter les sources. Soit on enlève d'abord les sources aux petites échelles, soit on rajoute d'abord les sources les plus étendues. Il reste d'abord à examiner les aspects théoriques du bien-fondé de ces méthodes, et nous sommes au début de l'étape d'implémentation (voir chap.4).

3.4 Déconvolution et détection de sources

Le principal reproche que l'on peut faire à nos développements jusqu'ici est qu'ils ne prennent pas en compte la connaissance détaillée que nous avons de la PSF (rappelons que

le flux réel de photons est convolué par la PSF pour obtenir le flux enregistré : ceci tient compte des erreurs expérimentales de détermination de la direction incidente). D'un point de vue pratique, ceci se remarque lors de l'examen de certaines structures, en dessous du seuil de détection, qui auraient été détectées si elle n'avait pas souffert de la convolution [32]. Certaines approches récentes fournissent des algorithmes satisfaisants de *déconvolution* adaptés aux données de comptage [26]. Il est désirable d'inclure cette étape dans la détection des sources, et nous donnons ci-dessous une solution conceptuelle possible à ce problème.

Supposons que nous disposions d'une estimation du flux de fond Φ et une estimation du flux générant les données Φ_d . La méthode que nous avons développée jusqu'ici revient à peu de choses près⁸ à comparer $W_\psi \Phi_d$ avec le seuil de détection calculé à partir de Φ via la formule 3.3. L'amélioration proposée se base de manière cruciale sur les développements du chapitre 1, section 1.3.4 : il s'agirait de déconvoluer Φ et Φ_d avec la PSF, ce qui donnerait Λ et Λ_d respectivement. Ensuite, l'idée serait de comparer $W_\psi \Lambda_d$ avec le seuil calculé à partir de Λ au lieu de Φ . En pratique, la méthode de déconvolution de Φ_d serait une méthode combinée débruitage-déconvolution des données de départ, comme dans [26]. Cette déconvolution sera une étape particulièrement difficile étant donné la pauvreté des données. Mais cela devrait permettre de récupérer, espérons-le, les sources et les structures affaiblies par la convolution avec la PSF.

Quoiqu'il en soit, la déconvolution n'est peut-être pas la meilleure solution pour prendre en compte l'information de la PSF puisque toute déconvolution fait intervenir une régularisation arbitraire des données.

3.5 Filtrage directionnel et détection de sources isotropes.

En vue de détecter des objets isotropes par filtrage, la chose la plus naturelle à faire est d'utiliser un filtre lui-même isotrope, c'est-à-dire qui ressemble à l'objet à détecter. C'est la manière de procéder de la plupart des auteurs, et lorsque ce n'est pas le cas [21] ce sont d'autres raisons pratiques qui ont motivé le choix. Pourtant un filtre isotrope n'est clairement pas optimal : il détecte presque aussi bien d'autres motifs qui n'ont à priori rien à voir avec une source ! Tentons une approche "axiomatique" : le filtre que nous voulons doit avoir les propriétés suivantes.

- Mise en évidence des sources qui sont des objets isotropes, de forme bien connue (PSF variable avec l'énergie et la surface efficace du détecteur).
- Minimisation du bruit de comptage (mise à zéro en moyenne)
- Aveugle aux objets qui ne sont *pas* isotropes, en particulier au fond structuré.

Etant donné les degrés de liberté que proposent une CWT directionnelle, il doit y avoir moyen de les utiliser pour fabriquer un tel filtre. Des quelques tentatives que nous avons expérimentées, il est apparu que la suivante est la meilleure.

⁸En effet, une méthode de débruitage efficace est de seuiller la transformée en ondelettes, c'est-à-dire mettre à zéro ses valeurs trop petites en module, donc ne modifie pas ses maximas. Regarder X ou Φ_d est donc la même chose si on emploie cette méthode d'estimation du flux.

1. Prendre la CWT directionnelle (avec ondelette de Morlet) de l'image de départ pour une échelle donnée et plusieurs angles.
2. En prendre la partie réelle, et mettre à zéro les valeurs négatives.
3. Faire le *produit* de ces différentes images transformées.

D'un point de vue intuitif, ceci devrait détecter les sources isotropes qui sont mises en évidence quel que soit l'angle considéré. Toutes les structures pour lesquelles il existe au moins un angle où elles ne sont pas mises en évidence sont mises à zéro. Le bruit de comptage est mis à zéro de manière beaucoup plus efficace que dans le cas isotrope. A priori, nous devrions donc rencontrer les trois "axiomes" énoncés plus haut. Ce sont en fait ces intuitions qui nous ont poussé à développer les ondelettes directionnelles sur la sphère (chapitres 5 à 7)!

En pratique il reste encore beaucoup de travail à faire, mais les premières simulations sont prometteuses, comme on peut le voir à la figure 3.5.

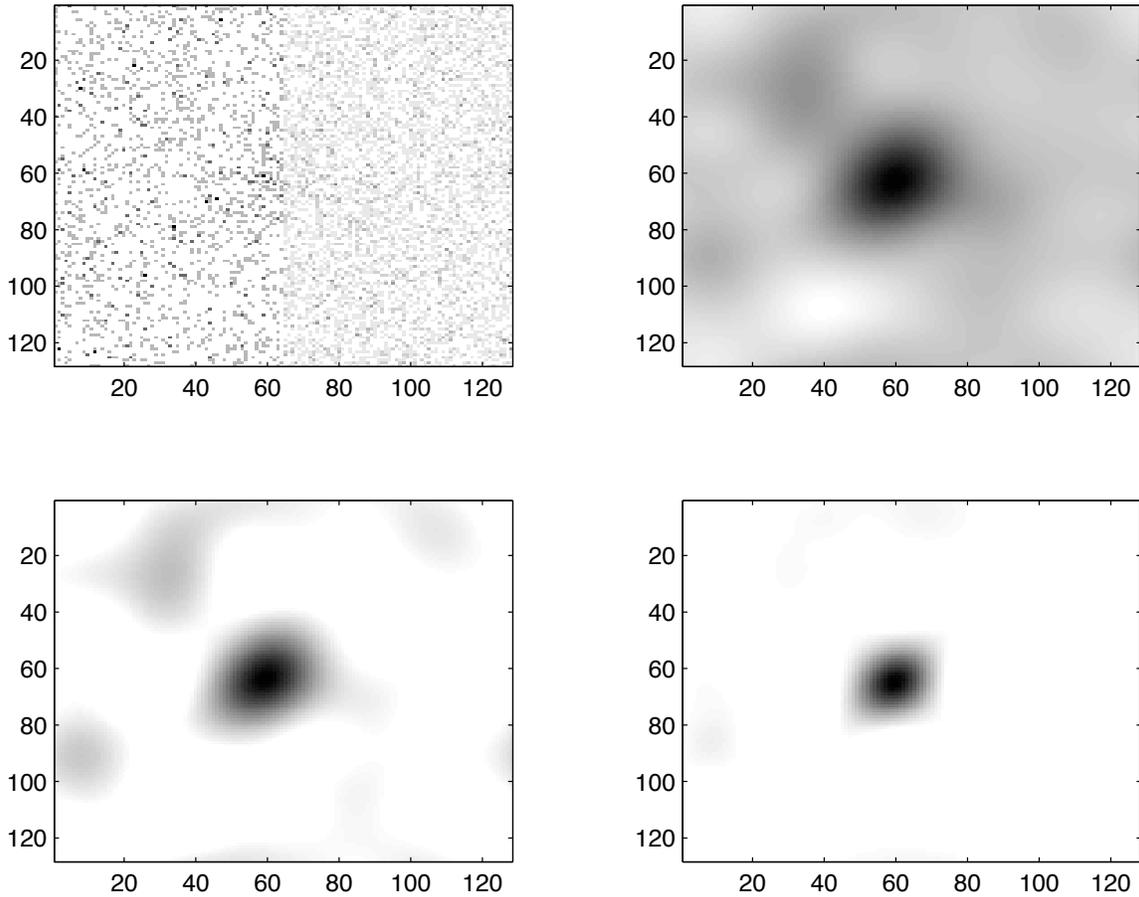


FIG. 3.3 – Mise en évidence d’une source simulée. *Haut-gauche* : simulation d’une source faible (de forme gaussienne) presque invisible à l’œil nu, au centre de l’image. Bruit de fond uniforme. La zone de gauche (abscisses 1-64) est trois fois moins exposée que la zone de droite (65-128). *Haut-droite* : filtrage des données brutes par une gaussienne dont la largeur est égale à celle de la source, c’est-à-dire la PSF. On voit que la source est bien mise en évidence. *Bas-gauche* : transformée en ondelettes (chapeau mexicain) à une échelle comparable à la largeur de la PSF. Le fond est mis en moyenne à zéro, ce qui fait ressortir la source d’autant mieux. Les structures qui ressortent en grisé montrent cependant qu’il n’y a pas moyen de se débarrasser totalement du fond. *Bas-droite* : filtrage non linéaire proposé pour éliminer ce qui ne ressemble pas à une source isotrope. On n’utilise que deux directions : Nord-Sud et Est-Ouest (l’ondelette utilisée est réelle). On voit que le bruit de fond a presque totalement disparu.

Chapitre 4

Traitement des données

4.1 Cartes sur la planisphère

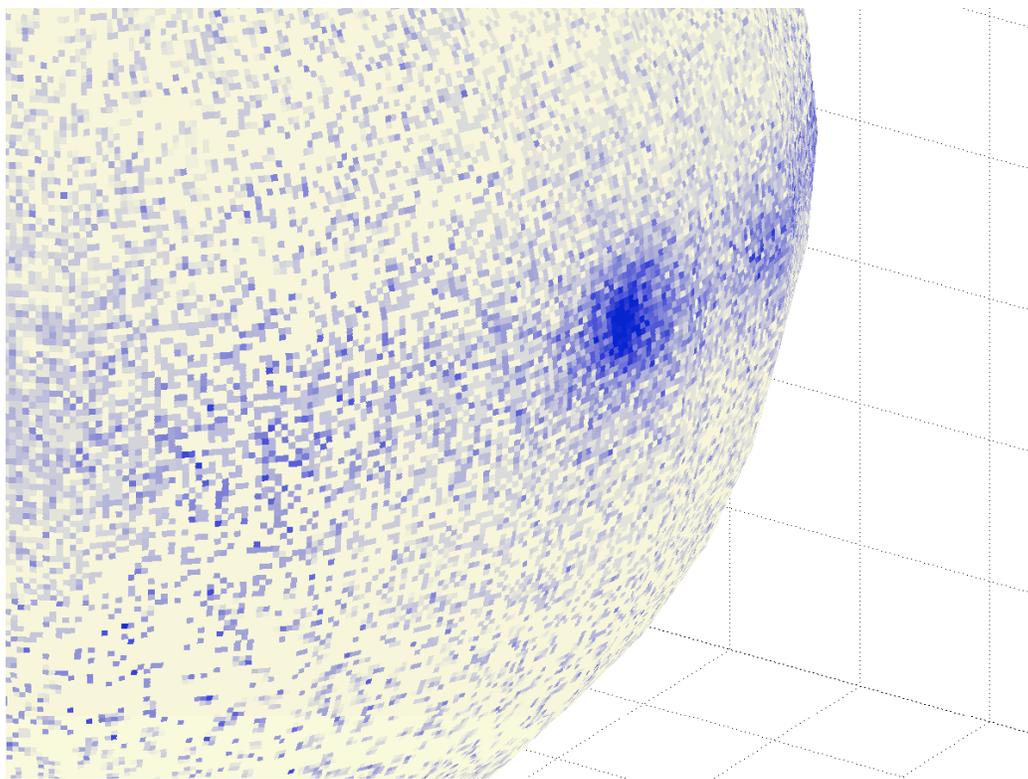


FIG. 4.1 – Carte en intensité du ciel gamma dans la gamme d'énergie 300 MeV et plus. On a ici tenu compte de toutes les périodes d'observation isolées. Zoom sur le plan galactique, la source la plus brillante est le pulsar Vela.

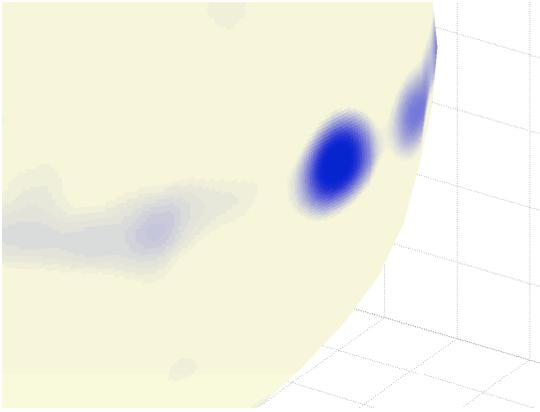


FIG. 4.2 – Partie positive de la CWT sphérique (ondelette différence de gaussiennes) à une échelle 0.05. Le pulsar Vela et le fond galactique à sa droite sont mis en évidence parce qu’il s’agit de structures à une échelle comparable à celle de l’ondelette.

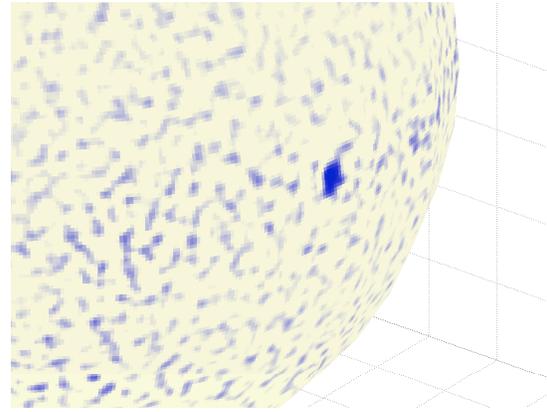


FIG. 4.3 – Partie positive de la CWT sphérique (ondelette différence de gaussiennes) à une échelle 0.01. Le filtrage révèle une multitude de sources potentielles dont le test statistique révélera la significativité. Les structures à grande échelle sont encore visibles, mais beaucoup moins.

L’étude plus approfondie des données sur la planisphère passe par le calcul des seuils de significativité à partir du fond diffus. Nous sommes pour l’instant dans l’incapacité de fournir ces seuils étant donnée la lenteur de calcul de la CWT sphérique par rapport à sa correspondante euclidienne. Déterminer les seuils pour la carte entière demanderait en effet de calculer plus d’une centaine de convolutions sphériques ainsi que des capacités de stockage mémoire irréalistes. Bien qu’il existe des astuces pour repousser ces limitations, tous nos tests ont jusqu’ici été faits sur les VP, de surface 10 fois plus petites et dans un plan.

4.2 Seuils de détection

Pour rappel, VP désigne “viewing period”, soit une période d’observation isolée d’une région fixe du ciel. L’implémentation de la formule 3.3 pour les données de la VP 1.0 nous a livré quelques surprises : l’erreur relative des méthodes classiques de détermination des quantiles supérieurs (comme 0.999) oscille entre moins et plus 60 pourcents de la valeur calculée de manière “exacte” !

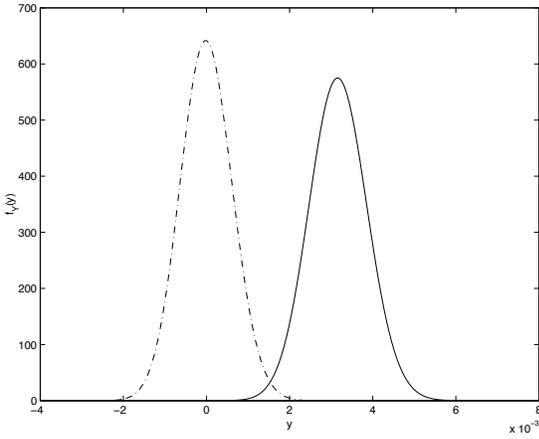


FIG. 4.4 – Trait plein : Densité de probabilité des valeurs de la transformée en ondelettes en un bin donné de la VP 1.0. Trait mixte : La même, approximée par les méthodes classiques supposant un fond localement uniforme. Quantile 0.999 corrigé de $1,98.10^{-3}$ à $5,38.10^{-3}$, soit une erreur de 63%.

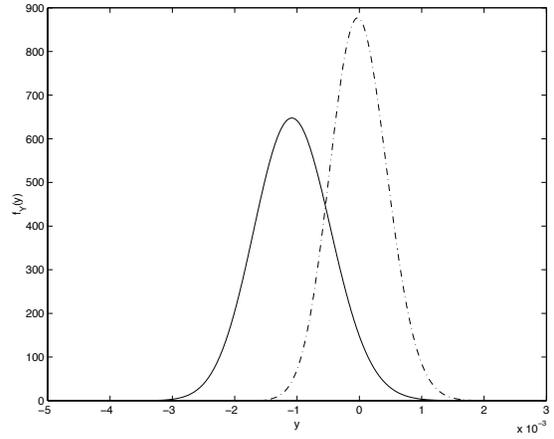


FIG. 4.5 – Idem, pour un autre bin de la même VP. Les courbes sont à peu près gaussiennes parce que l'émission diffuse galactique est riche à cet endroit. Quantile 0.999 corrigé de $1,49.10^{-3}$ à $9,26.10^{-4}$, soit une erreur de 61%.

Les différences entre les courbes ci-dessus sont dues aux non-uniformités du fond. La transformée en ondelettes du fond à une échelle donnée n'est alors pas nulle, d'où il résulte que la densité de probabilité de ses valeurs pour un champ aléatoire de Poisson généré à partir du fond n'est pas centrée en zéro. C'est ce qui cause la majeure partie des différences entre les courbes en trait plein et en trait mixte. On peut qualifier les méthodes classiques de *diagonales* puisque, pour déterminer les seuils de détection en un point elles ne se servent que de l'information du fond en ce point. La formule 3.3 est *non diagonale* puisque Φ apparaît sous le signe d'intégration.

Passons maintenant à l'analyse proprement dite de la VP 1.0. La carte en intensité est reproduite ci-dessous, elle se trouve dans une autre région de la planisphère que Vela. Nous avons choisi cette VP parce que c'est une des plus riches du ciel, mais pas une des plus faciles étant donné qu'elle est centrée sur le plan galactique. Les deux sources très visibles sont deux pulsars, Crabe et Geminga. Le premier est un reste de la supernova que les Chinois ont observé en 1054, et la seconde est le premier pulsar muet en radio qui a été identifié grâce à l'astronomie gamma. Les autres sources visibles sont des AGN, dont les noms officiels ne sont pas très poétiques.

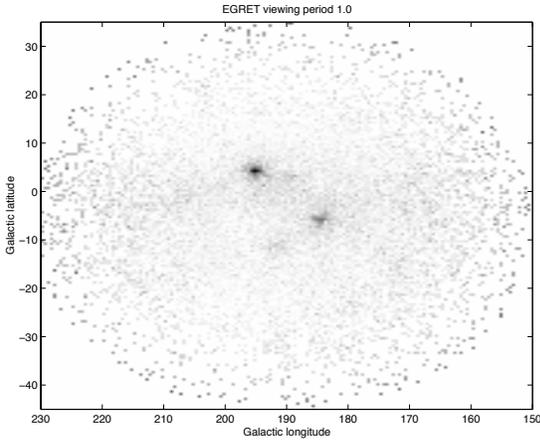


FIG. 4.6 – Carte en intensité de la VP 1.0, gamme d'énergie 100 MeV et plus.

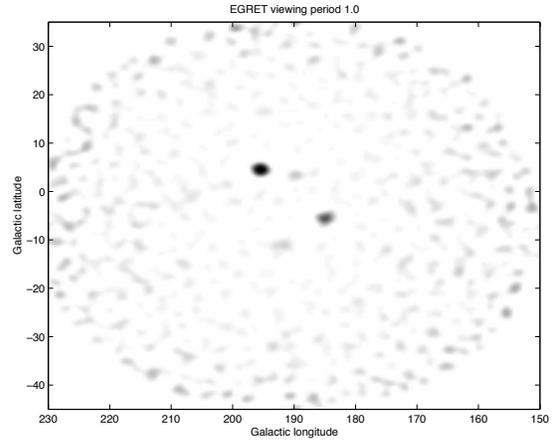


FIG. 4.7 – CWT “chapeau mexicain” de la carte en intensité à une échelle $a = 2$, c'est-à-dire que l'ondelette a un rayon de 2 pixels, soit un degré. C'est un peu moins que la largeur moyenne de la PSF (2 degrés). Les sources sont bien mises en évidence.

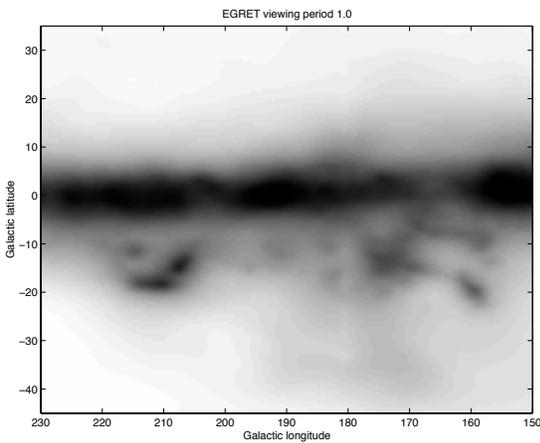


FIG. 4.8 – Carte du fond. La bande horizontale correspond à l'émission diffuse galactique. Cette carte est utile pour le calcul des seuils de détection.

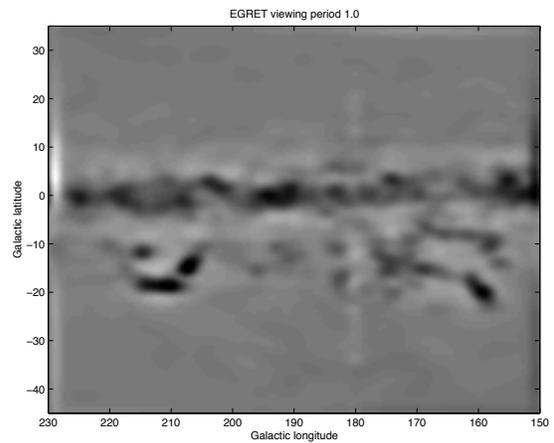


FIG. 4.9 – CWT de la carte du fond, à l'échelle $a = 2$, qui donne une idée de sa non-uniformité. L'information n'est pas pertinente près des bords de l'image puisque le calcul de la CWT implique des FFT qui périodisent les données.

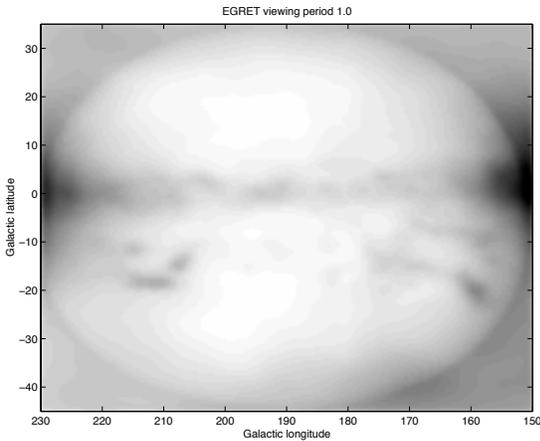


FIG. 4.10 – Carte des seuils de détection, calculée à partir du fond, de l'exposition et d'une implémentation rapide de la formule 3.3. Il s'agit des quantiles 0.9995.

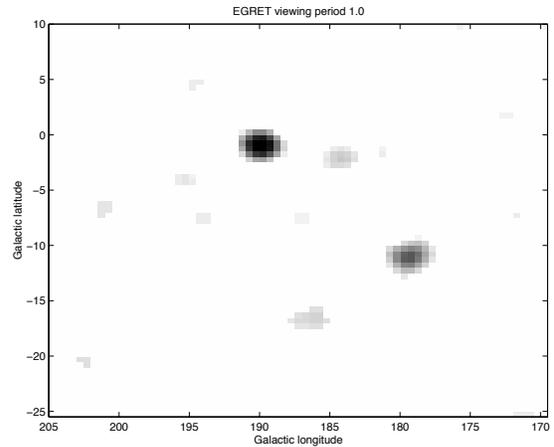


FIG. 4.11 – Carte des valeurs significatives de la CWT, c'est-à-dire qui dépassent les seuils de détection 0.9995. Zoom sur la région intéressante. Crabe et Geminga sont les mieux visibles. Les deux autres sources bien mises en évidence en grisé sont des AGN.

On voit donc que notre méthode récupère les sources en accord avec le catalogue officiel en vigueur. Le même exercice peut être fait pour d'autres VP, comme par exemple la VP 21.0 qui est en-dehors du plan galactique (à des latitudes galactiques très différentes de zéro). Certaines différences avec le catalogue officiel tiennent au caractère instantané des VP : certaines sources ne sont pas visibles tout le temps. Le catalogue officiel a lui été établi sur 4 années d'observation. Les différences dans la détermination précise des positions des sources sont plutôt expliquées par une erreur des méthodes d'ondelettes, pas aussi bien calibrées que les méthodes paramétriques pour cet exercice.

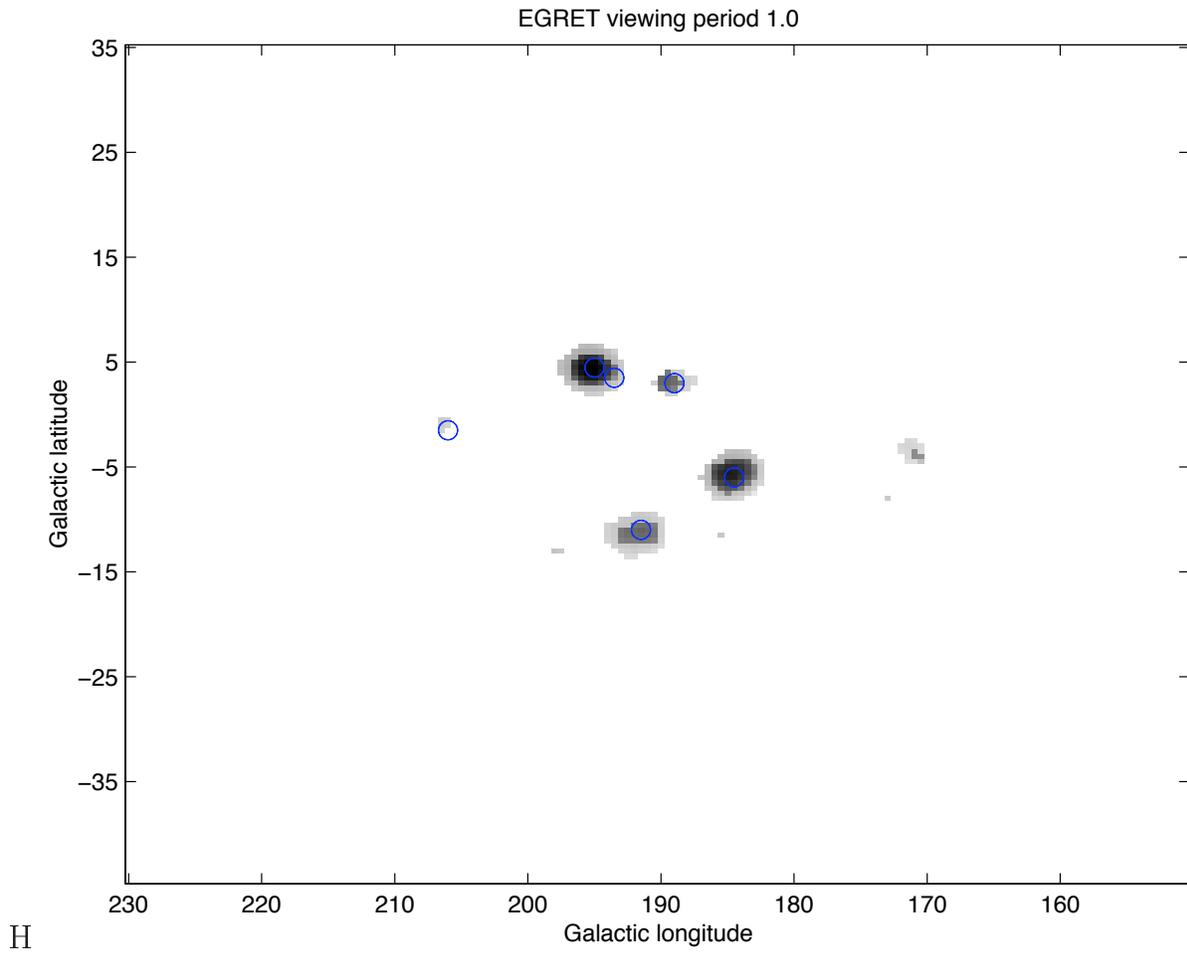


FIG. 4.12 – Reconstruction des sources gamma à partir des valeurs significatives de la CWT à plusieurs échelles avoisinant la largeur de la PSF. La reconstruction est faite à l'aide des paquets d'ondelettes continus. Les cercles indiquent les positions des sources du catalogue officiel [16]. *Par Régis Terrier.*

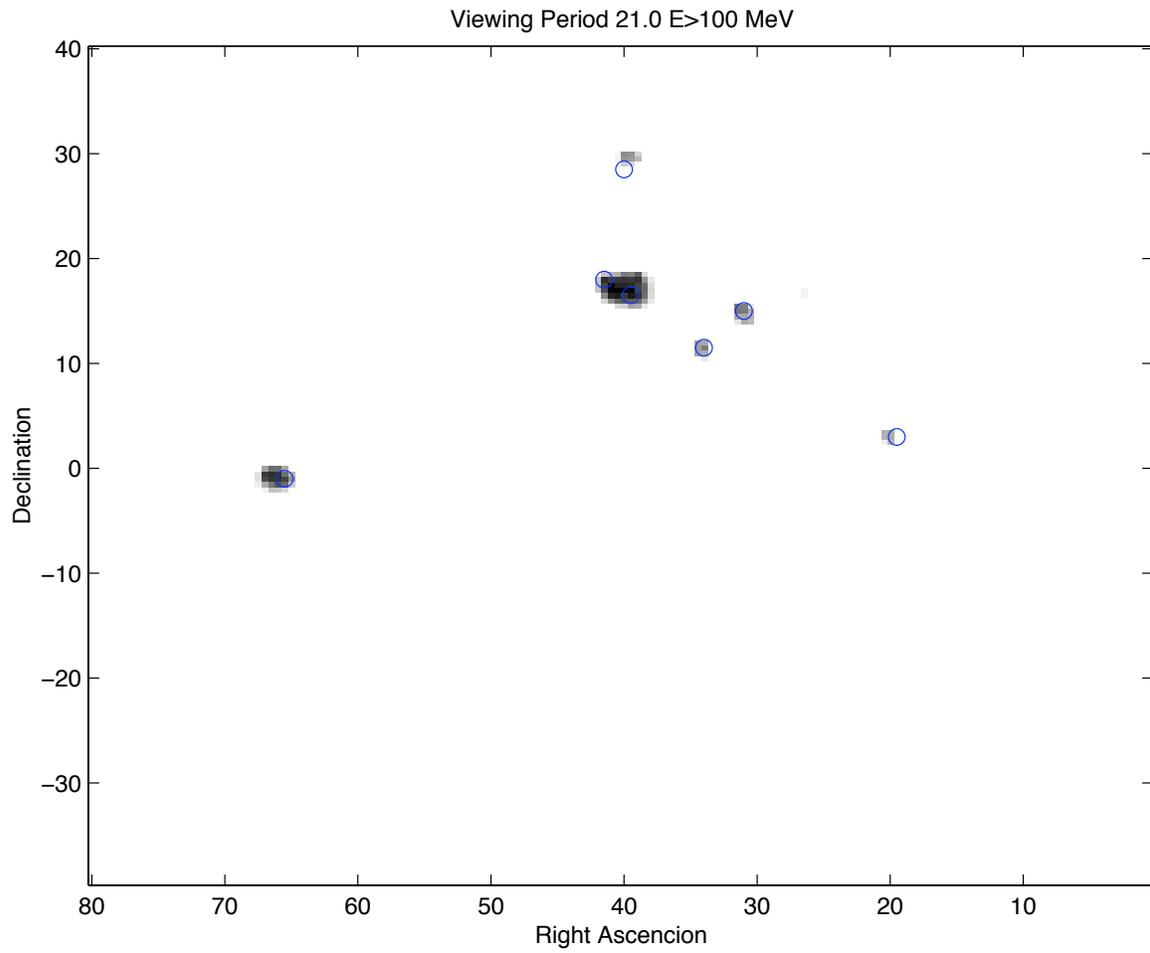


FIG. 4.13 – Même exercice de reconstruction de source que ci-dessus, pour la VP 21.0. Toutes les sources sont des AGN. *Par Régis Terrier.*

Deuxième partie

Ondelettes directionnelles sur la sphère

Chapitre 5

Localisation temps-échelle et position-échelle

L'objectif de ce chapitre est de montrer que la localisation de fonctions dans un espace temps-échelle (cas 1-D) ou position-échelle (cas 2-D) est étroitement liée à la localisation plus classique de fonctions en temps et en fréquence. Ces quelques rappels et résultats théoriques sont à considérer comme un contexte pour le chapitre 6 où nous les appliquerons à un problème particulier.

Avant de rappeler ce que l'on entend par localisation en temps et en fréquence, il est bon de faire une remarque sur le caractère pluridisciplinaire des objets manipulés. En traitement du signal, une fonction d'une variable t est en général associée à un signal évoluant dans le temps, alors qu'une fonction de deux variables x_1 et x_2 correspond en général aux niveaux de gris d'une image. Mais certains concepts que nous utilisons ici sont initialement dérivés de la mécanique quantique où ces fonctions, quel que soit leur nombre de variables, sont des fonctions d'ondes complexes représentées dans l'espace de configuration. Il s'agit bien de traitement du signal/d'image qui motive nos développements, mais le lecteur ne s'étonnera pas de l'adoption des notations de Dirac pour les produits scalaires et les opérateurs, ni de l'utilisation de vocabulaire approprié.

5.1 Localisation en temps et en fréquence

Soit f une fonction du temps, à valeurs complexes. L'opérateur Q de multiplication par t permet de caractériser tous les moments de f lorsqu'on prend la moyenne de ses puissances successives :

$$\langle Q^n \rangle_f \equiv \frac{\langle f | Q^n f \rangle}{\langle f | f \rangle} = \|f\|_2^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} t^n |f(t)|^2 dt.$$

En particulier, le premier moment donne la valeur de t autour de laquelle f est centrée et le second moment centré $(\Delta Q)_f^2 \equiv \langle (Q - \langle Q \rangle_f)^2 \rangle_f$ donne une mesure de la dispersion de f autour de sa moyenne. Q est donc appelé *opérateur de localisation* en temps. De manière

similaire, on peut représenter f par sa transformée de Fourier et considérer l'opérateur P de multiplication par k dans l'espace de Fourier,

$$\langle P^n \rangle_f \equiv \frac{\langle f | P^n f \rangle}{\langle f | f \rangle} = \|f\|_2^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} k^n |\hat{f}(k)|^2 dk,$$

et on dira que P est opérateur de localisation en fréquence. Dans les notations de la mécanique quantique, on peut exprimer ces opérateurs comme¹

$$Q = \int_{-\infty}^{\infty} dt |t\rangle t \langle t|, \quad P = \int_{-\infty}^{\infty} dk |k\rangle k \langle k|.$$

Il est bien connu qu'une fonction ne peut pas être bien localisée à la fois en temps et en fréquence. L'inégalité de Heisenberg est une manière de quantifier cela.

Théorème 5.1. *Q et P vérifient la relation de commutation canonique (CCR) :*

$$[Q, P] = i,$$

et donc la relation d'incertitude

$$(\Delta Q)_f (\Delta P)_f \geq \frac{1}{2}.$$

Les fonctions f qui sont les mieux localisées conjointement en temps et en fréquence au sens de Heisenberg, c'est-à-dire les fonctions qui saturent l'inégalité ci-dessus, sont les paquets d'ondes gaussiens :

$$f(t) = C e^{i\langle P \rangle t} e^{-\left(\frac{t - \langle Q \rangle}{2\Delta Q}\right)^2},$$

où C est une constante arbitraire. Tous ces résultats se trouvent dans les livres de base de mécanique quantique, comme [7].

5.2 Localisation temps-fréquence : transformée de Fourier à fenêtres

Les représentations temps-fréquence, c'est-à-dire où f est représentée à la fois en temps et en fréquence, sont souvent plus intéressantes que les représentations classiques pour toute une série de problèmes de traitement de signaux. Un exemple est la transformée de Fourier à fenêtres (WFT - Windowed Fourier Transform), ou encore transformée de Gabor.

¹Ces quantités, de même que toutes les suivantes qui feront intervenir un formalisme similaire, sont à comprendre au sens faible : la convergence des intégrales n'est assurée que lorsque l'intégrand est pris dans un produit scalaire ou plutôt un produit de dualité $\langle f | \cdot \rangle$.

5.2.1 Le cas 1D

Celle-ci est définie à partir d'une fenêtre g par

$$(G_g f)(p, q) \equiv \langle g_{pq} | f \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} dt \overline{g(t-q)} e^{-ipt} f(t),$$

et est hautement redondante si on n'échantillonne pas ses paramètres. Comme dans le cas de la transformée de Fourier classique, il existe une formule de reconstruction :

$$I = c_g^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq |g_{pq}\rangle \langle g_{pq}|, \quad c_g = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} |g(t)|^2 dt.$$

Nous disposons maintenant de deux paramètres au lieu d'un pour localiser f : q correspond à une position et p à une fréquence. De la même manière qu'à la section précédente, introduisons les opérateurs de localisation dans l'espace temps-fréquence de la WFT par

$$\begin{aligned} \tilde{Q} &= c_g^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq |g_{pq}\rangle q \langle g_{pq}|, \\ \tilde{P} &= c_g^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq |g_{pq}\rangle p \langle g_{pq}|. \end{aligned}$$

On peut se convaincre que ce choix est judicieux en constatant par exemple que leur moyenne par rapport à f ,

$$\begin{aligned} \langle \tilde{Q} \rangle_f &= c_g^{-1} \|f\|_2^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq q |\langle g_{pq} | f \rangle|^2, \\ \langle \tilde{P} \rangle_f &= c_g^{-1} \|f\|_2^{-2} \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq p |\langle g_{pq} | f \rangle|^2. \end{aligned}$$

correspond bien à une estimation raisonnable des premiers moments en temps et en fréquence à partir des seules valeurs de la WFT. Un autre argument qui vient conforter ce choix, et qui règle par la même occasion le problème de la définition du domaine de ces opérateurs intégraux singuliers est le résultat suivant.

Proposition 5.1. *Soit g une fenêtre continue et intégrable sur \mathbb{R} . Après avoir recentré g à zéro en temps et en fréquence,*

$$\tilde{Q} = Q \quad \text{et} \quad \tilde{P} = P.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
c_g(\tilde{Q}f)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq g_{pq}(t) q \langle g_{pq} | f \rangle \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} dp \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt' e^{ip(t-t')} q g(t-q) \overline{g(t'-q)} f(t') \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dq \int_{-\infty}^{\infty} dt' \delta(t-t') q g(t-q) \overline{g(t'-q)} f(t') \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dq q |g(t-q)|^2 f(t) \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dy (t-y) |g(y)|^2 f(t) \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dy |g(y)|^2 t f(t)
\end{aligned}$$

(le second terme disparaît parce que g est centré en zéro). De la même manière,

$$\begin{aligned}
c_g(\tilde{P}f)(t) &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk' (k-k') |\hat{g}(k')|^2 \hat{f}(k) \\
&= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk' |\hat{g}(k')|^2 k \hat{f}(k)
\end{aligned}$$

□

D'un point de vue pratique, ce résultat montre que l'étude de la localisation d'une fonction à partir de sa transformée de Fourier à fenêtre n'est pas biaisée par la transformée. Une condition suffisante très large pour qu'il en soit ainsi est que la fenêtre g soit réelle et paire (et continue et intégrable). Dès lors, les relations d'incertitude appliquées à \tilde{Q} et \tilde{P} montrent que n'importe quelle fonction de p et q ne peut pas s'improviser transformée de Fourier à fenêtre d'une fonction f . Par exemple, si $G_g f$ se trouve être bien localisée en q , c'est-à-dire en position, il faudra qu'elle soit délocalisée en p , c'est-à-dire en fréquence, pour satisfaire à l'inégalité de Heisenberg (et vice-versa). Cette observation trouve en fait son origine dans le fait que ces fonctions de q et p appartiennent à un espace de Hilbert à noyau reproduisant, strictement inclus dans $L^2(\mathbb{R}^2)$. C'est logique en regard du fait que la transformée redondante d'une fonction ne peut pas contenir plus d'information que la fonction elle-même.

5.2.2 Le cas 2D

En 2D, on parlera plutôt de position que de temps, et les résultats se généralisent sans difficultés. La transformée de Fourier à fenêtre est définie par

$$(G_g f)(\mathbf{p}, \mathbf{q}) \equiv \langle g_{\mathbf{p}\mathbf{q}} | f \rangle = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{x} \overline{g(\mathbf{x} - \mathbf{q})} e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}} f(\mathbf{x}),$$

et vérifie la formule d'inversion

$$I = c_g^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{q} |g_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\rangle \langle g_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|, \quad c_g = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{x} |g(\mathbf{x})|^2.$$

Comme il y a maintenant quatre paramètres il faut introduire quatre opérateurs de localisation :

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_i &= c_g^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{q} |g_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\rangle q_i \langle g_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|, \\ \tilde{P}_i &= c_g^{-1} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{p} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{q} |g_{\mathbf{p}\mathbf{q}}\rangle p_i \langle g_{\mathbf{p}\mathbf{q}}|, \end{aligned}$$

avec $i = 1, 2$. Le résultat suivant rejoint l'intuition du cas 1D, et sa justification est complètement analogue.

Proposition 5.2. *Soit g une fenêtre continue et intégrable sur \mathbb{R}^2 . Après avoir recentré g à zéro en position et en fréquence,*

$$\tilde{Q}_i = Q_i \quad \text{and} \quad \tilde{P}_i = P_i,$$

$i = 1, 2$, où Q_i et P_i sont les opérateurs habituels de multiplication par q_i et p_i respectivement.

Les mêmes commentaires que dans le cas 1D sont valables, en particulier les relations d'incertitude usuelles de la mécanique quantique sont d'application telles quelles.

Proposition 5.3. \tilde{Q}_i et \tilde{P}_j satisfont les relations de commutation canoniques (CCR) ($i = 1, 2, j = 1, 2$) :

$$\begin{aligned} [\tilde{Q}_i, \tilde{P}_j] &= i\delta_{ij} \\ [\tilde{Q}_i, \tilde{Q}_j] &= 0 \\ [\tilde{P}_i, \tilde{P}_j] &= 0, \end{aligned}$$

et donc les inégalités de Heisenberg

$$\Delta\tilde{Q}_i \Delta\tilde{P}_i \geq \frac{1}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Les fonctions f qui saturent les deux inégalités ci-dessus en même temps sont les états comprimés [3]. Un cas particulier de ceux-ci sont les paquets d'ondes gaussiens à 2D :

$$f(\mathbf{x}) = C \exp\left(i \sum_{i=1}^2 \langle P_i \rangle x_i\right) \exp\left(-\sum_{i=1}^2 \left(\frac{x_i - \langle Q_i \rangle}{2\Delta Q_i}\right)^2\right).$$

La conclusion de cette section est que la transformée de Fourier à fenêtre offre une représentation des fonctions en p et q aussi intéressante que les représentations habituelles en t et k en ce qui concerne l'étude de la localisation de ces fonctions.

5.3 Localisation temps-échelle : transformée en ondelettes

La transformée continue en ondelettes (CWT - Continuous Wavelet Transform) d'une fonction est par définition une représentation temps-échelle ou position-échelle de cette fonction. La question qui se pose à ce stade-ci est de savoir si la localisation dans un espace temps-échelle (b, a) est intéressante et surtout si elle se ramène, comme pour la WFT, à la localisation habituelle en t et en k . Nous verrons que la réponse est presque affirmative.

5.3.1 Le cas 1D

Pour la simplicité des calculs qui nous attendent plus bas, une manière équivalente de définir la CWT est de considérer son action dans l'espace k de Fourier,

$$(W_\psi f)(b, a) \equiv \langle \psi_{ba} | f \rangle = |a|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dk e^{ikb} \widehat{\psi}(ak) \widehat{f}(k),$$

où la translation devient une modulation, et où la mise à l'échelle reste une mise à l'échelle d'un facteur inverse. Les notations restent les mêmes qu'au chapitre 3.

De manière similaire à la section précédente, les opérateurs de localisation en échelle $(A_n, n \in \mathbb{R})$ et en temps (B) sont construits comme des opérateurs de multiplication par $|a|^n$ et b respectivement dans l'espace de la CWT². Ne sachant pas à l'avance quelle puissance de a sera intéressante, nous restons très généraux à ce stade-ci.

$$A_n = c_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db |\psi_{ba}\rangle |a|^n \langle \psi_{ba}|,$$

$$B = c_\psi^{-1} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db |\psi_{ba}\rangle b \langle \psi_{ba}|.$$

La valeur moyenne de B relative à f donnera par exemple une indication de la valeur de t où la fonction f est concentrée en moyenne, basée sur la seule connaissance de la transformée en ondelettes $W_\psi f$ de f . L'interprétation des opérateurs A_n en terme de localisation en échelle est un peu plus délicate, nous la clarifierons par la suite.

Bien qu'un peu plus compliquée qu'à la section précédente, l'expression de ces opérateurs dans l'espace de Fourier est simple, comme en témoigne le résultat suivant.

Proposition 5.4.

$$(\widehat{A_n f})(k) = \frac{c_n(\psi)}{c_\psi} k^{-n} \widehat{f}(k),$$

$$(\widehat{B f})(k) = i \widehat{f}'(k) + \frac{d_\psi}{c_\psi} \frac{\widehat{f}(k)}{k},$$

²L'introduction de la valeur absolue de a en 1D est nécessaire pour les calculs qui suivent. On pourrait s'en passer comme dans [11] en ne considérant que des fonctions et des ondelettes analytiques. Le problème ne se posera pas en 2D.

avec $c_n(\psi) = 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{|k|^{1-n}} |\hat{\psi}|^2$ et $d_\psi = 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dk \frac{k}{|k|} \hat{\psi}(k) \overline{\hat{\psi}'(k)}$.

Démonstration.

$$\begin{aligned} c_\psi(\widehat{A_n f})(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db |a|^{\frac{1}{2}} e^{-ikb} \hat{\psi}(ak) |a|^n |a|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dw \overline{\hat{\psi}(aw)} e^{iwb} \hat{f}(w) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} da |a|^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} dw \hat{\psi}(ak) \overline{\hat{\psi}(aw)} \hat{f}(w) \int_{-\infty}^{\infty} db e^{ib(w-k)} \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} da |a|^{n-1} |\hat{\psi}(ak)|^2 \hat{f}(k) \\ &= 2\pi \int_{-\infty}^{\infty} dk' |k'|^{n-1} |\hat{\psi}(k')|^2 k^{-n} \hat{f}(k) \\ &= c_n(\psi) k^{-n} \hat{f}(k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_\psi(\widehat{B f})(k) &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{a^2} \int_{-\infty}^{\infty} db |a|^{\frac{1}{2}} e^{-ikb} \hat{\psi}(ak) b |a|^{\frac{1}{2}} \int_{-\infty}^{\infty} dw \overline{\hat{\psi}(aw)} e^{iwb} \hat{f}(w) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} \int_{-\infty}^{\infty} dw \hat{\psi}(ak) \overline{\hat{\psi}(aw)} \hat{f}(w) \int_{-\infty}^{\infty} db b e^{ib(w-k)} \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} \hat{\psi}(ak) \frac{\partial}{\partial w} \left(\overline{\hat{\psi}(aw)} \hat{f}(w) \right)_{w=k} \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{da}{|a|} |\hat{\psi}(ak)|^2 \hat{f}'(k) + 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} da \frac{a}{|a|} \hat{\psi}(ak) \overline{\hat{\psi}'(ak)} \hat{f}(k) \\ &= 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{|k'|} |\hat{\psi}(k')|^2 \hat{f}'(k) + 2\pi i \int_{-\infty}^{\infty} dk' \frac{k'}{|k'|} \hat{\psi}(k') \overline{\hat{\psi}'(k')} \frac{\hat{f}(k)}{k} \\ &= c_\psi i \hat{f}'(k) + d_\psi \frac{\hat{f}(k)}{k} \end{aligned}$$

□

Le plus étonnant dans ce résultat est que, bien que la CWT dépende du choix de l'ondelette ψ , l'expression de ces opérateurs en est remarquablement indépendante. C'est d'ailleurs le cas particulier $A_0 = I$, c'est-à-dire la formule de reconstruction, qui rend les ondelettes si intéressantes. Examinons maintenant les différents termes intervenant ci-dessus.

$\frac{c_n(\psi)}{c_\psi} k^{-n} \hat{f}(k)$: Une multiplication par $|a|^n$ dans l'espace (b, a) revient à faire une multiplication par k^{-n} dans l'espace de Fourier. Ceci conforte le fait déjà connu [3] que l'inverse d'une échelle est semblable à une fréquence. En particulier, A_{-1} est proportionnel à P . Cependant, le facteur de proportionnalité $\frac{c_n(\psi)}{c_\psi}$ n'est pas aussi innocent qu'il n'en a l'air. Sa propriété principale est d'être homogène sous dilatation,

$$\frac{c_n(\psi_{0a})}{c_{\psi_{0a}}} = a^{-n} \frac{c_n(\psi)}{c_\psi},$$

et donc une mesure de l'échelle (en prenant la valeur moyenne d'un A_n) dépend de la manière dont l'ondelette est initialement dilatée, comme il se doit. Ceci constitue la raison pour laquelle l'inverse d'une échelle n'est pas exactement une fréquence : une fréquence peut être définie de manière absolue, alors qu'une échelle est toujours *relative* à une certaine référence.

$i \hat{f}'(k)$: En prenant la transformée inverse, il devient $tf(t)$ et donc correspond exactement à Q .

$\frac{d_\psi \hat{f}(k)}{c_\psi k}$: Nous n'avons pas compris la raison profonde de la forme et de la présence de ce terme. Heureusement, dès que la transformée de Fourier de ψ a une phase constante (est réelle par exemple), on peut montrer que $d_\psi = 0$. De plus, on peut annuler ce terme par translation initiale de l'ondelette si et seulement si

$$\int_{-\infty}^0 dk |\hat{\psi}(k)|^2 \neq \int_0^{\infty} dk |\hat{\psi}(k)|^2.$$

Il reste donc des cas (non standard) où aucune des deux conditions ci-dessus n'est remplie, et où la localisation en temps dans l'espace (b, a) grâce à l'opérateur B est systématiquement biaisée de manière non triviale³. Il faudrait tester ceci numériquement pour mieux comprendre ce phénomène, et pourquoi pas montrer dans quelle mesure certaines ondelettes ne sont pas idéales pour l'analyse de signaux...

Le choix $n = -1$ s'est montré intéressant ci-dessus, il l'est également grâce au résultat suivant, qui montre que b et a^{-1} sont des variables conjuguées au même titre que p et q .

Proposition 5.5. B et A_{-1} vérifient les CCR :

$$[B, A_{-1}] = i \frac{c_n(\psi)}{c_\psi},$$

et donc la relation d'incertitude

$$(\Delta B)(\Delta A_{-1}) \geq \frac{1}{2} \frac{c_n(\psi)}{c_\psi}.$$

Démonstration. L'égalité est immédiate, et l'inégalité est un résultat standard de mécanique quantique (les opérateurs B et A_{-1} sont évidemment autoadjoints). \square

Le résultat ci-dessus n'est pas valable si $n \neq -1$. Il montre que la CWT de f , vue comme fonction de b et a , vérifie le même genre de propriété que la WFT : il y a également une limitation sur la localisation conjointe en b et en a . Par exemple, un pic étroit dans l'espace de la transformée en ondelettes n'est jamais possible. Encore une fois, ceci est en définitive relié au noyau reproduisant sous-jacent à la CWT.

³Le terme 'biais' peut également être entendu d'un point de vue statistique : par exemple, $\frac{|f(t)|^2}{\|f\|_2^2}$ est une densité de probabilité et $\langle B \rangle_f$ est un estimateur biaisé de l'espérance de la variable aléatoire associée à la distribution f

La question est maintenant de savoir quelles sont les fonctions qui saturent l'inégalité ci-dessus, c'est-à-dire quelles sont les fonctions qui ont une transformée $W_\psi f$ optimalement localisée en b et en a . Ceci permettra de généraliser les paquets d'onde gaussiens. [7] nous apprend qu'une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'égalité dans la relation d'incertitude est que

$$\left(B - \langle B \rangle_f + i\lambda_0 \left(\widetilde{A}_{-1} - \langle \widetilde{A}_{-1} \rangle_f \right) \right) f = 0,$$

où $\widetilde{A}_{-1} = \frac{c_\psi}{c_{-1}(\psi)} A_{-1}$ et $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Dans l'espace de Fourier, ceci donne l'équation différentielle

$$i\hat{f}'(k) + \left[\frac{d_\psi}{c_\psi} \frac{1}{k} - \left(\langle B \rangle_f + i\lambda_0 \langle \widetilde{A}_{-1} \rangle_f \right) + i\lambda_0 k \right] \hat{f}(k) = 0.$$

En supposant $\langle B \rangle_f$ et $\langle \widetilde{A}_{-1} \rangle_f$ fixés, l'équation est linéarisée (nous cherchons donc une solution pour chaque couple de ces paramètres). Par séparation de variables, nous obtenons la solution la plus générale

$$\hat{f}(k) = C|k|^{i\frac{d_\psi}{c_\psi}} e^{-i\langle B \rangle_f k} e^{-\frac{\lambda_0}{2}(k - \langle \widetilde{A}_{-1} \rangle_f)^2},$$

où C est une constante. On vérifie que $\langle B \rangle = \frac{\langle f|Bf \rangle}{\langle f|f \rangle}$ et $\langle \widetilde{A}_{-1} \rangle = \frac{\langle f|\widetilde{A}_{-1}f \rangle}{\langle f|f \rangle}$, comme il se doit⁴. Quand $d_\psi = 0$, la solution se réduit à un paquet d'ondes gaussien, centré en $\langle B \rangle$ en temps et en $\langle \widetilde{A}_{-1} \rangle$ en fréquence (on aurait pu s'y attendre). Sinon, il est facile de vérifier que $\frac{d_\psi}{c_\psi}$

est toujours réel et donc que $|k|^{i\frac{d_\psi}{c_\psi}} = e^{i\frac{d_\psi}{c_\psi} \log |k|}$ est un facteur de phase oscillant fortement lorsque $k \rightarrow 0$. Ce n'est certainement pas le comportement que l'on attend d'une fonction "minimale" au sens où on l'a définie, ce qui est un argument en plus pour se convaincre que le terme faisant intervenir d_ψ est pathologique.

Pour clôturer le cas 1D, remarquons que les résultats de Singer [30] se résument à un cas particulier de notre construction.

5.3.2 Le cas 2D

Il est possible de généraliser sans trop de difficultés tous ces résultats à deux dimensions. La transformée en ondelettes s'écrit de manière équivalente

$$(W_\psi f)(\mathbf{b}, a, \theta) \equiv \langle \psi_{\mathbf{b}a\theta} | f \rangle = a \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{k} e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{b}} \overline{\hat{\psi}(a r_{-\theta} \mathbf{k})} \hat{f}(\mathbf{k}),$$

où $r_{-\theta}$ désigne une rotation d'un angle $-\theta$ dans \mathbb{R}^2 , la formule de reconstruction est

$$I = c_\psi^{-1} \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) |\psi_{\mathbf{b}a\theta} \rangle \langle \psi_{\mathbf{b}a\theta}|, \quad c_\psi = (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2} |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2$$

$$d\mu(\mathbf{b}a\theta) = \frac{da}{a^3} d^2\mathbf{b} d\theta.$$

⁴Prendre des combinaisons linéaires de ces solutions est alors une mauvaise idée : elles ne vérifieraient plus cette dernière propriété et donc ne seraient plus minimales.

et les généralisations naturelles des opérateurs de localisation sont

$$\begin{aligned}(A_{-1})_1 &= c_\psi^{-1} \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) |\psi_{\mathbf{b}a\theta}\rangle a^{-1} \cos\theta \langle\psi_{\mathbf{b}a\theta}|, \\(A_{-1})_2 &= c_\psi^{-1} \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) |\psi_{\mathbf{b}a\theta}\rangle a^{-1} \sin\theta \langle\psi_{\mathbf{b}a\theta}|, \\B_1 &= c_\psi^{-1} \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) |\psi_{\mathbf{b}a\theta}\rangle b_1 \langle\psi_{\mathbf{b}a\theta}|, \\B_2 &= c_\psi^{-1} \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) |\psi_{\mathbf{b}a\theta}\rangle b_2 \langle\psi_{\mathbf{b}a\theta}|.\end{aligned}$$

Comme dans le cas 1-D, ils ont une expression relativement simple dans l'espace de Fourier.

Proposition 5.6. *Pour un choix approprié de l'orientation de l'ondelette ψ ,*

$$\begin{aligned}\left(\widehat{(A_{-1})_1 f}\right)(\mathbf{k}) &= \frac{e_\psi}{c_\psi} k_1 \hat{f}(\mathbf{k}), \\ \left(\widehat{(A_{-1})_2 f}\right)(\mathbf{k}) &= \frac{e_\psi}{c_\psi} k_2 \hat{f}(\mathbf{k}).\end{aligned}$$

Pour un autre choix (non compatible) de l'orientation de ψ ,

$$\begin{aligned}\left(\widehat{B_1 f}\right)(\mathbf{k}) &= i \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_1}(\mathbf{k}) + \frac{h_\psi}{c_\psi} \frac{k_2}{|\mathbf{k}|^2} \hat{f}(\mathbf{k}), \\ \left(\widehat{B_2 f}\right)(\mathbf{k}) &= i \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_2}(\mathbf{k}) + \frac{h_\psi}{c_\psi} \frac{k_1}{|\mathbf{k}|^2} \hat{f}(\mathbf{k}),\end{aligned}$$

où c_ψ , e_ψ et h_ψ sont des constantes dépendant de ψ seulement.

Démonstration.

$$\begin{aligned}c_\psi \left(\widehat{(A_{-1})_1 f}\right)(\mathbf{k}) &= \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) \begin{pmatrix} a \cos\theta \\ a \sin\theta \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{k}' e^{i\mathbf{b}\cdot(\mathbf{k}'-\mathbf{k})} \hat{\psi}(ar_{-\theta}\mathbf{k}) \overline{\hat{\psi}(ar_{-\theta}\mathbf{k}')} f(\mathbf{k}') \\ &= (2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_0^{2\pi} d\theta \begin{pmatrix} a \cos\theta \\ a \sin\theta \end{pmatrix} |\hat{\psi}(ar_{-\theta}\mathbf{k})|^2 f(\mathbf{k})\end{aligned}$$

Posons $\mathbf{w} = ar_{-\theta}\mathbf{k}$, tel que

- (i) $\frac{d\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2} = \frac{da}{a} d\theta$
- (ii) $a = \frac{|\mathbf{w}|}{|\mathbf{k}|}$
- (iii) $a \cos\theta = \frac{\mathbf{w}\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}$
- (iv) $a \sin\theta = \frac{\mathbf{w}^\perp\cdot\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|^2}$ avec $\mathbf{w}^\perp = \begin{pmatrix} -w_2 \\ w_1 \end{pmatrix}$.

Ce changement de variables permet de récrire

$$\begin{aligned}c_\psi \left(\widehat{(A_{-1})_1 f}\right)(\mathbf{k}) &= (2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^4} \begin{pmatrix} \mathbf{w}\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{w}^\perp\cdot\mathbf{k} \end{pmatrix} |\hat{\psi}(\mathbf{w})|^2 f(\mathbf{k}) \\ &= \begin{pmatrix} \mathbf{e}_\psi\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{e}_\psi^\perp\cdot\mathbf{k} \end{pmatrix} \hat{f}(\mathbf{k}).\end{aligned}\tag{5.1}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $\mathbf{e}_\psi = e_\psi \mathbf{e}_1$, et donc $\mathbf{e}_\psi^\perp = e_\psi \mathbf{e}_2$. Ceci peut être réalisé en tournant ψ pour l'aligner selon \mathbf{e}_1 dans l'espace de Fourier. Alors,

$$c_\psi \left(\widehat{A_{-1}f} \right) (\mathbf{k}) = e_\psi \mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}). \quad (5.2)$$

$$\begin{aligned} c_\psi \left(\widehat{Bf} \right) (\mathbf{k}) &= \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) a^2 \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{k}' e^{i\mathbf{b} \cdot (\mathbf{k}' - \mathbf{k})} \hat{\psi}(a\mathbf{r}_{-\theta}\mathbf{k}) \overline{\hat{\psi}(a\mathbf{r}_{-\theta}\mathbf{k}')} \hat{f}(\mathbf{k}') \\ &= i(2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{\psi}(a\mathbf{r}_{-\theta}\mathbf{k}) \nabla_{\mathbf{k}} \left(\overline{\hat{\psi}(a\mathbf{r}_{-\theta}\mathbf{k})} \hat{f}(\mathbf{k}) \right) \\ &= i c_\psi \nabla_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}) + i(2\pi)^2 \int_0^\infty \frac{da}{a} \int_0^{2\pi} d\theta \hat{\psi}(\mathbf{w}) a \mathbf{r}_{-\theta} \nabla_{\mathbf{w}} \left(\overline{\hat{\psi}(\mathbf{w})} \right) \hat{f}(\mathbf{k}) \\ &= i c_\psi \nabla_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}) + i(2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2} \hat{\psi}(\mathbf{w}) \begin{pmatrix} \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} & \mathbf{w}^\perp \cdot \mathbf{k} \\ -\mathbf{w}^\perp \cdot \mathbf{k} & \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \\ &\quad \nabla_{\mathbf{w}} \left(\overline{\hat{\psi}(\mathbf{w})} \right) \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \hat{f}(\mathbf{k}) \\ &= i c_\psi \nabla_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}) + i(2\pi)^2 \int_{\mathbb{R}^2} \frac{d^2\mathbf{w}}{|\mathbf{w}|^2} \hat{\psi}(\mathbf{w}) \begin{pmatrix} \frac{\partial \overline{\hat{\psi}}}{\partial w_1} & -\frac{\partial \overline{\hat{\psi}}}{\partial w_2} \\ \frac{\partial \overline{\hat{\psi}}}{\partial w_2} & \frac{\partial \overline{\hat{\psi}}}{\partial w_1} \end{pmatrix} \\ &\quad \begin{pmatrix} \mathbf{w} \cdot \mathbf{k} \\ -\mathbf{w}^\perp \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \hat{f}(\mathbf{k}) \\ &= i c_\psi \nabla_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}) + \begin{pmatrix} \mathbf{h}_\psi \cdot \mathbf{k} \\ -\mathbf{h}_\psi^\perp \cdot \mathbf{k} \end{pmatrix} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \hat{f}(\mathbf{k}) \end{aligned} \quad (5.3)$$

$$= i c_\psi \nabla_{\mathbf{k}} \hat{f}(\mathbf{k}) + h_\psi \begin{pmatrix} k_2 \\ k_1 \end{pmatrix} \frac{1}{|\mathbf{k}|^2} \hat{f}(\mathbf{k}), \quad (5.4)$$

où nous avons tourné ψ de telle manière que $\mathbf{h}_\psi = h_\psi \mathbf{e}_2$ et $-\mathbf{h}_\psi^\perp = h_\psi \mathbf{e}_1$. Ce choix de rotation initiale de l'ondelette est en général incompatible avec celui qui avait permis d'aligner \mathbf{e}_ψ le long de \mathbf{e}_1 . \square

La plupart des commentaires faits dans le cas 1-D sont encore d'application. On peut interpréter \mathbf{e}_ψ comme étant l'orientation de ψ . En effet, ses propriétés directionnelles (cfr. chap. 6) sont déterminée par son orientation dans l'espace de Fourier. Notons que $e_\psi = 0$ serait l'expression d'une ondelette totalement non orientée, et demander $e_\psi \neq 0$ ne requiert pas de propriétés directionnelles particulières, il suffit que ψ soit minimalement orientée.

D'un autre côté, nous n'avons pas trouvé d'interprétation satisfaisante pour \mathbf{h}_ψ . De la même manière qu'en 1D, nous pensons, qu'il s'agit d'un terme pathologique qui introduit un biais systématique dans l'estimation de la position à l'aide de la CWT 2D. Et contrairement au cas 1D, ce terme est la plupart du temps non nul, ce qui laisse penser qu'il reste encore des choses (négatives) à dire quant à l'analyse d'images par ondelettes en 2D...

Il existe aussi un résultat de localisation conjointe dans l'espace (\mathbf{b}, a) .

Proposition 5.7. A_{-1} et B satisfont les CCR ($i = 1, 2, j = 1, 2$) :

$$\begin{aligned} [B_i, (A_{-1})_j] &= ic_\psi e_\psi \delta_{ij} \\ [(A_{-1})_i, (A_{-1})_j] &= 0 \\ [B_i, B_j] &= 0. \end{aligned}$$

Les relations d'incertitude correspondantes sont

$$\Delta B_i \Delta (A_{-1})_i \geq \frac{c_\psi e_\psi}{2}, \quad i = 1, 2.$$

Démonstration. L'égalité suit d'un calcul direct, mais il faut pour cela utiliser les équations (5.1) et (5.3) pour régler ce problème d'orientation préliminaire de l'ondelette. Pour les inégalités, il suffit de remarquer, encore une fois, que $(A_{-1})_i$ et B_j sont autoadjoints. \square

Les paramètres $a^{-1} \cos \theta$ et $a^{-1} \sin \theta$ ne permettent malheureusement de se repérer que de manière cartésienne dans le plan (a, θ) . Nous aurions préféré pouvoir s'y localiser de manière "polaire" vu que ce sont a et θ qui nous intéressent. C'est à cette question que nous essaierons de répondre au chapitre suivant.

Pour trouver les fonctions de \mathbf{x} qui ont une CWT optimalement localisée à la fois en \mathbf{b} , en a et en θ , en accord avec la recette 1D [5], il faudrait résoudre le système d'équations aux dérivées partielles

$$\begin{aligned} ic_\psi \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_1} + (\mathbf{h}_\psi \cdot \mathbf{k}) \frac{\hat{f}}{|\mathbf{k}|^2} - \langle B_1 \rangle_f \hat{f} + i\lambda_1 (\mathbf{e}_\psi \cdot \mathbf{k}) \hat{f} - i\lambda_1 \langle (A_{-1})_1 \rangle_f \hat{f} &= 0 \\ ic_\psi \frac{\partial \hat{f}}{\partial k_2} - (\mathbf{h}_\psi^\perp \cdot \mathbf{k}) \frac{\hat{f}}{|\mathbf{k}|^2} - \langle B_2 \rangle_f \hat{f} + i\lambda_2 (\mathbf{e}_\psi^\perp \cdot \mathbf{k}) \hat{f} - i\lambda_2 \langle (A_{-1})_2 \rangle_f \hat{f} &= 0. \end{aligned}$$

Il n'y a pas vraiment d'intérêt à résoudre un tel système vu que la seule différence avec les états comprimés est la présence de \mathbf{h}_ψ que l'on sait être parasite.

5.4 Mécanique quantique et localisation dans l'espace de phase

Le passage d'une représentation à l'autre par les diverses transformées introduites ci-dessus a un sens tout particulier en mécanique quantique puisqu'il s'agit chaque fois de réaliser un vecteur abstrait f de l'espace de Hilbert \mathcal{H} dans une représentation particulière. Par exemple, $f(x) = \langle x|f \rangle$ est la représentation de configuration, $\hat{f}(k) = \langle k|f \rangle$ est la représentation d'impulsion, $(G_g f)(p, q) = \langle p, q|f \rangle$ est la représentation en états cohérents (du groupe de Weyl-Heisenberg), et $(W_\psi f)(b, a) = \langle b, a|f \rangle$ est la représentation en états cohérents (du groupe $ax + b$). L'unitarité des transformées en question (Fourier, Fourier à fenêtre et Ondelettes) garantit qu'il s'agit de bonnes représentations quantiques.

L'opération qui consiste à passer des variables indépendantes q et p aux opérateurs Q et P s'appelle (première) quantification. De la même manière, les opérateurs \tilde{Q} et \tilde{P} sont

obtenus par quantification de l'espace de phase classique (q, p) à l'aide des états cohérents $|g_{pq}\rangle$. Ces opérateurs conservent leurs propriétés de localisation, et acquièrent maintenant le statut physique d'observables. Ces constructions sont courantes en mécanique quantique [3], et ont mené à des développements ultérieurs. Par exemple, la localisation dans un espace de phase est un point de vue naturel pour développer une théorie de la localisation des états quantiques relativistes [2]. La quantification dans l'espace de phase (b, a) a elle été étudiée par Paul [28].

Cette manière de construire des opérateurs *diagonaux* dans l'espace de phase s'appelle aussi quantification de Toeplitz. Vues comme fonctions sur l'espace de phase, q et p sont les symboles inférieurs de \tilde{Q} et \tilde{P} respectivement. Ceci a des applications en quantification géométrique par exemple [20].

Le fait que les opérateurs de localisation \tilde{Q} et \tilde{P} fassent partie des générateurs du groupe de Weyl-Heisenberg (qui donne lieu aux états cohérents associés) est une propriété agréable que l'on ne retrouve pas dans le cas du groupe de similitude $ax + b$ avec les opérateurs A_{-1} et B . Contrairement au point de vue adopté dans [5] et [8], nous ne regardons pas les relations d'incertitude associées aux générateurs des groupes de similitude 1D et 2D mais plutôt celles associées aux opérateurs de localisation dans l'espace des paramètres du groupe.

Chapitre 6

Localisation angulaire et directionnalité

Les ondelettes directionnelles sont un outil puissant de détection des *directions* dans une image. Cette performance, la “directionnalité”, est quantifiable de manière simple, et l’objectif de ce chapitre est de la reformuler en terme de localisation dans l’espace des paramètres de la CWT 2D. La motivation à la base de cette reformulation est la généralisation des concepts aux ondelettes sur la sphère, voir chapitre suivant.

6.1 Critères classiques de directionnalité

Tous les développements de ce chapitre se font autour de la transformée continue en ondelettes 2D, introduite au chapitre 2,

$$(W_\psi f)(\mathbf{b}, a, \theta) = \int_{\mathbb{R}^2} \overline{\psi_{\mathbf{b}a\theta}(\mathbf{x})} f(\mathbf{x}) d^2\mathbf{x} \quad (6.1)$$

avec $\psi_{\mathbf{b}a\theta}(\mathbf{x}) = \frac{1}{a} \psi\left(r_{-\theta} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{b}}{a}\right)$. Pour une valeur donnée de θ et a , les valeurs que prennent la CWT représentent la quantité d’information orientée (comme des contours d’un objet) dans la direction θ et à l’échelle a . Mais pour que cette interprétation soit efficace, il faut imposer que l’ondelette ψ soit *directionnelle*, c’est-à-dire soit elle-même orientée dans l’espace de Fourier. La façon typique de réaliser ceci est que l’ondelette soit à support (essentiel) contenu dans un cône à sommet en zéro dans l’espace de Fourier. En effet, la CWT 2D peut s’exprimer comme une multiplication dans l’espace de Fourier : si la transformée de Fourier de l’ondelette $\hat{\psi}$ est à support contenu dans un cône étroit repérant une direction bien précise, toute l’information de \hat{f} en-dehors de ce cône, relative aux autres directions, est perdue par la transformée. Pour plus d’informations, voir [5].

Une quantité intéressante pour quantifier cette directionnalité est le *pouvoir de résolution angulaire* (ARP - Angular resolving power) [38] défini comme la demi-ouverture du cône dans lequel on peut placer $\hat{\psi}$ de manière à ce que sa valeur soit plus petite que ε en dehors de ce cône. Un autre choix est de considérer l’écart-type de l’ondelette par rapport

à sa dépendance angulaire :

$$\sigma(\psi) = \sqrt{\int_0^{2\pi} d\phi (\phi - \phi_0)^2 |\hat{\psi}(k, \phi)|^2},$$

où ϕ_0 est l'angle moyen où ψ est localisée, ce qui commence à motiver l'idée de localisation angulaire dans le plan fréquentiel. Tous ces critères sont basés explicitement sur la transformée de Fourier de l'ondelette. Citons d'autres approches où la représentation de Fourier n'est pas nécessaire [38] :

- *L'intégrale du recouvrement de l'ondelette avec l'ondette tournée d'un angle θ , c'est-à-dire $K_\psi(\theta) = \frac{\langle \psi | \psi_{\mathbf{0}1\theta} \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}$, doit tendre suffisamment vite vers 0 lorsque θ croît.* On parle également d'autocorrélation angulaire¹. Il s'agit d'une condition nécessaire mais pas suffisante de directionnalité. En effet, les fonctions à support dans un cône dans l'espace des \mathbf{x} satisfont également ce critère mais n'ont pas de bonnes propriétés directionnelles. Le problème vient du fait que dans l'autocorrélation, on ne considère pas de translation de l'ondelette par rapport à elle-même.
- *La réponse du filtre à un signal orienté dépend fortement de l'orientation de ce filtre par rapport au signal.* Pour la même raison, il ne s'agit que d'une condition nécessaire de directionnalité. Pour récupérer la condition suffisante, il faudrait considérer des translations de l'ondelette dans la direction perpendiculaire à celle du signal.
- *Si une ondelette ψ a un support contenu dans un cône C de sommet à l'origine dans l'espace de Fourier, alors elle admet une extension analytique dans $\mathbb{R}^2 \times \tilde{C}$, où \mathbb{R}^2 est l'espace des \mathbf{x} et \tilde{C} est le cône dual de C .* Cette condition technique est valable lorsque le support de $\hat{\psi}$ est strictement contenu dans un cône, mais les ondelettes peuvent être directionnelles sous des conditions plus larges. Si l'ondelette a une décroissance très rapide en-dehors du cône C , c'est-à-dire qu'elle reste directionnelle quand même, on peut imaginer que l'extension par analyticité est réduite à $\mathbb{R}^2 \times D$ où D est un sous-espace du cône dual. Ceci rejoindrait les idées des théorèmes classiques de Paley et Wiener (voir [29]) dans le cas 1D. La technicalité des développements ne nous a pas motivés à continuer dans cette direction.

6.2 Un critère universel de directionnalité

Le chapitre précédent nous apprend que la localisation dans l'espace des paramètres de la transformée en ondelettes est une alternative intéressante à la localisation dans l'espace usuel ou dans celui de Fourier. Introduisons d'abord deux fonctions sur le cercle unité, à valeur opérateur :

$$S_\psi(\theta) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{b} |\psi_{\mathbf{b}1\theta}\rangle \langle \psi_{\mathbf{b}1\theta}|,$$

$$T_\psi(\theta) = \int_0^\infty \frac{da}{a^3} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{b} |\psi_{\mathbf{b}a\theta}\rangle \langle \psi_{\mathbf{b}a\theta}|.$$

¹Et K signifie *reproducible Kernel*, voir [3].

Il s'agit de familles d'opérateurs de reconstruction partielle. La généralisation naïve des concepts du chapitre précédent mènerait à la définition d'un opérateur de localisation en angle comme étant

$$\Theta = \int_0^{2\pi} d\theta T_\psi(\theta)\theta,$$

mais il n'en est rien : la valeur moyenne de Θ est faussée par le fait que des points très proches peuvent avoir des valeurs très différentes de θ (par exemple 0 et 2π). Un signal f orienté autour de $\theta = 0$ aurait donc une "espérance angulaire" $\langle \Theta \rangle_f \simeq \pi \dots$

La définition de ces deux quantités S_ψ et T_ψ est suffisamment large pour en faire découler une série de propriétés intéressantes :

- La valeur moyenne $\langle S_\psi(\theta) \rangle_\psi = \frac{\langle \psi | S_\psi(\theta) \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \|\psi\|_2^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{b} |\langle \psi | \psi_{\mathbf{b}1\theta} \rangle|^2$ dans l'état ψ est une bonne généralisation de l'autocorrélation angulaire $K_\psi(\theta)$. En effet, les fonctions pathologiques mentionnées ci-dessus, c'est-à-dire celles qui sont bien orientées dans l'espace des \mathbf{x} , ne présentent pas un $\langle S_\psi(\theta) \rangle_\psi$ piqué autour de zéro comme c'est le cas pour les ondelettes directionnelles. L'astuce est d'intégrer par rapport à \mathbf{b} , pas simplement de prendre $\mathbf{b} = 0$. Bien que cela puisse paraître bizarre, il est naturel que la quantité soit quartique en ψ : ainsi l'intégrand est toujours positif et rien ne se compense lors de l'intégration. Plus généralement, on peut aussi calculer $\langle S_\psi(\theta) \rangle_f$, où $f \neq \psi$ est un signal orienté comme une droite de deltas de Dirac, et cela généralise de la bonne manière le deuxième critère parmi les trois de la liste ci-dessus.
- L'opérateur $T_\psi(\theta)$ n'est pas très différent de $S_\psi(\theta)$: on intègre sur toutes les échelles pour être sûr qu'une ondelette directionnelle le reste si elle est dilatée ou contractée (en pratique cela ne change rien). Il manque une intégration pour retrouver la résolution de l'identité, appelons donc $\{T_\psi(\theta)\}$ la famille d'opérateurs de *reconstruction orientée*. En effet, pour un θ donné, $T_\psi(\theta)f$ peut être vu comme l'approximation de f en connaissant seulement les valeurs de la CWT relatives à θ . Donc si f est bien orienté, on n'aura pas besoin de valeurs très différentes de θ pour le reconstruire : ceci s'exprime dans le fait que $\langle f | T_\psi(\theta) f \rangle$ sera concentré autour de $\theta = 0$, et rejoint l'idée du paragraphe précédent.
- Ces deux opérateurs agissent de manière simple dans l'espace de Fourier. En suivant les idées du chapitre précédent, il n'est pas subtil de voir que

$$\begin{aligned} \left(\widehat{S_\psi(\theta)f} \right) (\mathbf{k}) &= |\hat{\psi}(r_{-\theta}\mathbf{k})|^2 \hat{f}(\mathbf{k}) = s_\theta(\mathbf{k}) \hat{f}(\mathbf{k}), \\ \left(\widehat{T_\psi(\theta)f} \right) (\mathbf{k}) &= c_\psi \int_0^\infty \frac{da}{a} |\hat{\psi}(ar_{-\theta}\mathbf{k})|^2 \hat{f}(\mathbf{k}) = t_\theta \left(\frac{\mathbf{k}}{|\mathbf{k}|} \right) \hat{f}(\mathbf{k}). \end{aligned}$$

Dans les deux cas, il s'agit d'une multiplication dans l'espace de Fourier, et dans le second cas² la fonction en facteur de $\hat{f}(\mathbf{k})$ dépend uniquement de l'argument de \mathbf{k} , pas de sa longueur $|\mathbf{k}|$. Ces expressions permettent de déduire de notre cadre théorique

²Il s'agit en fait de la fonction d'échelle des paquets d'ondelettes continus lorsque a_0 , la borne d'intégration inférieure, tend vers 0. Donc cela prend en compte toutes les échelles.

le critère standard de directionnalité :

$$\langle S_\psi(\theta) \rangle_\psi = \|\psi\|_2^{-2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{k} |\hat{\psi}(\mathbf{k})|^2 |\hat{\psi}(r_{-\theta}\mathbf{k})|^2$$

est une fonction de θ bien localisée autour de 0 si et seulement si $\hat{\psi}$ a son support essentiel dans un cône, c'est-à-dire ssi ψ est directionnelle.

En plus de la propriété “universelle” du critère introduit (il englobe la plupart des autres), on peut déduire des indicateurs intéressants de directionnalité, et enfin faire le lien avec la théorie de la localisation. On pourrait par exemple calculer la “déviatoin standard” de ces opérateurs par rapport à leur moyenne. Une autre possibilité est de considérer leur *série de Fourier* où les coefficients sont eux-mêmes des opérateurs :

$$S_\psi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{S}_\psi(n) e^{in\theta},$$

$$\hat{S}_\psi(n) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{b} \int_0^{2\pi} d\theta |\psi_{\mathbf{b}1\theta}\rangle e^{-in\theta} \langle \psi_{\mathbf{b}1\theta}|,$$

et

$$T_\psi(\theta) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \hat{T}_\psi(n) e^{in\theta},$$

$$\hat{T}_\psi(n) = \frac{1}{2\pi} \int d\mu(\mathbf{b}a\theta) |\psi_{\mathbf{b}a\theta}\rangle e^{-in\theta} \langle \psi_{\mathbf{b}a\theta}|.$$

Ces quantités sont toujours comprises au sens faible, comme au chapitre précédent. Les opérateurs $\hat{S}_\psi(n)$ et $\hat{T}_\psi(n)$ eux-mêmes peuvent servir à quantifier la directionnalité : demander que $T_\psi(\theta)$ soit bien localisé autour de $\theta = 0$ revient à demander, de manière nécessaire, que la suite $\{\langle \hat{T}_\psi(n) \rangle_f\}_n$ ne décroisse pas trop vite lorsque $n \rightarrow \pm\infty$. Et $\hat{T}_\psi(\pm 1)$ sont les bons opérateurs de localisation angulaire dans l'espace des paramètres de la CWT 2D (à la place de Θ). Nous ne sommes pas encore au bout de nos surprises concernant leur interprétation.

Proposition 6.1. *Les opérateurs $\hat{T}_\psi(n)$ sont multiples d'opérateurs unitaires :*

$$\hat{T}_\psi(n)^\dagger \hat{T}_\psi(n) = \hat{T}_\psi(n) \hat{T}_\psi(n)^\dagger = \lambda_\psi(n) I.$$

Démonstration. Voir Annexe A □

Nous avons montré au chapitre 5 que les opérateurs de localisation de la CWT 2D se réduisent à des expressions simples dans l'espace de Fourier ; il en est de même pour les $\hat{T}_\psi(\pm 1)$.

Proposition 6.2. *Pour un choix approprié de l'orientation de ψ ,*

$$\left(\widehat{\hat{T}_\psi(\pm 1)f} \right) (\mathbf{k}) = l_\psi e^{\mp i\phi} \hat{f}(\mathbf{k}),$$

où $e^{\mp i\phi} = \frac{k_1 \mp ik_2}{|\mathbf{k}|}$, c'est-à-dire ϕ est l'argument de \mathbf{k} , et l_ψ est une constante (dependant de ψ seulement).

Démonstration. La démonstration n'est pas très différente de celle de la proposition 5.6. \square

Ce résultat montre que les $\hat{T}_\psi(\pm 1)$ sont plus importants que ce que leur définition laisse penser : ils sont des opérateurs de localisation de l'argument dans l'espace de Fourier, et sont essentiellement indépendants de ψ ! C'est exactement ce dont nous avons besoin pour caractériser la directionnalité : plus f est directionnel, plus $|\langle \hat{T}_\psi(\pm 1) \rangle_f|^2$ se rapproche de $|l_\psi|^2$, ou plus la déviation standard $(\Delta \hat{T}_\psi(\pm 1))_f$ est petite. En fait un calcul simple montre que

$$\left(\Delta \hat{T}_\psi(\pm 1) \right)_f^2 = |l_\psi|^2 - |\langle \hat{T}_\psi(\pm 1) \rangle_f|^2,$$

et donc que nos deux heuristiques ci-dessus sont consistantes.

Finalement, les $\hat{T}_\psi(\pm 1)$ vérifient des relations d'incertitude comme tout bon opérateur de localisation. Nous avons trouvé que le générateur des rotations L lui-même est un dual convenable. Le résultat suivant précise cette idée.

Proposition 6.3. *Soit $L = \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial \phi}$ le générateur des rotations (avec $\mathbf{k} \equiv (k, \phi)$), et f deux fois différentiable tel que \hat{f} est réel et $|\langle \hat{T}_\psi(\pm 1) \rangle_f| \neq 0$. Alors*

$$(\Delta L)_f^2 \frac{|l_\psi|^2 - |\langle \hat{T}_\psi(\pm 1) \rangle_f|^2}{|\langle \hat{T}_\psi(\pm 1) \rangle_f|^2} \geq \frac{1}{4}.$$

Démonstration. Nous choisissons $n = -1$, le cas $n = +1$ est complètement analogue. Il est facile de voir que $\langle L \rangle_f = 0$ puisque \hat{f} est réel. Ensuite,

$$\begin{aligned} \|f\|_2^4 (\Delta L)_f^2 (\Delta \hat{T}_\psi(-1))_f^2 &= - \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}) \frac{\partial^2 \hat{f}}{\partial \phi^2}(\mathbf{k}) \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} \hat{f}^2(\mathbf{k}) |l_\psi e^{i\phi} - \langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f|^2 \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi}(\mathbf{k}) \right|^2 \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} |l_\psi e^{i\phi} - \langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f \hat{f}(\mathbf{k})|^2 \\ &\geq \left| \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi}(\mathbf{k}) (l_\psi e^{i\phi} - \langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f) \hat{f}(\mathbf{k}) \right|^2 \end{aligned}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Cette expression peut encore être simplifiée en intégrant par parties :

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi}(\mathbf{k}) (l_\psi e^{i\phi} - \langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f) \hat{f}(\mathbf{k}) &= \\ &= - \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} \hat{f}(\mathbf{k}) (l_\psi e^{i\phi} - \langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f) \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi}(\mathbf{k}) - i \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 l_\psi e^{i\phi}, \end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi}(\mathbf{k}) (l_\psi e^{i\phi} - \langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f) \hat{f}(\mathbf{k}) &= -\frac{i}{2} \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \mathbf{k} |\hat{f}(\mathbf{k})|^2 l_\psi e^{i\phi} \\ &= -\frac{i}{2} \langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f \|f\|_2^2, \end{aligned}$$

et finalement

$$(\Delta L)_f^2 (\Delta \hat{T}_\psi(-1))_f^2 \geq \frac{1}{4} |\langle \hat{T}_\psi(-1) \rangle_f|^2,$$

ce qui conclut la preuve³. □

Le premier facteur est

$$\|f\|_2^2 (\Delta L)_f^2 = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{k} \left| \frac{\partial \hat{f}}{\partial \phi}(\mathbf{k}) \right|^2 = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\mathbf{x} \left| \frac{\partial f}{\partial \chi}(\mathbf{x}) \right|^2,$$

où $\mathbf{x} \equiv (x, \chi)$, et donc mesure simultanément l'*oscillation angulaire* et l'*extension radiale* de f dans l'espace usuel (comme dans l'espace de Fourier). Le second facteur est interprété comme un troisième indicateur de directionnalité d'après notre discussion, et c'est probablement le plus naturel au vu de la proposition. La démonstration peut s'exprimer dans le langage de la mécanique quantique (et du chapitre 5), mais le principe d'incertitude doit être étendu aux opérateurs non-autoadjoints :

$$(\Delta A)(\Delta B) \geq \frac{1}{2} |\langle A^\dagger B - \overline{\langle A \rangle} \langle B \rangle + e^{it}(B^\dagger A - \overline{\langle B \rangle} \langle A \rangle)|,$$

pour tout $t \in \mathbb{R}$. La démonstration par ce biais est possible, mais devient considérablement moins divertissante, nous ne la reproduisons donc pas...

En conclusion pour ce chapitre, nous avons trouvé un cadre pour la reformulation de la directionnalité duquel les critères classiques découlent. Nous avons également montré une relation d'incertitude impliquant la localisation angulaire dans l'espace de Fourier. Plus important encore, ce cadre peut être rendu indépendant de la transformée de Fourier puisqu'il fait appel de manière autonome à la localisation dans l'espace des paramètres de la CWT 2D.

³L'idée de cette relation d'incertitude est venue de [14], et en particulier des résultats de localisation sur la sphère. Tout ce que nous faisons ici c'est de la localisation sur le cercle...

Chapitre 7

Les ondelettes directionnelles sur la sphère

7.1 Des directions sur la sphère ?

Le concept de direction dans le plan euclidien est tellement évident qu'il ne demande pas de définition. Ce même concept sur la sphère est loin d'être trivial : la compacité de la sphère est une "obstruction topologique" à la définition d'une direction globale¹, comme nous allons le voir.

Une direction locale en η sur la sphère est représentable par un vecteur unité tangent à la sphère, placé en η . L'éventail des directions possibles est donc $[0, 2\pi[$, c'est-à-dire le groupe $SO(2)$ des rotations dans le plan tangent. Caractériser une direction globale reviendrait à se donner un champ de vecteurs unité tangents à la sphère, ou de manière équivalente un représentant de $SO(2)$ pour chaque point η de la sphère. En langage de la théorie des groupes, on voit la sphère S^2 comme l'espace homogène quotient $SO(3)/SO(2)$, et une direction globale est une application appelée *section* $[\cdot] : S^2 \rightarrow SO(3)$. Ainsi, pour la caractérisation des points sur la sphère, le choix des représentants dans les classes d'équivalence de $SO(3)$ modulo $SO(2)$ n'a pas d'importance, alors que pour la caractérisation des directions, ce choix a de l'importance et est donné par la section $[\cdot]$.

Ce genre de champ de vecteurs ou de section existe bel et bien, mais n'est jamais différentiable. Il existe toujours au moins un point où le champ est singulier, et où une direction ne peut être définie en accord avec tous les autres points de la sphère. Par exemple, on pourra toujours définir de manière cohérente une direction dans une carte locale de la sphère, par "lifting" des champs de coordonnées de cette carte, mais *jamais* sur la sphère toute entière. En langage familier, il est impossible de coiffer un porc-épic en boule sans faire d'épis... La conclusion de cette discussion est que la notion de direction est toujours locale, toujours relative à un voisinage ouvert plus ou moins grand d'un point choisi à l'avance. De la même manière que la dilatation stéréographique privilégie le pôle nord, n'importe quel choix de direction privilégie certains points par rapport à d'autres.

¹C'est une obstruction pour S^2 , mais pas pour S^1 , S^3 ni S^7 ! Pas de chance...

Ces considérations nous permettent de préciser les deux formes de CWT sur la sphère, discussion évitée dans le chapitre 3 :

Transformée isotrope Soit $\psi \in L^2(S^2)$ isotrope qui vérifie la condition d'admissibilité 3.2 et $[\cdot]$ n'importe quelle section de S^2 dans $SO(3)$. Alors la CWT sphérique isotrope est définie par

$$(W_\psi f)(\eta, a) = \int_{S^2} d\eta' \overline{\psi_a([\eta]^{-1}\eta')} f(\eta').$$

La raison pour laquelle n'importe quelle section mène à la même définition est que l'ondelette ψ est isotrope et donc $R_{[\eta]}\psi$ ne dépend que de η , pas de la rotation supplémentaire imprimée à ψ autour du point η à cause du choix de section. L'espace des paramètres est maintenant proprement restreint de $SO(3) \times \mathbb{R}_*^+$ à $S^2 \times \mathbb{R}_*^+$.

Transformée directionnelle Soit $\psi \in L^2(S^2)$ qui vérifie la même condition d'admissibilité 3.2 et $[\cdot]$ un choix a priori de section de S^2 dans $SO(3)$. Alors la CWT sphérique directionnelle est définie par

$$(W_\psi f)(\eta, a, \theta') = \int_{S^2} d\eta' \overline{R_{\theta'}\psi_a([\eta]^{-1}\eta')} f(\eta'),$$

où $R_{\theta'}$ est une rotation autour du pôle nord. Par rapport à 3.1, on n'a fait que détailler la décomposition $\gamma = ([\eta], \theta')$. On garde donc $SO(3) \times \mathbb{R}_*^+$ comme espace des paramètres de la CWT, on l'a juste scindé de manière appropriée en les déplacements (2 paramètres), les "rotations" (1 paramètre), et les dilatations (1 paramètre). Tous les développements concernant l'admissibilité et la reconstruction sont les mêmes que dans le cas isotrope, et ont déjà été faits dans [38].

Il est temps de donner quelques exemples de définitions de directions.

1. *A partir des angles d'Euler* : il s'agit de la paramétrisation la plus courante de $SO(3)$. Les angles (α, β, θ') correspondent dans l'ordre aux rotations suivantes dans \mathbb{R}^3 :

- α autour de Oz
- β autour de $\tilde{O}x$ (Ox déplacé par la rotation précédente)
- θ' autour de $\tilde{O}z$ (Oz déplacé par les deux rotations précédentes)

On peut vérifier que la même rotation (α, β, θ') peut également se décomposer en :

- θ' autour de Oz
- β autour de Ox
- α autour de Oz

dans cet ordre-là. Quel est le lien avec la définition d'une direction ? Pour un θ'_0 donné, l'ensemble $\{(\alpha, \beta, \theta'_0) : \alpha \in [0, 2\pi[, \beta \in [0, \pi]\}$ parcourt toute la sphère en y indiquant une direction : il suffit d'appliquer ces rotations à un vecteur unitaire initialement au pôle nord pour s'en convaincre. Pour $\theta'_0 = 0$ et π , on récupère les vecteurs tangents aux méridiens (sud et nord), pour $\theta'_0 = \frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ ceux tangents aux parallèles (est et ouest). Les autres directions sont indexées par θ'_0 . La section correspondante est $[(\alpha, \beta)] = (\alpha, \beta, 0)$. Les points singuliers sont le pôle nord et le pôle sud, où aucune direction n'est bien définie (il n'y a pas de sens à y définir les points cardinaux par

exemple). Donc cette définition est appropriée pour la définition de directions près de l'équateur.

2. *La convention 'pitch-roll-yaw'* : il s'agit d'une autre paramétrisation de $SO(3)$ en termes des angles $(\gamma, \delta, \theta')$ qui caractérisent dans l'ordre les rotations :

- γ autour de Ox (roll)
- δ autour de $\tilde{O}y$ (pitch)
- θ' autour de $\tilde{O}z$ (yaw)

ou de manière équivalente

- θ' autour de Ox
- δ autour de Oy
- γ autour de Oz

dans cet ordre-là également. Pour un θ'_0 donné, l'ensemble $\{(\gamma, \delta, \theta'_0) : \gamma \in [0, \pi], \delta \in [0, 2\pi[\}$ parcourt toute la sphère en y indiquant une direction. La section correspondante est $[(\gamma, \delta)] = (\gamma, \delta, 0)$. Les points singuliers sont situés sur l'équateur, aux intersections de la sphère avec l'axe Ox . Cette section est donc appropriée pour définir des directions près des pôles, ce que la section basée sur les angles d'Euler ne pouvait faire.

3. *Transport parallèle*. Nous revenons ici à l'interprétation de direction en terme de champ de vecteur. Soit η un point de la sphère, et un vecteur tangent à la sphère en ce point. Transportons parallèlement aux géodésiques ce vecteur jusqu'à chaque point de la sphère : ceci définit une direction en accord avec le vecteur tangent de départ. Le seul point singulier est le point antipodal à η . Ce choix est naturel si nous voulons définir des directions dans un voisinage le plus grand possible du point privilégié η , mais malheureusement il ne s'accommode pas aussi bien du formalisme de paramétrisation du groupe $SO(3)$ ni donc de nos méthodes d'implémentation.

C'est la définition de direction basée sur les angles d'Euler que nous retiendrons par la suite. Il nous reste maintenant à nous intéresser aux propriétés directionnelles des ondelettes sur la sphère.

7.2 Critères de directionnalité sur la sphère

Pour rappel, une ondelette euclidienne est considérée comme directionnelle lorsque le support de sa transformée de Fourier est essentiellement contenu dans un cône de sommet à l'origine. Ce critère ne se généralise pas à la CWT sphérique puisque l'espace de Fourier de la sphère est très différent : il s'agit des indices (l, m) des harmoniques sphériques. Cet espace est discret puisque la sphère est compacte. Il nous faut donc trouver d'autres approches.

7.2.1 Une condition nécessaire

Cette condition est basée sur la généralisation du concept d'autocorrélation angulaire, approche déjà mentionnée au début du chapitre 6. Soit ψ une ondelette centrée au pôle

nord, et $R_{\theta'}\psi$ l'ondelette ψ tournée d'un angle θ' autour du pôle nord. Alors on calcule

$$\begin{aligned}
 K_{\psi}(\theta') &= \frac{\langle \psi | R_{\theta'} \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle} = \|\psi\|_2^{-2} \sum_{l \geq 0} \sum_{|m| \leq l} \langle \psi | Y_l^m \rangle \langle Y_l^m | R_{\theta'} \psi \rangle \\
 &= \|\psi\|_2^{-2} \sum_{l \geq 0} \sum_{|m| \leq l} \langle \psi | Y_l^m \rangle \langle R_{-\theta'} Y_l^m | \psi \rangle \\
 &= \|\psi\|_2^{-2} \sum_{l \geq 0} \sum_{|m| \leq l} \langle \psi | Y_l^m \rangle e^{im\theta'} \langle Y_l^m | \psi \rangle \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left(\|\psi\|_2^{-2} \sum_{l \geq |m|} |\hat{\psi}(l, m)|^2 \right) e^{im\theta'} \\
 &= \sum_{m \in \mathbb{Z}} a_m e^{im\theta'}.
 \end{aligned}$$

K_{ψ} , vu comme fonction de θ' , a donc une série de Fourier dont les coefficients sont donnés explicitement en terme des coefficients en harmoniques sphériques de ψ ! Si ψ est directionnelle, K_{ψ} sera concentré autour de $\theta' = 0$, et les coefficients a_m par contre auront une décroissance lente lorsque $m \rightarrow \pm\infty$. Le cas limite lorsque $K(\theta') = \delta(\theta')$ correspond à $a_m = 1$ pour tout m .² Le critère nécessaire de directionnalité passera donc par le calcul de $K_{\psi}(\theta')$, directement ou par ses coefficients de Fourier. L'interprétation que nous avons donnée en terme des coefficients de Fourier n'est pas aussi intéressante que dans le cas euclidien pour la simple raison qu'il n'est pas coutume de caractériser une fonction sur la sphère par ses coefficients en harmoniques sphériques.

7.2.2 Une condition nécessaire et suffisante

Ce sont les développements du chapitre 6 qui nous guideront dans cette section. La généralisation naturelle des opérateurs de reconstruction partielle au cas de la CWT sphérique est

$$\begin{aligned}
 S_{\psi,a}(\theta') &= \int_{S^2} d\eta |\psi_{[\eta]a\theta'}\rangle \langle \psi_{[\eta]a\theta'}|, \\
 T_{\psi}(\theta') &= \int_0^{\infty} \frac{da}{a^3} \int_{S^2} d\eta |\psi_{[\eta]a\theta'}\rangle \langle \psi_{[\eta]a\theta'}|,
 \end{aligned}$$

où $[\cdot] : S^2 \rightarrow SO(3)$ est un choix de section. Par simplicité, il s'agira de celle correspondant aux angles d'Euler. L'inconvénient de ce choix est que la moyenne de ces opérateurs ne reste un indicateur de directionnalité que pour des fonctions-test supportées près de l'équateur. Pour rappel, $\psi_{[\eta]a\theta'}(\eta') = R_{\theta'}\psi_a([\eta]^{-1}\eta') = U_{qr}(\gamma)\psi_a$, avec $\gamma = ([\eta], \theta') \in SO(3)$.

Une bonne généralisation de l'autocorrélation angulaire sera par exemple $\langle S_{\psi,a}(\theta') \rangle_{\psi_a}$, avec le degré de liberté supplémentaire du paramètre de dilatation a . Dans le cas euclidien,

²La condition pour que $\psi \in L^2(S^2)$ est que $\{a_m\}_{m \in \mathbb{Z}} \in \ell^1(\mathbb{Z})$

ce paramètre ne jouait pas puisqu'une ondelette dilatée restait directionnelle. Dans le cas sphérique, l'examen de $\langle S_{\psi,a}(\theta') \rangle_{\psi_a}$ pour différentes valeurs de a nous révélera dans quelle mesure une ondelette délocalisée (parce que dilatée) reste directionnelle. De la même manière que la définition d'une direction globale posait problème, on verra que la qualité de la détection de direction à grande échelle n'est pas garantie.

Une deuxième façon de quantifier le pouvoir directionnel de ψ est de considérer $\langle S_{\psi,a}(\theta') \rangle_f$ avec f un signal directionnel, par exemple une géodésique (un grand cercle). Encore une fois, si cette quantité est concentrée autour de $\theta' = 0$, alors on dira que ψ est directionnelle. Par contre, l'examen de $\langle T_{\psi,a}(\theta') \rangle_f$, quel que soit f , risque de ne pas porter ses fruits : si on arrive à montrer qu'il existe des échelles où nécessairement l'ondelette n'est plus directionnelle, alors T_ψ ne sera jamais piqué autour de $\theta' = 0$, et donc ne servira à rien dans ce contexte.

La mauvaise nouvelle est que l'action de $S_{\psi,a}(\theta')$ sur les fonctions de $L^2(S^2)$ n'a plus d'expression simple dans l'espace de Fourier, comme en témoigne la proposition suivante.

Proposition 7.1. *Soit $[\cdot]$ la section correspondant aux angles d'Euler.*

$$\left(\widehat{S_{\psi,a}(\theta') f} \right) (l, m) = \sum_{n'l'n'} \langle P_{mn'}^l | P_{mn}^l \rangle \hat{\psi}_a(l, n) \overline{\hat{\psi}_a(l', n')} \hat{f}(l', n') e^{-i(n-n')\theta'},$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2([-1, 1], dx)$ et les P_{mn}^l sont des fonctions spéciales que l'on trouve dans l'expression des fonctions sphériques généralisées (de Wigner)

$$\mathcal{D}_{mn}^l(\alpha, \beta, \theta') = e^{-im\alpha} P_{mn}^l(\cos \beta) e^{-in\theta'}.$$

Démonstration. Voir annexe A □

La raison de notre pessimisme ne réside pas dans le caractère à première vue inintelligible de la formule, mais trouve sa source dans le nombre assez considérable de coefficients $\langle P_{mn'}^l | P_{mn}^l \rangle$ à calculer. Comme $n' \neq n$, on ne peut pas appliquer les relations d'orthogonalité. Vu qu'il y a 5 indices indépendants, il faudrait calculer et stocker $O(N^5)$ coefficients, où N est la "bande passante" sphérique, ce qui n'est pas raisonnable. La référence [39] permet sans trop de difficultés d'identifier les symétries dans les indices, et permettrait sans doute d'exprimer des relations de récurrence entre ces coefficients, mais ne permet pas à notre connaissance de diminuer cette estimation de complexité asymptotique. Remarquons qu'on peut toujours évaluer $\langle S_{\psi,a}(\theta') \rangle_f$ à partir de sa définition, et c'est ce que nous ferons par la suite.

Une remarque pour terminer cette section sur le caractère intrinsèque de la dilatation stéréographique choisie dans notre définition de la CWT sphérique. Il s'agit d'une application *conforme* de la sphère dans elle-même³, c'est-à-dire qu'elle conserve les angles. Ceci devient particulièrement intéressant ici puisque des mesures d'angles sont la raison d'être des ondelettes directionnelles...

³En effet, il s'agit d'une action du groupe de Lorentz qui est le groupe conforme de la sphère. Un autre argument est que la projection stéréographique, la dilatation euclidienne et la projection stéréographique inverse sont toutes trois des applications conformes.

7.3 Implémentation

La première étape de l'implémentation est de trouver une ondelette directionnelle admissible. Le résultat suivant montre à un point technique près qu'il y a moyen d'en construire à volonté.

Proposition 7.2. *Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R}^2)$ une ondelette pour la CWT 2D euclidienne. Définissons la projection stéréographique inverse d'une fonction $f(x, \chi)$ de $L^2(\mathbb{R}^2, dx d\chi)$ comme étant la fonction de $L^2(S^2, \sin \theta d\theta d\phi)$ donnée par*

$$(\Pi^{-1}f)(\theta, \phi) = \frac{2f(2 \tan \frac{\theta}{2}, \phi)}{1 + \cos \theta}.$$

Alors $\Pi^{-1}\psi$ vérifie la condition nécessaire d'admissibilité de la CWT sphérique, avec normalisation L^2 de la dilatation. La fonction $\frac{\Pi^{-1}\psi}{1+\cos\theta}$, quant à elle, vérifie la condition nécessaire d'admissibilité de la CWT sphérique avec dilatation L^1 (c'est-à-dire la condition de moyenne nulle par rapport à la mesure invariante).

Démonstration. Il n'est pas difficile de montrer que Π^{-1} induit un isomorphisme entre $L^2(\mathbb{R}^2, dx d\chi)$ et $L^2(S^2, \sin \theta d\theta d\phi)$, comme annoncé dans [38]. Dès lors la preuve est immédiate :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{R}^2} \psi(x, \chi) dx d\chi = \int_{S^2} (\Pi^{-1}\psi)(\theta, \phi) \frac{2}{1 + \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi. \\ &= 2 \int_{S^2} \frac{(\Pi^{-1}\psi)(\theta, \phi)}{1 + \cos \theta} \sin \theta d\theta d\phi. \end{aligned}$$

□

Cette manière de générer des ondelettes *directionnelles* sur la sphère par projection stéréographique inverse semble ad-hoc, pourtant il n'en est rien : cette manière de procéder *s'impose* à partir du moment où on a choisi la dilatation stéréographique (conforme). En effet il est raisonnable de penser qu'une bonne ondelette directionnelle l'est d'abord aux petites échelles : son pouvoir directionnel n'est ainsi pas fortuit aux grandes échelles. Sous cette hypothèse, il faut suivre le schéma suivant pour générer les meilleures ondelettes directionnelles possibles sur la sphère.

- choisir ψ directionnelle dans \mathbb{R}^2 , le plan tangent au pôle nord ;
- la contracter en ψ_a pour $a \rightarrow 0$ de manière à ce que *n'importe quelle* projection raisonnable P^{-1} du plan tangent sur la sphère donne une ondelette $P^{-1}\psi_a$ forcément directionnelle (la sphère est localement plane) ;
- la dilater jusqu'à sa taille de départ : $D_{\frac{1}{a}}P^{-1}\psi_a$.

Mais lorsque $P = \Pi$, par définition même de dilatation stéréographique,

$$D_{\frac{1}{a}}\Pi^{-1}\psi_a = \Pi^{-1}\psi$$

quel que soit a , et donc en particulier à la limite $a \rightarrow 0$. Passer par les étapes ci-dessus est donc inutile dans le cas de la projection stéréographique : l'ondelette engendrée par Π^{-1}

est en ce sens directement optimalement directionnelle ! Et en plus l'action de Π^{-1} garantit l'admissibilité.

Un candidat ondelette directionnelle évident est alors l'ondelette de Morlet, bien connue en 2D, [38], qui devient sur la sphère (pour une excentricité $\epsilon = 1$)

$$\psi_{M2}(\theta, \phi) = \frac{e^{ik_0 \tan \frac{\theta}{2} \cos(\phi_0 - \phi)} e^{-\frac{1}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2}}}{1 + \cos \theta}$$

dans le cas de la dilatation L^2 , et

$$\psi_{M1}(\theta, \phi) = \frac{e^{ik_0 \tan \frac{\theta}{2} \cos(\phi_0 - \phi)} e^{-\frac{1}{2} \tan^2 \frac{\theta}{2}}}{(1 + \cos \theta)^2}$$

pour la dilatation L^1 . Nous avons choisi de ne pas inclure le terme correctif pour garder le caractère directionnel. Cette ondelette, ainsi que ses petites soeurs déplacées, dilatées et tournées, sont montrées aux figures 7.3 et suivantes. On constate a posteriori qu'elle est bien directionnelle : les figures 7.8 et 7.9 montrent que les critères développés aux sections 7.2.1 et 7.2.2 sont bien vérifiés.

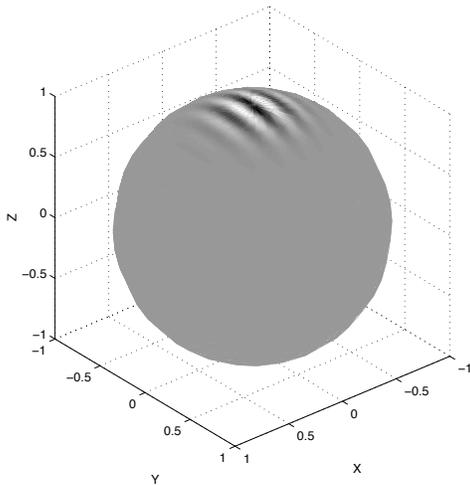


FIG. 7.1 – Partie réelle de l'ondelette de Morlet sphérique $k_0 = 6$, $a = 0.03$, $\theta' = 0$ placée au pôle nord. Normalisation L^2 de la dilatation.

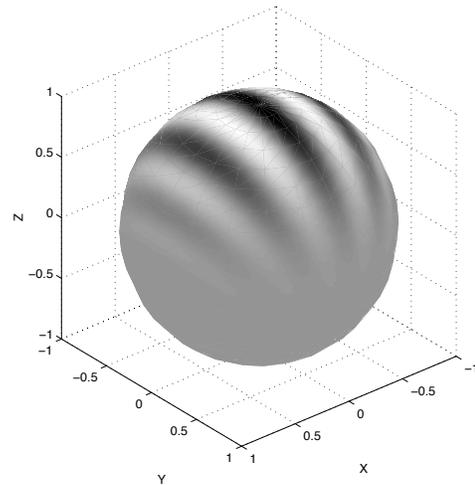


FIG. 7.2 – Idem, $k_0 = 6$, $a = 0.3$, $\theta' = 0$ placée au pôle nord.

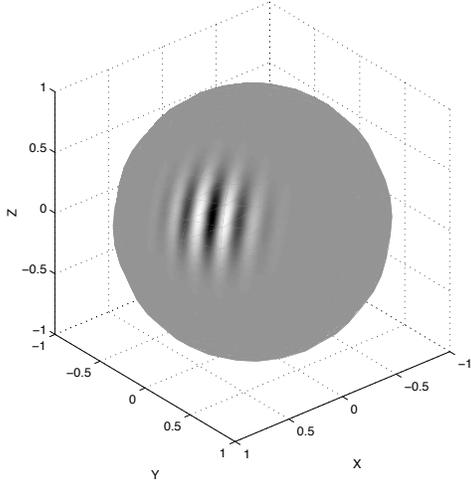


FIG. 7.3 – Idem, $k_0 = 6$, $a = 0.03$, $\theta' = 0$, placée en $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ dans les coordonnées sphériques habituelles.

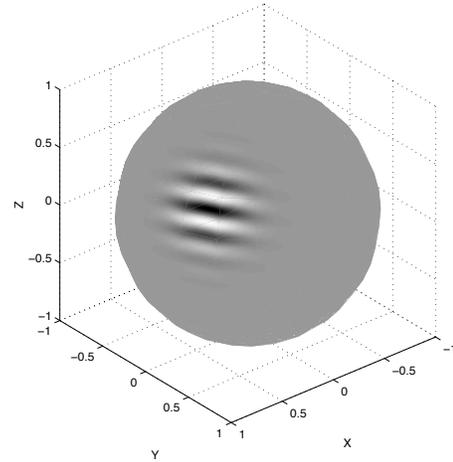


FIG. 7.4 – Idem, $k_0 = 6$, $a = 0.03$, $\theta' = \frac{\pi}{2}$, placée en $(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ dans les coordonnées sphériques habituelles.

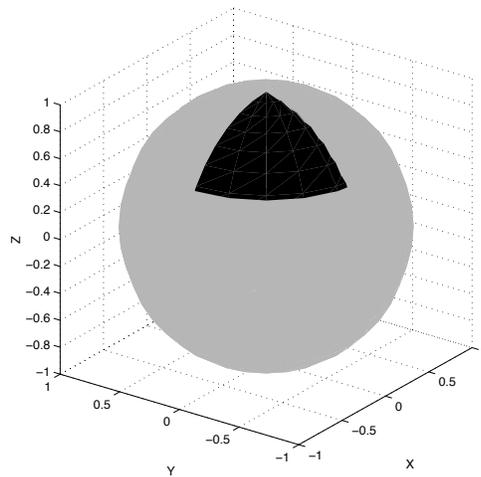


FIG. 7.5 – Signal test : triangle sphérique. Les côtés de ce triangle sont des méridiens ou des parallèles.

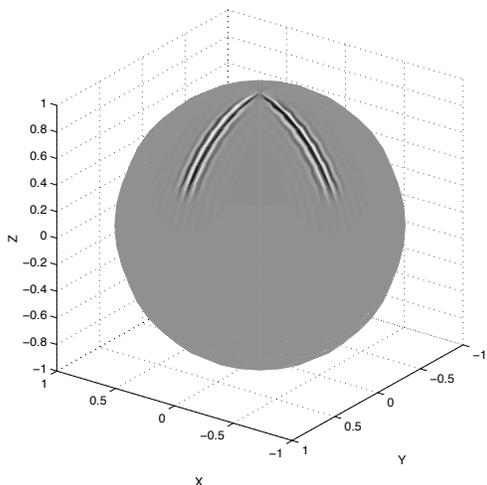


FIG. 7.6 – CWT du triangle sphérique avec l’ondelette de Morlet $k_0 = 6$, $a = 0.03$, $\theta' = 0$. Les méridiens sont bien détectés.

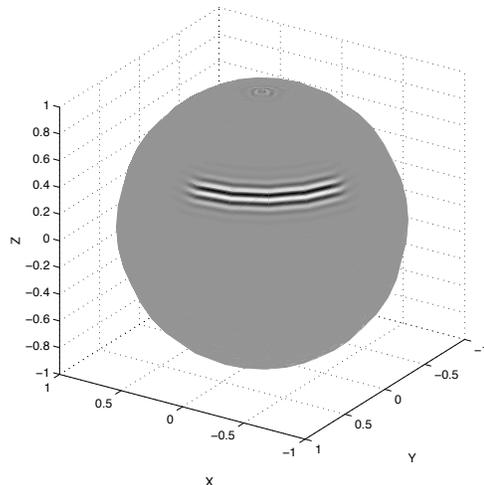


FIG. 7.7 – Idem, $k_0 = 6$, $a = 0.03$, $\theta' = \frac{\pi}{2}$. Les parallèles sont bien détectés.

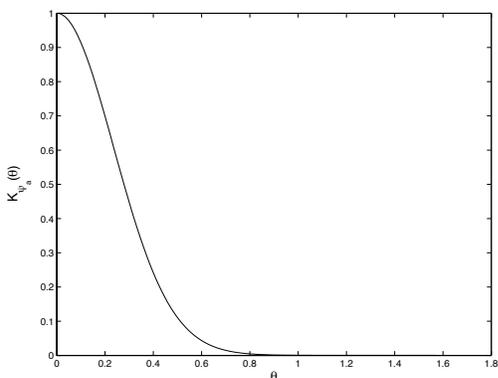


FIG. 7.8 – Autocorrélation angulaire de l’ondelette de Morlet $k_0 = 6$ pour des angles compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Le graphe est le même quel que soit le paramètre de dilatation a , ce qui est facile à démontrer à partir des idées de la proposition 7.2. Ici une ondelette est donc vue à tort comme étant directionnelle de la même manière à toutes les échelles.

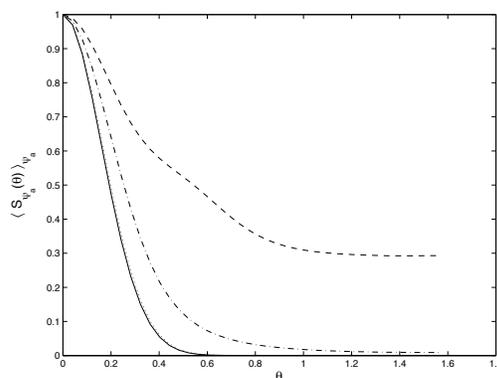


FIG. 7.9 – Critère nécessaire et suffisant de directionnalité de l’ondelette de Morlet $k_0 = 6$. Trait plein : $a = 0.03$. Trait pointillé : $a = 0.1$. Trait mixte : $a = 0.3$. Trait tireté : $a = 1$. Plus une ondelette est dilatée, moins elle est directionnelle, en accord avec notre intuition.

D’un point de vue pratique, nous avons implémenté les rotations de \mathbb{R}^3 par angles d’Euler, de manière à ce qu’une ondelette déplacée et tournée reste exprimable de manière analytique (c’est-à-dire échantillonnable en n’importe quel point). Pour l’algorithme

de calcul de la CWT, nous avons légèrement modifié l'algorithme de [4] pour qu'il puisse s'accommoder d'ondelettes quelconques, pas nécessairement isotropes, tout en restant "rapide". L'idée est d'utiliser le code tel quel sur l'ondelette $\check{\psi}(\theta, \phi) \equiv \psi(\theta, -\phi)$, on peut voir facilement que la démonstration de [4] reste alors d'application.

Peut on réaliser un calcul vraiment rapide de la CWT sphérique directionnelle? Dans l'état actuel des choses, non, parce que la CWT ne se ramène plus à une convolution sphérique comme dans le cas isotrope. Le calcul de la CWT dans l'espace de Fourier (des harmoniques sphériques) n'est donc plus aussi simple. Les deux propositions suivantes précisent ceci.

Proposition 7.3. *Soit $\psi \in L^2(S^2)$ une ondelette isotrope. Alors*

$$((W_{\psi}f)(\cdot, a))(l, m) = \frac{4\pi^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{2l+1}} \widehat{\psi}(l, 0) \hat{f}(l, m).$$

Démonstration. Il s'agit d'un cas particulier de la proposition ci-dessous. \square

Proposition 7.4. *Soit $\psi \in L^2(S^2)$ une ondelette, et soit $[\cdot]$ la section correspondant aux angles d'Euler. Alors*

$$((W_{\psi}f)(\cdot, a, \theta'))(l, m) = (-1)^m \sqrt{\pi(2l+1)} \sum_{l'n'} e^{in'\theta'} \widehat{\psi}_a(l', n') \hat{f}(l', n') \langle P_{m, -n'}^{l'} | P_{m0}^l \rangle,$$

où les coefficients $\langle P_{m, -n'}^{l'} | P_{m0}^l \rangle$ ont été définis à la proposition 7.1.

Démonstration. Voir annexe A \square

Pour ψ isotrope, tous les coefficients $\widehat{\psi}(l, m)$ disparaissent lorsque $m \neq 0$, et donc seul $n' = 0$ contribue dans la somme ci-dessus. En utilisant l'orthogonalité des fonctions associées de Legendre ($P_l^m \sim P_{m0}^l$), on obtient bien la proposition 7.3 comme cas particulier de 7.4.

De la même manière qu'à la proposition 7.1, il faudrait au moins $O(N^4)$ opérations pour calculer et stocker les coefficients $\langle P_{m, -n'}^{l'} | P_{m0}^l \rangle$. L'implémentation actuelle utilise $O(N^3 \log N)$ opérations.

7.4 Détection de sources gamma isotropes

Les développements des trois derniers chapitres ont en fait pour but de rencontrer l'intuition de la section 3.5, et de mettre à disposition l'outil qui manquait pour sa généralisation aux données sur la planisphère. On remarque sur les figures ci-dessous que les seuls objets qui ont survécu au filtrage sont les sources les plus brillantes du ciel. Il suffira d'affaiblir notre filtrage (non-linéaire) pour récupérer les autres sources, et, espérons-le, moins d'objets parasites que dans les méthodes classiques. Le calcul des seuils de détection pour un tel filtrage sera sans doute très compliqué (voir annexe A.1 pour un pas dans cette direction), et de lourdes simulations Monte Carlo seront sans doute nécessaires.

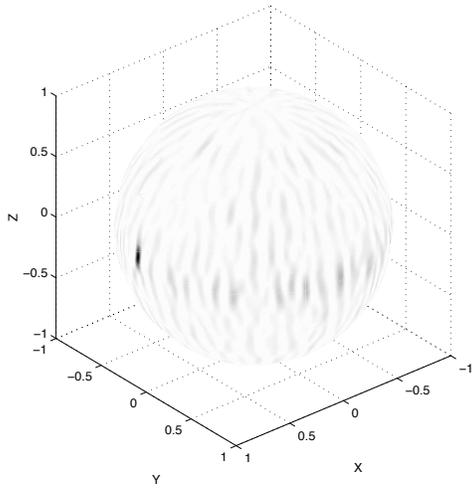


FIG. 7.10 – Partie positive de la CWT sphérique directionnelle des données de la figure 4.1 avec une ondelette de Morlet : $k_0 = 3$, $a = 0.03$, $\theta' = 0$.

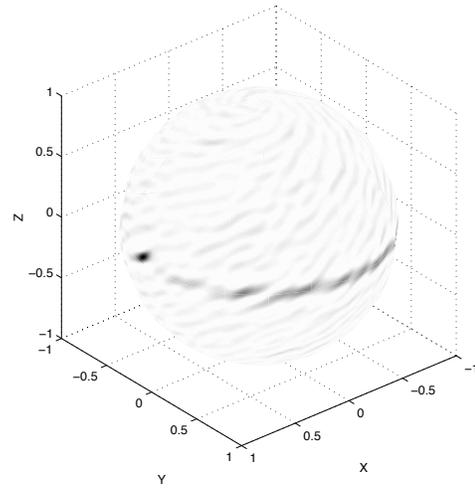


FIG. 7.11 – Idem : $k_0 = 3$, $a = 0.03$, $\theta' = \frac{\pi}{3}$

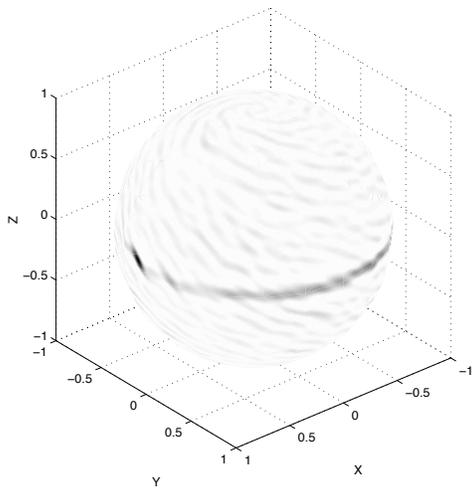


FIG. 7.12 – Idem : $k_0 = 3$, $a = 0.03$, $\theta' = \frac{2\pi}{3}$

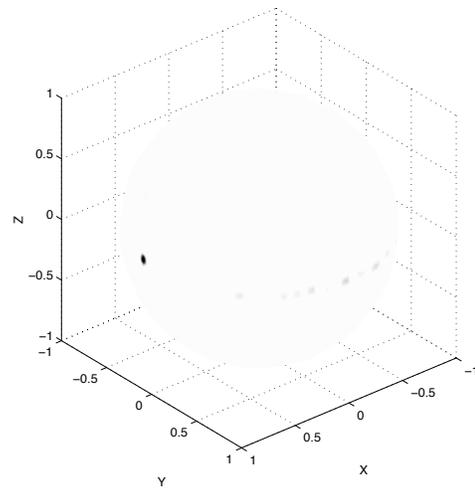


FIG. 7.13 – Produit point par point des trois dernières figures. La source la plus brillante qui ressort sur le plan galactique est le pulsar Vela, qui est aussi la source la plus brillante sur la figure 4.1.

Conclusion

Le présent travail a eu pour but de montrer qu'un traitement soigné de la modélisation des données a permis d'apporter la rigueur qui manquait aux méthodes nonparamétriques classiques de détection de sources, et a, espérons-le, ouvert quelques pistes de recherche pour le futur.

La course aux sources gamma est en effet loin d'être terminée. Le lancement de GLAST (*Gamma-Ray Large Area Space Telescope*), le successeur d'EGRET, est prévu pour 2005. Ce télescope de nouvelle génération aura une sensibilité 30 fois plus importante qu'EGRET, pour une résolution angulaire qui ne sera pas significativement améliorée par rapport à celle de son prédécesseur. On attend quelques milliers de sources dans les données de GLAST alors qu'EGRET n'a permis d'en identifier que 270. Le flot de données sera beaucoup plus important et les sources auront tendance à se superposer les unes aux autres. Les inconvénients des méthodes classiques de vraisemblance deviendront étouffants, cfr. [25], et nous sommes pour le moment dans l'incapacité de fournir une méthode acceptable de traitement des données de GLAST. En outre nous n'aurons plus de modèle physique satisfaisant pour le fond, suffisamment proche des données. Il faudra l'estimer de manière nonparamétrique. *Les méthodes d'ondelettes connaîtront nécessairement un essor à cause de ces limitations des méthodes actuelles.*

L'idée de passer aux ondelettes sur la sphère est également tout à fait appropriée en regard du mode d'acquisition de GLAST. Au lieu de regarder comme EGRET vers une position fixe pour chaque période d'observation, GLAST sera constamment en train de balayer le ciel. Donc n'importe quelle analyse de ses données impliquera un système de plusieurs projections compliquées pour chaque période d'observation, *ou* tiendra compte explicitement de la géométrie sphérique. De surcroît, l'analyse rapide en ondelettes sur la sphère sera particulièrement adaptée pour les détections en temps réel de sources variables.

Nous l'avons dit, ce travail aura ouvert quelques pistes de recherche, la plupart d'entre elles nous occuperont par la suite. Citons en vrac :

Ondelettes sur la sphère : Il reste à trouver des algorithmes vraiment rapides de CWT sphérique, et une implémentation correcte de la reconstruction à partir de cette CWT. Des paquets d'ondelettes sphériques, par exemple, présenteront plus de challenges que leurs analogues euclidiens à implémenter.

Reconstruction du fond : Aucune des solutions actuelles n'est complètement satisfaisante. Pour y remédier, nous proposons de regarder le fond de manière multi-échelle grâce à la transformée en ondelettes, comme expliqué à la section 3.3.

Ondelettes directionnelles : Explorer l'idée qu'on peut mettre en évidence les sources ponctuelles grâce à un filtrage qui met à zéro le fond structuré *non isotrope*. Nous avons donné une solution qui n'est pas entièrement satisfaisante, mais qui peut servir de base pour des développements ultérieurs.

Ondelettes spectrales : L'idée est d'utiliser, au lieu du chapeau mexicain, une ondelette *différence de PSF*. Elle ne serait pas dilatée de manière habituelle, mais sa forme serait changée en fonction de l'*indice spectral* de la source, c'est-à-dire en fonction de la forme de la PSF. On obtiendrait donc une analyse de type multirésolution, mieux adaptée au problème. Le but serait d'obtenir un maximum dans la réponse de la transformée précisément à l'endroit de la source et à son indice spectral. Ce serait une manière intéressante de prendre en compte l'information de la PSF sans passer par une étape de déconvolution.

Moments nuls : En plus demander que le filtre soit apparenté à la PSF, on peut imposer un certain nombre de moments nuls pour se débarrasser du fond structuré mais lisse. Reste à voir dans quelle mesure ce genre de restriction handicape le pouvoir de détection des sources.

Multi-énergie : Exploiter l'information en énergie de manière plus systématique, ne pas se contenter d'un simple binning. Pourquoi pas étudier les corrélations d'un bin à un autre en énergie, ou rejoindre les idées de [34].

D'un point de vue théorique maintenant, les développements des chapitres 3, 5, 6 et 7 présentent eux aussi des questions non résolues intéressantes :

Inversion de transformée de Laplace . Le développement 3.4 peut être appliqué à n'importe quelle fonction caractéristique pour l'inverser à l'aide de ses moments. Ceci constitue peut être une approche complémentaire à [35], où on se débarrasse des problèmes de convergence intrinsèques à la méthode qui y est utilisée. L'inversion de transformées de Laplace est un problème difficile et couramment rencontré dans des problèmes de modélisation stochastique de files d'attente.

Localisation position-échelle . Les développements du chapitre 5 rejoignent ceux de [11], chap.2 : les opérateurs de localisation que nous considérons sont intimement liés à ceux qui ont été étudiés par Daubechies et Paul. Ali [2] parle des opérateurs A et B comme étant la version intégrée des opérateurs considérés dans [11]. On peut alors imaginer généraliser leur travail à 2D et étudier plus en détail la couverture de l'espace $(b\theta)$ par des ondelettes 2D directionnelles.

Biais de la CWT dans l'analyse 2D . Le chapitre 5 nous apprend que l'estimation de la position par des ondelettes 2D risque d'être systématiquement faussée, et il serait intéressant de voir dans quelle mesure cet effet pathologique a des répercussions sur l'analyse d'images par ondelettes continues.

Annexe A

Généralisations et démonstrations

A.1 Généralisation multivariée de la proposition 3.1

Il peut d'avérer utile de regarder l'image à l'aide de plusieurs filtres K_j différents, comme à la fin du chapitre 7. Dans ce cas, la détermination théorique de la densité de probabilité d'une combinaison $F(Y_1, \dots, Y_J)$ de ces images filtrées Y_j passe par la connaissance de la densité de probabilité *conjointe* des Y_j . Celle-ci contient en tous cas toute l'information nécessaire pour y arriver.

A la densité conjointe $f_{Y_1, \dots, Y_J}(\mathbf{y})$ correspond la fonction caractéristique de J variables

$$\begin{aligned}\hat{f}_{Y_1, \dots, Y_J}(\mathbf{s}) &= E[e^{\mathbf{s} \cdot \mathbf{Y}}] = E[e^{\sum_{j=1}^J s_j Y_j}] \\ &= E\left[\prod_{j=1}^J e^{s_j Y_j}\right] \\ &\neq \prod_{j=1}^J E[e^{s_j Y_j}]\end{aligned}$$

parce que les Y_j n'ont aucune raison d'être indépendants! Au contraire, la bonne manière de procéder est

$$\begin{aligned}\hat{f}_{Y_{h1}, \dots, Y_{hJ}}(\mathbf{s}) &= E\left[e^{\sum_{j=1}^J s_j \sum_k K_j(\eta, \eta_k) \frac{X(\Phi_k, \epsilon_k)}{\epsilon_k}}\right] \\ &= E\left[e^{\sum_k X(\Phi_k, \epsilon_k) \sum_j s_j \frac{K_j(\eta, \eta_k)}{\epsilon_k}}\right] \\ &= \prod_k E\left[e^{X(\Phi_k, \epsilon_k) \sum_j s_j \frac{K_j(\eta, \eta_k)}{\epsilon_k}}\right] \\ &= \dots \quad (\text{cfr. proposition 3.1}) \\ &= \exp \sum_k d\eta_k \Phi_k \epsilon_k \left(e^{\sum_j s_j \frac{K_j(\eta, \eta_k)}{\epsilon_k}} - 1 \right),\end{aligned}$$

qui devient dans le cas continu

$$\hat{f}_{Y_1, \dots, Y_J}(\mathbf{s}) = \exp \int_{S^2} d\eta' \Phi(\eta') \epsilon(\eta') \left(e^{\frac{\mathbf{s} \cdot \mathbf{K}(\eta, \eta')}{\epsilon(\eta')}} - 1 \right).$$

A.2 Généralisation normale de la proposition 3.1

La plupart des problèmes de traitement d'image ou de traitement de données ont des sources de bruit beaucoup moins bien modélisées que le processus de comptage poissonien. Le modèle qui s'impose dans l'immense majorité des cas est alors celui d'un bruit normal additif. La proposition 3.1 se généralise sans trop de difficultés.

Proposition A.1. *Soient $X_j \sim N(\mu_j, \sigma_j^2)$ des v.a. normales indépendantes, et soit $Y_i = \sum_j K_{ij} X_j$. Alors*

$$Y_i \sim N\left(\sum_j K_{ij} \mu_j, \sum_j K_{ij}^2 \sigma_j^2\right).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \hat{f}_{Y_i}(s) &= E[e^{sY_i}] \\ &= \dots = \prod_j E[e^{sK_{ij}X_j}] \\ &= \prod_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{sK_{ij}x} f_{X_j}(x) dx \\ &= \prod_j \int_{-\infty}^{\infty} e^{sK_{ij}x} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_j^2}} e^{-\frac{(x-\mu_j)^2}{2\sigma_j^2}} dx \\ &= \dots = \prod_j e^{\frac{s^2}{2} K_{ij}^2 \sigma_j^2} e^{sK_{ij}\mu_j} \\ &= \exp\left(\frac{s^2}{2} \sum_j K_{ij}^2 \sigma_j^2 + s \sum_j K_{ij} \mu_j\right). \end{aligned}$$

En choisissant $s = -ik$ et en prenant la transformée de Fourier inverse, on obtient

$$f_{Y_i}(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi \sum_j K_{ij}^2 \sigma_j^2}} \exp\left(-\frac{(y - \sum_j K_{ij} \mu_j)^2}{2 \sum_j K_{ij}^2 \sigma_j^2}\right).$$

ce qui est bien la densité de $N(\sum_j K_{ij} \mu_j, \sum_j K_{ij}^2 \sigma_j^2)$.

□

Le passage à la limite est possible ici mais n'a plus le sens physique intéressant qu'il avait précédemment. C'est pourquoi nous avons omis cette discussion inutile.

A.3 Démonstration de la proposition 6.1

Proposition A.2. *Les opérateurs $\hat{T}_\psi(n)$ sont multiples d'opérateurs unitaires :*

$$\hat{T}_\psi(n)^\dagger \hat{T}_\psi(n) = \hat{T}_\psi(n) \hat{T}_\psi(n)^\dagger = \lambda_\psi(n) I.$$

Démonstration. Définissons les représentations unitaires suivantes du groupe affine dans $L^2(\mathbb{R}^2)$:

$$\left(U_n(\widehat{\mathbf{ba}\theta}) f \right) (\mathbf{k}) = a e^{-in\theta} e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{b}} \hat{f}(a r_{-\theta} \mathbf{k}).$$

Elles sont mutuellement équivalentes, et l'opérateur qui entrelace U_0 et U_n est précisément $\hat{T}_\psi(n)$:

$$\hat{T}_\psi(n) = \int d\mu(g) |U_n(g)\psi\rangle \langle U_0(g)\psi|, \quad \text{avec} \quad g \equiv (\mathbf{ba}\theta).$$

$$\begin{aligned} U_n(g') \hat{T}_\psi(n) f &= \int d\mu(g) |U_n(g') U_n(g)\psi\rangle \langle U_0(g)\psi| f \rangle \\ &= \int d\mu(g) |U_n(g'g)\psi\rangle \langle U_0(g)\psi| f \rangle \\ &= \int d\mu(g) |U_n(g)\psi\rangle \langle U_0(g'^{-1}g)\psi| f \rangle \\ &= \int d\mu(g) |U_n(g)\psi\rangle \langle U_0(g)\psi| U_0(g') f \rangle \\ &= \hat{T}_\psi(n) U_0(g') f. \end{aligned}$$

Si $n = 0$, par le lemme de Schur on obtient bien la résolution de l'identité. Si $n \neq 0$, par le lemme de Schur généralisé, voir [3], $\hat{T}_\psi(n)$ est multiple d'une isométrie :

$$\hat{T}_\psi(n)^\dagger \hat{T}_\psi(n) = \lambda_\psi(n) I.$$

Le même argument peut être appliqué à

$$\hat{T}_\psi(n)^\dagger = \int d\mu(g) |U_0(g)\psi\rangle \langle U_n(g)\psi|$$

ce qui implique à son tour

$$\hat{T}_\psi(n) \hat{T}_\psi(n)^\dagger = \mu_\psi(n) I.$$

Finalement, on identifie $\lambda_\psi(n)$ et $\mu_\psi(n)$ par

$$\mu_\psi(n) \hat{T}_\psi(n) = \hat{T}_\psi(n) \hat{T}_\psi(n)^\dagger \hat{T}_\psi(n) = \hat{T}_\psi(n) \lambda_\psi(n).$$

□

A.4 Démonstration de la proposition 7.1

Proposition A.3. Soit $[\cdot]$ la section correspondant aux angles d'Euler.

$$\left(\widehat{S_{\psi,a}(\theta')} f \right) (l, m) = \sum_{nl'n'} \langle P_{mn'}^l | P_{mn}^l \rangle \hat{\psi}_a(l, n) \overline{\hat{\psi}_a(l', n')} \hat{f}(l', n') e^{-i(n-n')\theta'},$$

où $\langle \cdot | \cdot \rangle$ est le produit scalaire dans $L^2([-1, 1], dx)$ et les P_{mn}^l sont des fonctions spéciales que l'on trouve dans l'expression des fonctions sphériques généralisées (de Wigner)

$$\mathcal{D}_{mn}^l(\alpha, \beta, \theta') = e^{-im\alpha} P_{mn}^l(\cos \beta) e^{-in\theta'}.$$

Démonstration.

$$\left(\widehat{S_{\psi,a}(\theta')} f \right) (l, m) = \int_{S^2} d\eta \left(U_{qr}([\eta], \theta') \psi_a \right) (l, m) \langle U_{qr}([\eta], \theta') \psi_a | f \rangle.$$

L'action de la représentation quasi-régulière U_{qr} de $SO(3)$ dans $L^2(S^2)$ s'exprime de manière plus commode à l'aide des fonctions sphériques généralisées. Pour $\gamma \in SO(3)$,

$$\begin{aligned} \left(U_{qr}(\gamma) \psi_a \right) (l, m) &= \sum_{|n| \leq l} \mathcal{D}_{mn}^l(\gamma) \hat{\psi}_a(l, n), \\ \langle U_{qr}(\gamma) \psi_a | f \rangle &= \sum_{l' \geq 0} \sum_{|m'| \leq l'} \sum_{|n'| \leq l'} \overline{\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}(\gamma) \hat{\psi}_a(l', n')} \hat{f}(l', m'), \end{aligned}$$

d'où il découle

$$\begin{aligned} \left(\widehat{S_{\psi,a}(\theta')} f \right) (l, m) &= \int_{S^2} d\eta \sum_{nl'm'n'} \mathcal{D}_{mn}^l([\eta], \theta') \overline{\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}([\eta], \theta')} \\ &\quad \hat{\psi}_a(l, n) \overline{\hat{\psi}_a(l', n')} \hat{f}(l', n'). \end{aligned}$$

Puisque $[\cdot]$ correspond aux angles d'Euler,

$$\begin{aligned} &\int_{S^2} \sin \beta d\alpha d\beta \mathcal{D}_{mn}^l(\alpha, \beta, \theta') \overline{\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}(\alpha, \beta, \theta')} \\ &= \int_0^{2\pi} d\alpha e^{-i(m-m')\alpha} \int_{-1}^1 dx P_{mn}^l(x) \overline{P_{m'n'}^{l'}(x)} e^{-i(n-n')\theta'} \\ &= 2\pi \delta_{mm'} \langle P_{mn'}^{l'} | P_{mn}^l \rangle e^{-i(n-n')\theta'}, \end{aligned}$$

et donc

$$\left(\widehat{S_{\psi,a}(\theta')} f \right) (l, m) = \sum_{nl'n'} \langle P_{mn'}^{l'} | P_{mn}^l \rangle \hat{\psi}_a(l, n) \overline{\hat{\psi}_a(l', n')} \hat{f}(l', n') e^{-i(n-n')\theta'},$$

ce qui conclut la preuve. □

A.5 Démonstration de la proposition 7.4

Proposition A.4. Soit $\psi \in L^2(S^2)$ une ondelette, et soit $[\cdot]$ la section correspondant aux angles d'Euler. Alors

$$((W_{\psi} \widehat{f})(\cdot, a, \theta'))(l, m) = (-1)^m \sqrt{\pi(2l+1)} \sum_{l' n'} e^{in' \theta'} \widehat{\psi}_a(l', n') \widehat{f}(l', n') \langle P_{m, -n'}^{l'} | P_{m0}^l \rangle,$$

où les coefficients $\langle P_{m, -n'}^{l'} | P_{m0}^l \rangle$ ont été définis à la proposition 7.1.

Démonstration. Soit $g_{a\theta'} = (W_{\psi} f)(\cdot, a, \theta')$.

$$\widehat{g_{a\theta'}} = \int_{S^2} d\eta \overline{Y_l^m(\eta)} \int_{S^2} d\eta' \overline{\psi_a([\eta], \theta')^{-1} \eta'} f(\eta'),$$

avec

$$\begin{aligned} \langle Y_{l'}^{m'} | U_{q\theta'}([\eta], \theta') \psi_a \rangle &= \langle Y_{l'}^{m'} | U_{q\theta'}([\eta]) R_{\theta'} \psi_a \rangle \\ &= \sum_{n'=-l'}^{l'} \mathcal{D}_{m'n'}^{l'}([\eta]) \langle Y_{l'}^{m'} | R_{\theta'} \psi_a \rangle \\ &= \sum_{n'=-l'}^{l'} \mathcal{D}_{m'n'}^{l'}([\eta]) e^{-in' \theta'} \widehat{\psi}(l', n'). \end{aligned}$$

En substituant, on obtient

$$\begin{aligned} \widehat{g_{a\theta'}}(l, m) &= \int_{S^2} d\eta \int_{S^2} d\eta' \overline{Y_l^m(\eta)} \sum_{l' m'} \overline{Y_{l'}^{m'}(\eta')} \sum_{n'} \overline{\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}([\eta])} \\ &\quad e^{in' \theta'} \widehat{\psi}_a(l', n') \sum_{l'' n''} Y_{l''}^{m''}(\eta') \widehat{f}(l'', n'') \\ &= \int_{S^2} d\eta \overline{Y_l^m(\eta)} \sum_{l' m' n'} \overline{\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}([\eta])} e^{in' \theta'} \widehat{\psi}_a(l', n') \widehat{f}(l', n') \\ &= \sqrt{\frac{2l+1}{4\pi}} \sum_{l' m' n'} e^{in' \theta'} \widehat{\psi}_a(l', n') \widehat{f}(l', n') \int_{S^2} d\eta \overline{\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}([\eta])} \mathcal{D}_{m0}^l([\eta]). \end{aligned}$$

Cette expression ne peut pas être simplifiée davantage, à moins que nous ne choissions une section $[\cdot]$ particulière. Pour les angles d'Euler, $[\eta] = (\alpha, \beta)$ et on calcule successivement

$$\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}(\alpha, \beta) = e^{-im\alpha} P_{m'n'}^{l'}(\cos \beta).$$

$$\int_{S^2} d\eta \overline{\mathcal{D}_{m'n'}^{l'}([\eta])} \mathcal{D}_{m0}^l([\eta]) = 2\pi \delta_{m', -m} \int_{-1}^1 dx \overline{P_{m'n'}^{l'}(x)} P_{m0}^l(x).$$

$$\begin{aligned}
\widehat{g_{a\theta'}}(l, m) &= \sqrt{\pi(2l+1)} \sum_{l'n'} e^{in'\theta'} \widehat{\psi}_a(l', n') \widehat{f}(l', n') \langle P_{m,-n'}^{l'} | \overline{P_{m0}^l} \rangle \\
&= (-1)^m \sqrt{\pi(2l+1)} \sum_{l'n'} e^{in'\theta'} \widehat{\psi}_a(l', n') \widehat{f}(l', n') \langle P_{m,-n'}^{l'} | P_{m0}^l \rangle
\end{aligned}$$

(pour les propriétés des fonctions spéciales P_{mn}^l , voir [39]).

□

Bibliographie

- [1] J. Abate, G. L. Choudhury, D. M. Lucantoni and W. Whitt, Asymptotic Analysis of Tail Probabilities Based on the Computation of Moments. *Annals of Applied Probability*, **5** (1995) 983-1007
- [2] S.T. Ali, Stochastic localization, quantum mechanics on phase space and quantum space-time, *Riv. Nuovo Cim.* **8** (1985) 1-128
- [3] S.T. Ali, J.P. Antoine, J.P. Gazeau, *Coherent States, Wavelets, and their Generalizations*. Springer-Verlag, New-York, 2000
- [4] J.P. Antoine, L. Jacques, P. Vandergheynst, Wavelets on the sphere : implementations and approximations, submitted to *Appl. Comput. Harmon. Anal.*
- [5] J.P. Antoine, R. Murenzi, P. Vandergheynst, Directional wavelets revisited : Cauchy wavelets and symmetry detection in patterns, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **6** (1999) 314-345
- [6] J.P. Antoine, P. Vandergheynst, Wavelets on the 2-sphere : A group-theoretical approach, *Appl. Comput. Harmon. Anal.* **7** (1999) 1-30
- [7] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, F. Laloë, *Mécanique quantique*, Tomes I et II, Hermann, Paris, 1973
- [8] S. Dahlke, P. Maass, The affine uncertainty principle in one and two dimensions. *Comp. Math. Appl.* **30** (1995) 293-305
- [9] F. Damiani, A. Maggio, G. Micela, S. Sciortino, A method based on wavelet transforms for source detection in photon-counting detector images. I. Theory and general properties, *Astroph. J.* **483** (1997) 350-369
- [10] F. Damiani, A. Maggio, G. Micela, S. Sciortino, A method based on wavelet transforms for source detection in photon-counting detector images. II. Application to *ROSAT* PSPC images, *Astroph. J.* **483** (1997) 370-389
- [11] I. Daubechies, *Ten Lectures on Wavelets*, SIAM, Philadelphia, 1992
- [12] D.D. Dixon, D.H. Hartmann, E.D. Kolaczyk, J. Samiani, R. Diehl, G. Kanbach, H. Mayer-Hasselwander, A.W. Strong, Evidence for a galactic γ -ray halo, *New Astronomy*, accepted for publication
- [13] Site internet officiel EGRET :
<http://coss.c.gsfc.nasa.gov/egret/>

- [14] W. Freeden, T. Gervens, M. Schreiner. *Constructive approximation on the sphere, with application to Geomathematics*, Clarendon Press, Oxford, 1997
- [15] R. Gallager, *Discrete Stochastic Processes*, Kluwer academic publishers, 1996
- [16] R.C. Hartman et al., The Third EGRET Catalog of High-Energy Gamma-Ray Sources, *Astroph. J. Suppl. Ser.* **123-1** (1999) 79-202
- [17] D.M. Healy Jr., D. Rockmore, S.S.B. Moore, FFT's for the 2-sphere - Improvements and variations, Techn. Report PCS-TR96-292, Dartmouth College, Hanover, NH, 1996
- [18] M. Holschneider, Continuous wavelet transforms on the sphere, *J. Math. Phys.* **37** (1996) 4156-4165
- [19] S.D. Hunter et al., EGRET observation of the diffuse gamma-ray emission from the galactic plane, *Astroph. J.* **481** (1997) 205-240
- [20] J.R. Klauder, Geometric quantization from a coherent state viewpoint, in *Quantization, Coherent States and Poisson Structures : Proceedings of the XIV workshop on Geometric Methods in Physics*, 59-72; A. Strasburger, S.T. Ali, J.P. Antoine, J.P. Gazeau, A. Odziejewicz (eds), Polish scientific publishers, Warszawa, 1998
- [21] E.D. Kolaczyk, D.D. Dixon, Nonparametric estimation of intensity maps using Haar wavelets and Poisson noise characteristics, *Astroph. J.* **534** (2000) 490-505.
- [22] S. Mallat, *A Wavelet Tour of Signal Processing*, 2nd ed. Academic Press, San Diego, 1999
- [23] J.R. Mattox et al., The likelihood analysis of EGRET data, *Astroph. J.* **461** (1996) 396-407
- [24] J. Mawhin, *Analyse : Fondements, techniques, évolution*, De Boeck Université, 1992
- [25] P.L. Nolan, GLAST Likelihood calculations, Draft 1 Nov 2000, Stanford University
- [26] R.D. Nowak, E.D. Kolaczyk, A statistical multiscale framework for Poisson inverse problems, *IEEE Trans. Info. Th.* **46** (2000) 1811-1825
- [27] J. Paul, P. Laurent, *Astronomie gamma spatiale*, Gordon and Breach Science publishers, Amsterdam, 1997
- [28] T. Paul, Functions analytic on the half-plane as quantum mechanical states, *J. Math. Phys.* **25** (1984) 3252-3263
- [29] M. Reed and B. Simon, *Methods of modern mathematical physics vol. 1 : Functional analysis*, Academic Press, 1980.
- [30] P. Singer, Uncertainty Inequalities for the Continuous Wavelet Transform, *IEEE Trans. Info. Th.* **45** (1999) 1039-1042
- [31] P. Sreekumar et al., EGRET observation of the extragalactic gamma-ray emission, *Astroph. J.* **494** (1998) 523-534
- [32] J.L. Starck, A. Bijaoui, L. Valtchanov, F. Murtagh, A combined approach for object detection and deconvolution, *Astron. Astroph. Suppl. Ser.* **147** (2000) 139-149

- [33] J.L. Starck, M. Pierre, Structure detection in low-intensity X-ray images, *Astron. Astroph. Suppl. Ser.* **128** (1998) 397-407
- [34] J.L. Starck, P. Querre, Multispectral Image Restoration by the Wavelet-Karhunen-Loeve Transform, submitted to *Signal Processing*, 2001
- [35] A. Tagliani, Inverse two-sided Laplace transform for probability density functions, *J. Comp. Appl. Math.* **90** (1998) 157-170
- [36] R. Terrier, L. Demanet, I. Grenier, J.P. Antoine, Wavelet analysis of EGRET data, submitted to Proceedings of the 27th International Cosmic Ray Conference, Hamburg, Germany, august 2001.
- [37] B. Torrèsani, *Analyse Continue par Ondelettes*, InterEditions/CNRS Editions, Paris, 1995
- [38] P. Vandergheynst, *Ondelettes directionnelles et ondelettes sur la sphère*, Thèse de doctorat, Univ. cath. Louvain, Louvain-la-Neuve, 1998
- [39] N.J. Vilenkin, *Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes*, Dunod, Paris, 1969
- [40] M. Willem, *Analyse harmonique réelle*, Hermann, Paris, 1995