Bevezetés a topológiába

10. gyakorlat, 2009. április 22.

Vértesi Vera <wera@szit.bme.hu>

http://www.szit.bme.hu/~wera

1. Egy $f : X \to Y$ leképezés indukál egy $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ homomorfizmust.
2. Biyonyítsd be, hogy ha $f : X \to Y$ homeomorfizmus, akkor $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ izomorfizmus.

Def: Az $A \subseteq X$ tér *retraktuma* X-nek, ha van A-n konstans $r\colon X \to A$ folytonos leképezés, ekkor r retrakció.

3. Legyen $x_0 \in A$, bizonyítsd be, hogy ha A retraktuma X-nek, akkor $r_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(A, x_0)$ szürjektív.

Def: Az $f\colon X \to Y$ leképezés *homotopikus ekvivalencia*, ha van $g\colon Y \to X$ leképezés, melyre $g \circ f$ homotóp id_X-szel, és $f \circ g$ homotóp id_Y-nal. Ekkor az X és Y terek *homotópikusan ekvivalensek*.

4. Igaz-e, hogy homotópikusan ekvivalans terek homeomorfak? Hát fordítva?
5. Legyen $f : X \to Y$ homotópikus ekvivalencia, bizonyítsd be, hogy $f_* : \pi_1(X, x_0) \to \pi_1(Y, f(x_0))$ izomorfizmus.
6. Mi $\pi_1(S^1, (0, 1))$?
7. Mi a 8-as fundamentális csoportja?
8. $S^1 = \{(x, y, 0); x^2 + y^2 = 1\} \subseteq \mathbb{R}^3$. Mi $\pi_1(\mathbb{R}^3 - S^1, (0, 0, 0))$?
9. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ konvex halmazra $\pi_1(A) = 1$. (kezdőponttól függetlenül)
10. $A \subseteq \mathbb{R}^n$ csillagszerű, ha van $a \in A$, mely A minden pontjával A-beli szakasszal összeköthető. Bizonyítsd be, hogy $\pi_1(A) = 1$. (kezdőponttól függetlenül).