Bevezetés a topológiába

3. gyakorlat, 2009. február 25.

Vértesi Vera <wera@szit.bme.hu>

http://www.szit.bme.hu/~wera

1. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf az A_p felülten, mely l (egyszeresen összefüggő) tartományra osztja fel A_p-t. A Poincaré–Hopf tétel felhasználásával bizonyítsd be, hogy $|V| + l - |E| = 2 - 2p$.

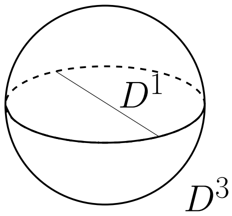
Az előadásról:

2. Metrikus tér alterén indukált topológia megegyezik az altérre megszorított metrika által indukálttal.
3. Igaz-e metrikus térben, hogy ...
   (a) egy nyílt golyó lezárása megegyezik a megfelelő zárt golyóval?
   (b) golyók hatara éppen a megfelelő gömb?
4. Bármely részhalmazrendszer lehet előbázisa egy topológiának.
5. **Kuratowski Tétel**: Egy X halmazon egy $f : \mathcal{P}(X) \to \mathcal{P}(X)$ függvényhez, melyre
   (i) $f(\emptyset) = \emptyset$;
   (ii) $A \subseteq f(A)$;
   (iii) $f(f(A)) = f(A)$;
   (iv) $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.

   Egyértelműen létezik Ω topológia, melyre f a lezárás-operátor.
6. Melyek a (nem homeomorf) topológiák az $\{1, 2, 3\}$ halmazon?
7. Legyen $|X| = \infty$, és definiáljuk: $\Omega = \{A \subset X : |X \setminus A| < \infty \text{ vagy } A = \emptyset\}$. Bizonyítsd be, hogy:
   (a) (X, Ω) topológia;
   (b) bármely két nemüres nyílt metszete nemüres;
   (c) minden végtelen halmaz lezárása X;
   (d) (X, Ω) T_1-tér (azaz $\forall x, y \in X : \exists U \in \Omega$ hogy $x \in U, y \notin U$);
   (e) (X, Λ) T_1-tér $\Rightarrow \Omega \subset \Lambda$.
8. X halmaz, $\{\Omega_\alpha : \alpha \in A\}$ topológiák egy halmaza. Topológia-e $\cup\Omega_\alpha$, $\cap\Omega_\alpha$?
9. $X = \mathbb{R}^2$. Előbázis= {egyenesek}. Mi ez a topológia?
10. Tetszőleges $A \subset X$-re mi a köze ∂A-nak $\partial\partial\partial A$-hoz?

11. Mutassunk olyan Ω topológiát $\mathbb{R}$-en, melyre
    (a) f (Ω, Ω)-folytonos $\iff$ f monoton nő;
    (b) f (ε, Ω)-folytonos x_0-ban $\iff$ f-nek lokális maximuma van x_0-ban.
12. Legyen $G = (V, E)$ egy gráf az A_p felülten, mely l (egyszeresen összefüggő) tartományra osztja fel A_p-t. A Poincaré–Hopf tétel felhasználásával bizonyítsd be, hogy $|V| + l - |E| = 2p - 2$.

Egy kis csomóelmélet Az $\mathbb{R}^3$(vagy S^3) tér egy S^1-gyel homeomorf K részét *csomónak* nevezzük. Egy csomó *szelíd*, ha minden pontjának van olyan U környezete, mely a (D^3, D^1) térpárral homeomorf:



13. Mutass nem szelíd, azaz *vad* csomót!

A csomók legegyszerűbben egy síkvetületükkel adhatóak meg:

Két csomót K-t és K'-t ekvivalensnek tekintek, ha az egyik átdeformálható a másikba, azaz létezik $\mathbb{R}^3$ homeomorfizmusainak egy útja: $\varphi_t : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, melyre $\varphi_0 = id$ és $\varphi_1(K) = K'$.

14. A fenti csomók közül melyek ekvivalensek?
15. Mutass a síkvetületeken olyan lokális műveleteket, melyek ekvivalenciát indukálnak az ábrázolt csomókon!