

Mouvement brownien plan au travers d'une membrane semi-perméable

Stéphane Benoist

11 Février 2010

Ce texte est la conséquence d'une question que m'a posée Wendelin Werner, dans le cadre de mon mémoire de Master 2. Je tiens à le remercier pour ses questions mathématiques, pour sa disponibilité, ainsi que pour les idées qu'il m'a transmises - dont une partie forment le coeur de ce texte.

Table des matières

1	Introduction	2
2	Les grandes lignes du texte	3
2.1	Quelques résultats classiques pour commencer	3
2.2	Sur la construction des mouvements browniens semi-réfléchis	4
2.3	Sur l'hypothèse de régularité de la courbe \mathcal{C}	5
3	Quelques résultats préliminaires	6
3.1	De la décomposition en excursions du mouvement brownien unidimensionnel . . .	6
3.2	Du calcul stochastique	7
3.3	De l'invariance conforme du mouvement brownien plan	8
3.4	De la mesure des excursions browniennes bidimensionnelles	9
4	Construction des mouvements browniens semi-réfléchis	12

1 Introduction

Tout ce texte tourne autour de la question suivante sur le mouvement brownien plan : étant donné une courbe \mathcal{C} de \mathbb{C} séparant le plan en deux composantes connexes, on aimerait comprendre comment le mouvement brownien se comporte vis à vis de la courbe \mathcal{C} . Plus précisément, on peut découper toute trajectoire du mouvement brownien plan en un ensemble dénombrable d'excursions hors de la courbe \mathcal{C} . On aimerait comprendre la loi de cette famille d'excursions.

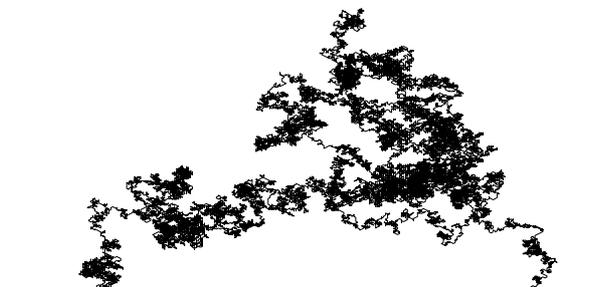


FIGURE 1 – Une excursion du mouvement brownien plan hors de la droite réelle

L'idée est de choisir une famille d'excursions selon une bonne loi, et de coller intelligemment ces excursions sur la courbe \mathcal{C} pour obtenir le mouvement brownien plan. On peut, en fait, utiliser le même procédé pour construire d'autres processus intéressants. Par exemple, on peut biaiser un peu le collage des excursions pour donner plus ou moins d'importance aux excursions qui s'aventurent vers l'intérieur par rapport à celles qui s'aventurent vers l'extérieur, et ainsi construire toute une famille de processus, indexés par $p \in [0, 1]$, qui se comportent comme un mouvement brownien hors de la courbe \mathcal{C} , et qui, à chaque contact avec la courbe \mathcal{C} , s'aventurent vers l'extérieur avec probabilité p et vers l'intérieur avec probabilité $1 - p$. Ces "mouvements browniens

semi-réfléchis" peuvent modéliser la trajectoire d'une particule au travers d'une membrane semi-perméable, c'est-à-dire au travers d'un matériau laissant plus facilement passer la particule dans un sens que dans l'autre.

On se propose ici de construire ces mouvements browniens semi-réfléchis lorsque \mathcal{C} est une courbe de Jordan lisse. Il n'y a - il faut bien le dire - pas de "vrai" résultat dans ce texte, au sens où presque toutes les bonnes propriétés que les mouvements browniens semi-réfléchis devraient vérifier pour pleinement mériter leur nom n'ont pas été abordées pour l'instant.

Quelles sont ces propriétés ? On voudrait que ces mouvements browniens semi-réfléchis soient une famille de processus de Markov (c'est heuristiquement évident), évoluant selon la géométrie locale (ce qui ne sera pas démontré ici, la manière dont on les construira utilisant la géométrie globale de la courbe), se comportant comme le mouvement brownien hors de \mathcal{C} (conséquence aisée de la construction), biaisés au contact de la courbe selon le paramètre p (en choisissant une bonne définition de cette propriété, c'est une conséquence de la construction) et ne se déplaçant pas le long de la courbe \mathcal{C} (ce qui reste à démontrer).

Enfin, on aimerait que ces processus interpolent entre des mouvements browniens réfléchis, pour $p = 0$ et $p = 1$ (ce qui semble vrai), et le mouvement brownien standard, pour $p = 1/2$ (ce qui reste à démontrer) - ce qui nous donnerait, entre autre, la décomposition du mouvement brownien plan en excursions hors de la courbe \mathcal{C} , ce que l'on souhaitait obtenir.

L'intérêt porté aux excursions du mouvement brownien dans des domaines de \mathbb{R}^n n'est pas quelque chose de nouveau. Pour quelques références - datant d'une vingtaine d'années, on pourra aller voir par exemple les ouvrages de Burdzy [1], de Doob [2] et de Port et Stone [3]. Mettons l'accent sur la particularité de l'approche que l'on suivra ici : on travaille dans le cas spécial de la dimension 2 - pour avoir la propriété supplémentaire d'invariance conforme du mouvement brownien - et on essaie de comprendre comment le mouvement brownien passe d'un domaine conforme (l'intérieur de la courbe) à un autre (l'extérieur de la courbe). En conséquence, cette approche est liée à certains problèmes d'analyse complexe où l'on cherche à coller deux structures complexes le long d'une certaine courbe, ou à l'aide d'un certain difféomorphisme du cercle.

2 Les grandes lignes du texte

Présentons maintenant la structure du texte, ainsi que les grandes lignes de la construction des mouvements browniens semi-réfléchis.

2.1 Quelques résultats classiques pour commencer

Nous commencerons en douceur par quelques résultats classiques, qui forment le cadre dans lequel se place la question de la décomposition du mouvement brownien plan en excursions hors d'une certaine courbe de Jordan \mathcal{C} .

Tout d'abord, sera présentée la décomposition d'Itô du mouvement brownien unidimensionnel en excursions hors de 0 : il existe une mesure ν sur les excursions hors de 0, de telle sorte que l'on obtienne un mouvement brownien en tirant une famille d'excursions $(e_t, t \geq 0)$ selon cette mesure ν et en mettant bout à bout ces excursions.

A noter que la mesure ν n'est pas de probabilité : elle est de masse infinie. Cela résulte du fait que, lorsque le mouvement brownien unidimensionnel touche 0, il effectue toujours une infinité

d'excursions microscopiques hors de 0 avant sa première excursion macroscopique. Pour rendre compte de ce phénomène, la mesure ν des excursions browniennes hors de 0 doit attribuer un poids infini à l'ensemble des petites excursions - quelle que soit la définition de *petite*.

Une fois ce résultat unidimensionnel expliqué, on cherchera à définir - pour tout domaine ouvert D du plan, et tout point x de son bord - ce qu'est une excursion du mouvement brownien plan partant de x à l'intérieur de D . Pour cela, on commencera par rappeler l'invariance conforme du mouvement brownien plan à l'aide de quelques résultats de calcul stochastique. Cette propriété géométrique d'invariance du mouvement brownien nous permettra alors de définir une mesure sur les excursions browniennes planes partant de x dans D , en s'inspirant du cas unidimensionnel.

2.2 Sur la construction des mouvements browniens semi-réfléchis

On pourra alors s'attaquer à la construction des mouvements browniens semi-réfléchis, en s'inspirant, encore une fois, de la décomposition d'Itô.

Considérons une courbe de Jordan \mathcal{C} séparant le plan complexe en deux domaines simplement connexes : l'intérieur de la courbe, D^i , et son extérieur, D^e . Comme conséquence de l'invariance conforme du mouvement brownien plan, on peut, en choisissant des applications conformes adéquates, envoyer des excursions partant de 0 dans le demi-plan supérieur \mathbb{H} vers des excursions dans D^i , ou dans D^e , partant de n'importe quel point x de leur bord \mathcal{C} . Fixons donc, pour tout point $x \in \mathcal{C}$, deux telles applications conformes Φ_x^i et Φ_x^e .

Tirons alors, selon la mesure des excursions browniennes, deux familles d'excursions partant de 0 dans \mathbb{H} , indexées par les temps positifs $t \in \mathbb{R}^+$: l'une servira pour les excursions intérieures, l'autre, pour les extérieures.

Peut-on mettre brutalement bout à bout ces excursions, en les collant sur \mathcal{C} à l'aide des applications conformes choisies, et obtenir quelque chose d'intéressant ?

1) Il faudra réfléchir un peu en collant les excursions si l'on ne veut pas que la géométrie propre de la courbe induise un biais.

2) De plus, il faudra montrer qu'un objet ainsi défini fait sens : comme conséquence du fait que la mesure sur les excursions browniennes donne un poids infini aux excursions microscopiques, il faut réussir à coller pendant un temps fini une infinité de toutes petites excursions.

Sur le premier point : si l'on colle les excursions brutalement, on n'a aucune chance d'obtenir le mouvement brownien (qui n'a pas de biais vis à vis de la distinction intérieur/extérieur). En effet, au voisinage d'un point x de la courbe, les applications de recollement Φ_x^i et Φ_x^e n'ont pas forcément même dérivée, et donc ne dilatent pas l'espace de la même manière. Si l'extérieur est conformé plus accessible que l'intérieur, les excursions que l'on va coller vers l'intérieur apparaîtront trop grosses relativement aux excursions collées vers l'extérieur. Il faut donc, pour qu'au final le processus soit symétrique intérieur/extérieur, corriger la taille des excursions extérieures par rapport à celle des excursions intérieures, par un facteur qui est le rapport des dérivées des applications conformes utilisées au point x d'attachement : $|\Phi_x^{i'}(x)|/|\Phi_x^{e'}(x)|$.

Pour construire un mouvement brownien semi-réfléchi, ayant une probabilité $p \leq 1/2$ de repartir vers l'extérieur à chaque contact avec la courbe, il faudra s'arranger pour mettre plus d'excursions intérieures que d'extérieures, ce qui est équivalent - au vu des propriétés d'invariance de la mesure sur les excursions browniennes - à rendre les excursions intérieures plus grosses que les excursions extérieures. On pourra donc, en plus de la correction déjà nécessaire pour gommer

la géométrie de la courbe, dilater les excursions extérieures par rapport aux intérieures d'un facteur $p/(1-p)$.

Quant au deuxième point, comment donner un sens au fait de coller une infinité d'excursions ? On va procéder comme suit : il n'y a, pendant un temps fini, qu'un nombre fini d'excursions macroscopiques (de taille disons supérieure à $\delta > 0$) à coller. Une fois une échelle de coupure δ choisie, on peut très bien mettre bout à bout les excursions de taille supérieure à δ . La question est alors de savoir si la famille de processus ainsi obtenue converge lorsque l'échelle de coupure δ tend vers 0. Pour montrer cette convergence, il suffit d'étudier le processus des points de départ des excursions : en effet, si ce processus de positions sur la courbe converge (c'est-à-dire si les petites excursions ne font pas se déplacer macroscopiquement les points de contacts du processus et de la courbe), alors le processus tout entier va bien converger (la seule donnée nécessaire pour coller une excursion est de savoir quel point de départ on veut lui donner, c'est-à-dire en quel point de la courbe le processus se situe au temps considéré).

On choisit d'étudier ces processus de positions - qui sont des processus de sauts - en paramétrant le bord de la courbe vu de l'intérieur. Les sauts intérieurs sont alors bien symétriques. Ce n'est pas le cas des sauts extérieurs : la mesure des sauts extérieurs, vue de l'intérieur, sera symétrique au premier ordre seulement. Il faut donc ajouter au terme symétrique une correction d'ordre 2. On est ainsi amené à faire du calcul stochastique (à la main) sur des processus càdlàg : les processus de positions sur la courbe sont en effet sommes d'un terme symétrique - martingale - et d'un terme d'ordre supérieur - à variation finie.

2.3 Sur l'hypothèse de régularité de la courbe \mathcal{C}

On peut se demander ce que devient la construction décrite précédemment lorsque l'on découpe le plan complexe en deux domaines dont le bord est moins régulier. Prenons l'exemple du peigne : soit un domaine rectangulaire. En ôtant de ce domaine des bandes verticales attachées alternativement par le haut et par le bas, et de largeur de plus en plus fine à mesure qu'on s'approche du bord droit du rectangle, il est possible d'obtenir un domaine ouvert dit peigne - plongé dans le plan complexe - dont le bord droit est un segment de droite pour le plongement choisi, mais qui est conformément inaccessible de l'intérieur : tout le bord droit du peigne correspond - vu de l'intérieur - à un unique point du bord.

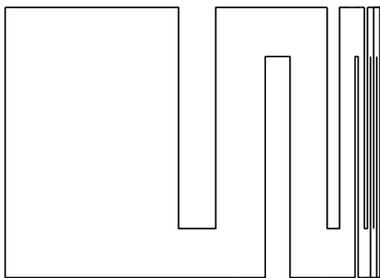


FIGURE 2 – Le peigne

Un mouvement brownien lancé dans \mathbb{C} va presque sûrement toucher ce segment de droite. Le point du bord correspondant, vu de l'intérieur, joue donc un rôle privilégié, et dont il faudrait rendre compte si l'on veut obtenir une décomposition du mouvement brownien en excursions pour ce type de domaines.

3 Quelques résultats préliminaires

3.1 De la décomposition en excursions du mouvement brownien unidimensionnel

On cherche à définir une mesure qui représenterait les excursions du mouvement brownien unidimensionnel hors de 0.

Posons E l'ensemble des fonctions f continues définies sur \mathbb{R} et à valeurs dans \mathbb{R} , telles qu'il existe un temps $t = \eta(f)$ tel que f soit nulle hors de $]0, t[$, et ne s'annule pas sur $]0, t[$. On pose alors pour tout réel $\epsilon > 0$, E_ϵ le sous-espace de E constitué des fonctions f telle que le supremum de $|f|$ soit supérieur à ϵ . Notons que si $\epsilon' < \epsilon$, alors $E_\epsilon \subset E_{\epsilon'}$, et de plus, en notant 0 la fonction identiquement nulle, on a :

$$E = \bigcup_{\epsilon > 0} E_\epsilon \cup \{0\}$$

Considérons alors un mouvement brownien unidimensionnel B_t . Cela va nous permettre de définir une mesure de probabilité naturelle sur les excursions de taille supérieure à ϵ : soit T le premier temps où $|B_t|$ atteint la valeur ϵ , on associe alors à cette trajectoire du mouvement brownien son excursion hors de 0 contenant le temps T . On a construit une variable aléatoire à valeurs dans E_ϵ , c'est-à-dire une mesure de probabilité ν_ϵ sur E_ϵ .

Par construction, une variable aléatoire f de loi $\nu_{\epsilon'}$ conditionnée à être dans E_ϵ , est distribuée selon la loi ν_ϵ . Posons nous alors la question suivante : soit $\epsilon' < \epsilon$ deux réels strictement positifs, quelle est, pour $\nu_{\epsilon'}$, la mesure de E_ϵ . Ceci se reformule ainsi : quelle est la probabilité que le mouvement brownien lancé de ϵ' touche ϵ avant 0. Notons T le temps de sortie de l'intervalle $[0, \epsilon]$ d'un mouvement brownien B_t lancé de $B_0 = \epsilon'$. En utilisant la propriété de martingale du mouvement brownien (et donc la conservation de sa moyenne) :

$$\epsilon' = \mathbb{E}[B_0] = \mathbb{E}[B_T] = \epsilon \mathbb{P}(B_T = \epsilon) + 0 \mathbb{P}(B_T = 0)$$

Ainsi, on a la relation $\nu_{\epsilon'}(E_\epsilon) = \epsilon'/\epsilon$. La famille de mesure $((1/\epsilon)\nu_\epsilon, \epsilon > 0)$ est donc croissante, et admet en conséquence pour limite une certaine mesure ν sur E , de masse infinie. Il y a une certaine indétermination sur ν : sa masse étant infinie, on peut la multiplier par un réel positif sans changer ses propriétés caractéristiques. On appellera néanmoins ν la mesure des excursions browniennes (unidimensionnelles).

On cherche maintenant à reconstruire le mouvement brownien à partir de cette mesure ν sur les excursions hors de 0. Rappelons ce qu'est un processus ponctuel de Poisson. Tout d'abord, une mesure aléatoire de Poisson M sur $E \times \mathbb{R}^+$ d'intensité $\nu \otimes dt$ est une mesure aléatoire sur $E \times \mathbb{R}^+$ qui vérifie les deux propriétés suivantes. Premièrement, si \mathcal{A} est un borélien de $E \times \mathbb{R}^+$, de mesure $\nu \otimes dt(\mathcal{A})$ finie, alors $M(\mathcal{A})$ suit une loi de Poisson de paramètre $\nu \otimes dt(\mathcal{A})$. Deuxièmement, on souhaite que, si \mathcal{A} et \mathcal{A}' sont deux boréliens disjoints, alors les variables aléatoires $M(\mathcal{A})$ et $M(\mathcal{A}')$ soient indépendantes. On peut montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}^+$, on a $M(E \times \{t\}) \in \{0, 1\}$. Si $M(E \times \{t\}) = 1$, on note alors e_t l'unique excursion e telle que $M(\{e\} \times \{t\}) = 1$. Dans le cas où $M(E \times \{t\}) = 0$, on pose $e_t = 0$, l'excursion nulle.

On a construit ce qu'on appelle un processus ponctuel de Poisson d'intensité ν : une famille aléatoire d'excursions $(e_t, t \geq 0)$, dont les éléments sont, en un certain sens, distribués selon ν .

On va pouvoir construire le mouvement brownien à partir de ce processus d'excursions. Pour $s \in \mathbb{R}^+$, posons :

$$t(s) = \inf\{t \geq 0 \mid \sum_{u \leq t} \eta(e_u) \geq s\}$$

La proposition suivante est la décomposition d'Itô du mouvement brownien en excursions.

Proposition 3.1. *Le processus indexé par \mathbb{R}^+ défini comme suit :*

$$X_s = e_{t(s)}(s - \sum_{u < t(s)} \eta(e_u))$$

est un mouvement Brownien standard.

Il est de plus possible de retrouver $t(s)$ à partir de $(X_s, s \geq 0)$: $t(s) = L_s$, où L_s est le temps local en 0 :

$$L_s = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\epsilon} \int_0^s 1_{|X_u| < \epsilon} du$$

La preuve de cette proposition se fait usuellement à rebours : on part d'une réalisation du mouvement brownien, on lui associe la famille aléatoire de ses excursions en les indexant par le temps local en 0 auquel elles débutent, et on montre que cette famille vérifie les propriétés voulues pour être un processus ponctuel de Poisson d'intensité ν .

On renvoie à l'ouvrage de Daniel Revuz et Marc Yor [4] pour plus de détails sur ce résultat - et en particulier au chapitre XII intitulé "Excursions".

3.2 Du calcul stochastique

Quelques mots rapides sur la théorie du calcul stochastique - dont la preuve s'inspire - ainsi que quelques résultats qui nous serviront pour montrer l'invariance conforme du mouvement brownien plan. En référence plus sérieuse, on pourra - avec profit - consulter les notes de cours de Jean-François Le Gall [5].

Le calcul stochastique est l'étude d'une certaine classe de processus continus, que l'on nomme semimartingales continues. Ce sont les processus pouvant se décomposer de la manière suivante

$$X_t = M_t + A_t$$

où M_t est une martingale locale, c'est à dire un processus évoluant toujours sans biais (à peu de choses près on a la propriété de martingale classique : pour $s < t$, $\mathbb{E}[M_t | \mathcal{F}_s] = M_s$), et où A_t est un processus à variation finie : c'est-à-dire tel que, pour tout t , la variation totale de $(A_s, 0 \leq s \leq t)$ soit presque sûrement finie :

$$\sup_{0 \leq t_1 < t_2 < \dots < t_n \leq t} \sum_{1 \leq i < n} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}| < \infty \text{ p.s.}$$

A noter que la décomposition d'une semimartingale continue en une partie martingale locale et une partie à variation finie est toujours non-ambigüe. On rappelle que l'exemple type de martingale (locale) est le mouvement brownien, qui n'est pas à variation finie - conséquence de sa propriété de changement d'échelle.

A toute martingale locale M_t , on peut associer un processus à variation finie, que l'on note $\langle M_t, M_t \rangle$, et nommé sa variation quadratique. C'est l'unique processus croissant A_t tel que $M_t^2 - A_t$ soit une martingale. Dans le cas où la martingale considérée est le mouvement brownien standard, on a $\langle B_t, B_t \rangle = t$. En fait, si M_t est une martingale locale, alors il existe toujours un mouvement brownien B_s tel que $M_t = B_{\langle M_t, M_t \rangle}$.

Pour finir, rappelons la formule d'Itô.

Proposition 3.2. *Soit $X_t = M_t + A_t$ une semimartingale continue, et f une fonction C^2 de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Alors $f(X_t)$ est une semi-martingale continue, et l'on connaît sa décomposition :*

$$df(X_t) = f'(X_t)dM_t + \left[\frac{1}{2}f''(X_t)d\langle M_t, M_t \rangle + f'(X_t)dA_t \right]$$

Cette formule se généralise pour des fonctions à plusieurs variables, et elle permet de montrer la jolie propriété suivante sur le mouvement brownien bidimensionnel.

3.3 De l'invariance conforme du mouvement brownien plan

Soit D et D' deux domaines ouverts du plan complexe, et $\Phi : D \rightarrow D'$ une application conforme non constante. Quitte à translater, on peut supposer en toute généralité que $0 \in D$ et que $\Phi(0) = 0$. Soit $(B_t, t \geq 0)$ un mouvement brownien plan partant de 0 et arrêté au temps de sortie du domaine D . La propriété d'invariance conforme du mouvement brownien - due à Paul Lévy - s'énonce comme suit.

Proposition 3.3. *Il existe une reparamétrisation $t(s)$ telle que $(\Phi(B_{t(s)}), s \geq 0)$ soit un mouvement brownien plan partant de 0 arrêté au temps de sortie de D' .*

Cette reparamétrisation est donnée par $s(t) = \int_0^t |\Phi'(B_u)|^2 du$.

La reparamétrisation temporelle est une conséquence de l'invariance par changement d'échelle du mouvement brownien : lorsqu'on dilate en espace par λ , il faut dilater le temps par λ^2 . Ici, on a localement une dilatation spatiale d'un facteur $\lambda = |\Phi'(B_u)|$, et donc un temps infinitésimal du passé dans D doit correspondre à un temps $|\Phi'(B_u)|^2 du$ dans D' .

La démonstration de la propriété d'invariance conforme est une conséquence élémentaire de la théorie du calcul stochastique, et utilise intensivement la formule d'Itô.

Preuve. Ecrivons en coordonnées notre application conforme : $\Phi(x + iy) = (f(x, y), g(x, y))$. On a alors que f et g vérifient les relations de Cauchy-Riemann :

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= -\frac{\partial g}{\partial x} \end{aligned}$$

Décomposons le mouvement brownien en partie réelle et partie imaginaire : $B_t = B_t^1 + iB_t^2$. Le but est de montrer que $f(B_{t(s)})$ et $g(B_{t(s)})$ sont deux mouvements browniens unidimensionnels indépendants, où $t(s)$ est la reparamétrisation définie plus haut.

Montrons tout d'abord que $f(B_t)$ est une martingale locale. La formule d'Itô donne :

$$d(f(B_t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t)dB_t^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(B_t)dB_t^2 + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(B_t) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(B_t) \right] dt$$

car $d\langle B_t^1, B_t^2 \rangle = 0$ par indépendance.

Or, en différenciant habilement les relations de Cauchy-Riemann :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

Ainsi le terme à variation finie se simplifie :

$$d(f(B_t)) = \frac{\partial f}{\partial x}(B_t)dB_t^1 + \frac{\partial f}{\partial y}(B_t)dB_t^2$$

De même, $g(B_t)$ est une martingale locale :

$$d(g(B_t)) = \frac{\partial g}{\partial x}(B_t)dB_t^1 + \frac{\partial g}{\partial y}(B_t)dB_t^2$$

Comme toutes martingales locales, $f(B_t)$ et $g(B_t)$ ont la loi de mouvements browniens reparamétrés en temps par leurs variations quadratiques. Montrons donc que ces variations quadratiques sont les mêmes. C'est encore une conséquence des relations de Cauchy-Riemann :

$$d\langle f(B_t), f(B_t) \rangle = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(B_t)^2 + \frac{\partial f}{\partial y}(B_t)^2 \right] dt = |\Phi'(B_t)|^2 dt = \left[\frac{\partial g}{\partial y}(B_t)^2 + \frac{\partial g}{\partial x}(B_t)^2 \right] dt = d\langle g(B_t), g(B_t) \rangle$$

Ainsi, $f(B_{t(s)})$ et $g(B_{t(s)})$ sont deux mouvements browniens unidimensionnels. Reste à montrer qu'ils sont indépendants, fait résultant - à nouveau - des relations de Cauchy-Riemann :

$$d\langle f(B_t), g(B_t) \rangle = \left[\frac{\partial f}{\partial x}(B_t) \frac{\partial g}{\partial x}(B_t) + \frac{\partial f}{\partial y}(B_t) \frac{\partial g}{\partial x}(B_t) \right] dt = 0$$

Ce qui conclut la preuve de l'invariance conforme du mouvement brownien plan. ■

3.4 De la mesure des excursions browniennes bidimensionnelles

Etant donné un domaine ouvert D simplement connexe du plan complexe à bord régulier, et un point x sur son bord, on cherche à définir une mesure qui représenterait les excursions du mouvement brownien dans D partant du point x .

Par invariance conforme du mouvement brownien, il suffit de construire cette mesure dans le demi-plan supérieur \mathbb{H} , en faisant partir les excursions de 0.

Lançons donc un mouvement brownien bidimensionnel dans \mathbb{C} du point 0. Il est facile de construire, comme dans le cas unidimensionnel, une mesure de probabilité sur l'espace F_ϵ des excursions s'aventurant au-delà de la ligne $\Re(z) = \epsilon > 0$. Soit T le premier temps où $\Im(B_t)$ atteint la valeur ϵ , on associe alors à cette trajectoire du brownien son excursion du mouvement brownien hors de la droite réelle contenant le temps T , et translatée du réel adéquat de telle sorte que son point de départ soit 0. On obtient une mesure de probabilités μ_ϵ sur certaines trajectoires bidimensionnelles. Les parties réelles et imaginaires d'un mouvement brownien plan

étant indépendantes, on se convainc qu'une trajectoire aléatoire $E_t = (B_t, e_t)$ de loi μ_ϵ a la structure suivante : e_t a la loi d'une excursion brownienne unidimensionnelle conditionnée à être positive et de taille supérieure à ϵ , B_t est un mouvement brownien unidimensionnel arrêté au temps $\eta(e_t)$, et B_t et e_t sont indépendants - jusqu'au temps de retour $\eta(e_t)$.

La mesure μ sur les excursions browniennes bidimensionnelles se construit alors comme à une dimension, en considérant la limite des mesures $\frac{1}{\epsilon}\mu_\epsilon$ lorsque ϵ tend vers 0.

On souhaite maintenant calculer la mesure m sur $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ représentant le point de sortie des excursions browniennes, c'est-à-dire la mesure m , image de μ par l'application qui à une excursion associe son point de sortie de \mathbb{H} .

Avant toute chose, notons, par exemple comme conséquence du fait que le mouvement brownien plan évite les points, que la mesure m ne charge pas les points. En particulier, $m(\{\infty\}) = 0$, et on peut donc identifier m à sa restriction à \mathbb{R} .

On va montrer le résultat suivant sur la mesure m .

Proposition 3.4. *Quitte à changer la normalisation de la mesure μ des excursions browniennes bidimensionnelles, la mesure m de leur point de sortie vérifie :*

$$m(dy) = \frac{dy}{y^2}$$

Preuve. Le mouvement brownien - et donc les excursions browniennes - sont invariants par les applications conformes. Si λ est un réel strictement positif, on note D_λ l'automorphisme conforme de \mathbb{H} qui agit par dilatation d'un facteur λ . La propriété d'invariance conforme s'énonce alors comme suit : il existe un réel strictement positif α_λ tel que $D_\lambda^*\mu = \alpha_\lambda\mu$. On peut calculer facilement ce coefficient α_λ . En effet, la mesure μ a été construite de telle sorte que $\mu(F_\epsilon) = 1/\epsilon$.

Ainsi, $D_\lambda^*\mu(F_\epsilon) = \mu(F_{\frac{\epsilon}{\lambda}}) = \lambda/\epsilon = \lambda\mu(F_\epsilon)$. Et donc, $\alpha_\lambda = \lambda$.

Ce qui implique la même propriété de changement d'échelle sur la mesure m : on a $D_\lambda^*m = \lambda m$. En particulier, si a est un réel strictement positif, $m([a, +\infty[) = \lambda m([\lambda a, +\infty[)$.

Moyennant un petit détail, on peut alors conclure. Énonçons d'abord le détail sous la commode forme d'un lemme :

Lemme 3.5. *La mesure m vérifie le fait suivant : $m([1, +\infty[) < \infty$*

Le résultat en découle : il est évident que $m([1, +\infty[) > 0$. Quitte à multiplier par un scalaire, on peut donc supposer que $m([1, +\infty[) = 1$. Or, pour tout réel strictement positif a , on a l'égalité suivante :

$$m([a, +\infty[) = \frac{1}{a}m([1, +\infty[) = \frac{1}{a}$$

On a en quelque sorte la fonction de répartition de m sur \mathbb{R}^+ . Ce qui suffit pour montrer que sur \mathbb{R}^+ , m coïncide avec un multiple de la mesure dy/y^2 .

Le problème étant invariant sous la symétrie $x + iy \mapsto -x + iy$, on conclut sur \mathbb{R} tout entier que m est proportionnelle à la mesure dy/y^2 . ■

Attaquons-nous maintenant au lemme qui assure la finitude - en un certain sens - de la mesure m .

Preuve du Lemme. Le but est de montrer que, bien que la mesure sur les excursions browniennes soit infinie, seul un poids fini d'entre elles s'éloignent macroscopiquement de 0. Pour cela, on va essayer d'obtenir une estimée sur le déplacement horizontal d'une excursion dont la taille verticale est supérieure à ϵ .

Etant donnée une excursion aléatoire $(E_t, t \geq 0)$ distribuée sous la loi μ_ϵ , considérons les deux variables aléatoires suivantes : son temps de vie, $T_\epsilon = \eta(E)$, ainsi que son déplacement horizontal $H_\epsilon = \Re(E_{\eta(E)})$. Conditionnellement à T_ϵ , la variable aléatoire H_ϵ est une gaussienne de variance T_ϵ .

Couplons T_ϵ avec une variable aléatoire \tilde{T}_ϵ , de telle sorte que $\tilde{T}_\epsilon \geq T_\epsilon$ presque sûrement. En considérant une variable aléatoire X_ϵ qui soit conditionnellement à \tilde{T}_ϵ une gaussienne de variance \tilde{T}_ϵ , l'inégalité suivante aura lieu :

$$\mathbb{P}[H_\epsilon \geq 1] \leq \mathbb{P}[X_\epsilon \geq 1]$$

Le lemme découlera alors d'une estimée sur les variables aléatoires X_ϵ .

Le couplage entre T_ϵ et \tilde{T}_ϵ se réalise de la manière suivante : faisons évoluer un mouvement brownien B_t partant de 0 dans le plan. On le couple avec un autre mouvement brownien \tilde{B}_t comme suit : $B_t = \tilde{B}_t$ jusqu'au premier temps où $\Im(B_t)$ atteint la valeur ϵ . Après ce temps, on laisse \tilde{B}_t évoluer symétriquement à B_t , en posant $\tilde{B}_t = i\epsilon - B_t$. On définit alors \tilde{T}_ϵ le premier temps où $\Im(B_t)$ atteint la valeur 2ϵ . Ce temps correspond pour B_t à la fin de la première excursion de taille verticale supérieure à ϵ . Ainsi, si l'on construit les excursions aléatoires E_t à partir du mouvement brownien B_t , on a l'inégalité presque sûre $\tilde{T}_\epsilon \geq T_\epsilon$.

Dernier point de la preuve : contrôler les variables aléatoires X_ϵ , gaussiennes de variance \tilde{T}_ϵ , distribuées en loi selon le déplacement horizontal d'un mouvement brownien plan partant de 0 au temps d'atteinte de la droite $y = \epsilon$.

On peut en fait connaître assez précisément la loi de X_ϵ via le calcul de sa transformée de Fourier. Commençons par la remarque suivante : l'invariance du mouvement brownien par dilatation d'un facteur 2 donne que $X_{2\epsilon}$ a même loi que $2X_\epsilon$. D'autre part, en utilisant la propriété de Markov pour le mouvement brownien au temps \tilde{T}_ϵ , on voit que $X_{2\epsilon}$ est distribué en loi comme la somme de deux copies indépendantes de X_ϵ .

En terme de transformée de Fourier, on a donc la propriété suivante :

$$\hat{X}_\epsilon(2\xi) = \mathbb{E}[e^{-i2\xi X_\epsilon}] = \mathbb{E}[e^{-i\xi X_{2\epsilon}}] = (\mathbb{E}[e^{-i\xi X_\epsilon}])^2 = \hat{X}_\epsilon(\xi)^2$$

Par symétrie de la loi de X_ϵ , les $\hat{X}_\epsilon(\xi)$ sont des réels. L'égalité ci-dessus $\hat{X}_\epsilon(\xi) = \hat{X}_\epsilon(\frac{\xi}{2})^2$ implique alors que $\hat{X}_\epsilon(\xi)$ est un réel positif.

Un raisonnement similaire montre que pour tout entier positif n , $\hat{X}_\epsilon(n\xi) = \hat{X}_\epsilon(\xi)^n$. Le même résultat pour tout rationnel positif en découle, puis pour tout réel positif par continuité. De plus, la loi de X_ϵ étant symétrique, on a $\hat{X}_\epsilon(-\xi) = \hat{X}_\epsilon(\xi)$.

Ainsi, en posant $a_\epsilon = \hat{X}_\epsilon(1)$, on a d'une part $\hat{X}_\epsilon(\xi) = a_\epsilon^{|\xi|}$ et d'autre part, $a_\epsilon = a_1^\epsilon$.

Or, la transformée de Fourier est injective sur les mesures de probabilité. On va donc obtenir la densité de la loi de X_ϵ en calculant la transformée de Fourier inverse de $a_\epsilon^{|\xi|}$:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi} a_\epsilon^{|\xi|} d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{ix\xi + |\xi| \log(a_\epsilon)} d\xi \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[\int_{-\infty}^0 e^{\xi(ix - \log(a_\epsilon))} d\xi + \int_0^{+\infty} e^{\xi(ix + \log(a_\epsilon))} d\xi \right] \\
&= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{1}{ix - \log(a_\epsilon)} + \frac{1}{ix + \log(a_\epsilon)} \right] \\
&= \frac{1}{\pi} \frac{\log(a_\epsilon)}{\log(a_\epsilon)^2 + x^2}
\end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir la majoration suivante sur $m([1, +\infty[)$:

$$\begin{aligned}
m([1, +\infty[) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}[H_\epsilon \geq 1] \\
&\leq \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \mathbb{P}[X_\epsilon \geq 1] \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi} \frac{\log(a_\epsilon)}{\log(a_\epsilon)^2 + x^2} dx \\
&= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_1^{+\infty} \frac{1}{\pi \epsilon^2} \frac{\log(a_1)}{\log(a_1)^2 + x^2} dx \\
&= \int_1^{+\infty} \frac{\log(a_1)}{\pi x^2} dx < \infty
\end{aligned}$$

On a donc bien le résultat voulu. ■

4 Construction des mouvements browniens semi-réfléchis

Soit \mathcal{C} une courbe de Jordan C^∞ de \mathbb{R}^2 séparant 0 du point ∞ . Elle découpe le plan en deux domaines ouverts simplement connexes, l'un borné, son intérieur, que l'on notera D^i , l'autre non borné, son extérieur, que l'on notera D^e . On cherche à construire une famille de processus paramétrés par $p \in [0, 1]$ qui se comportent comme le mouvement brownien hors de la courbe \mathcal{C} , et qui, au contact de \mathcal{C} , s'aventurent vers l'extérieur - dans D^e - avec probabilité p et vers l'intérieur - dans D^i - avec probabilité $1 - p$.

La démarche qui suit permet de construire pour tout $p \in [0, 1]$ un processus qui semble être un bon candidat pour mériter le nom de mouvement brownien semi-réfléchi de paramètre p .

On va construire ces mouvements browniens semi-réfléchis en collant des excursions browniennes sur la courbe \mathcal{C} . Donnons nous donc deux processus ponctuels de Poisson indépendants d'excursions browniennes partant de 0 dans le demi plan supérieur \mathbb{H} . On choisit, comme normalisation pour la mesure μ sur les excursions browniennes, celle qui donne une mesure du point d'arrivée des excursions égale à $dy/2y^2$. L'un des ces processus ponctuels, $(e'_t)_{t \geq 0}$, désignera les excursions que l'on veut faire partir vers l'intérieur, tandis que l'autre processus, $(e_t)_{t \geq 0}$, désignera les excursions partant vers l'extérieur.

Pour transformer ces excursions dans \mathbb{H} partant de 0 en des excursions partant d'un point x de la courbe \mathcal{C} dans D^i ou D^e , on utilisera les applications conformes suivantes :

$$\begin{aligned}\Phi_\lambda : \quad \mathbb{H} &\rightarrow \mathbb{D} \\ z &\mapsto e^{i\lambda z}\end{aligned}$$

où λ est un réel positif, application qui envoie 0 sur 1 et ∞ sur 0.
On utilisera également

$$\Phi_x^i : \mathbb{D} \rightarrow D^i$$

l'unique application conforme envoyant 0 sur 0 ainsi que 1 sur un point x de \mathcal{C} .

De même on usera de

$$\Phi_x^e : \mathbb{D} \rightarrow D^e$$

l'unique application conforme envoyant 0 sur ∞ ainsi que 1 sur un point x de \mathcal{C} .

La composée $\Phi_x^i \circ \Phi_\lambda$ permet alors d'envoyer une certaine excursion partant de 0 dans \mathbb{H} sur une excursion partant de x dans D^i , après avoir changé sa "taille" d'un facteur λ .

Pour envoyer une de ces excursions dans \mathbb{H} vers une excursions hors de \mathcal{C} , il suffira donc de connaître son point de départ, et la dilatation (paramètre λ) qu'on souhaite lui appliquer. Or, on a vu heuristiquement que la dilatation que l'on aura besoin d'appliquer ne dépend que du point de la courbe dont on veut faire partir l'excursion. Ainsi, pour construire le processus qui nous intéresse, les excursions étant données, il nous manque uniquement de savoir de quel point de la courbe \mathcal{C} on veut faire partir chaque excursion. On cherche donc à construire un certain processus de positions sur la courbe \mathcal{C} qui sera en un certain sens les contacts de notre mouvement brownien semi-réfléchi avec la courbe \mathcal{C} .

C'est ce processus de positions sur la courbe \mathcal{C} que l'on va construire par approximations, en coupant à des échelles δ de plus en plus petites nos deux familles d'excursions : dans le cas où il n'y a p.s. qu'un nombre fini d'excursions pendant un temps fini (ce qui est le cas lorsque l'on coupe les petites excursions à partir d'une certaine échelle), il est aisé de bien définir ce processus de points de la courbe \mathcal{C} .

On utilisera pour cela une paramétrisation sympathique de \mathcal{C} : choisissons arbitrairement un point x_0 de la courbe \mathcal{C} , et considérons le prolongement de l'application $\Phi_{x_0}^i$ au bord de \mathbb{D} (que l'on voit comme $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$). On a ainsi un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ dans la courbe \mathcal{C} , qui se relève en une application de \mathbb{R} dans \mathcal{C} . Dorénavant, on abusera de cette identification. On cherche maintenant à comprendre le point d'arrivée d'une excursion intérieure ou extérieure sachant son point de départ et sa taille.

Etant donnée une excursion e partant de 0 dans \mathbb{H} , on note $l(e) \in \mathbb{R}$ sa taille algébrique, c'est-à-dire l'abscisse de son point d'arrivée dans \mathbb{R} . Si l'on colle une excursion de taille l d'un point d'abscisse Θ_x par $\Phi_x^i \circ \Phi_\lambda$, l'excursion arrivera en un point de \mathcal{C} paramétré par $\Theta_x + \lambda l$. Si l'on colle cette excursion vers l'extérieur (par $\Phi_x^e \circ \Phi_\lambda$), c'est un peu plus compliqué car la paramétrisation que l'on avait choisie était compatible avec Φ_x^i , mais ne l'est pas forcément avec Φ_x^e . Le point d'arrivée sera ainsi $\Theta_x + F_x(\lambda l)$, où F_x est un C^∞ -difféomorphisme de $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ (et que l'on peut voir et verra comme un C^∞ -difféomorphisme de \mathbb{R} , en choisissant, pour condition initiale du relèvement, $F_x(0) = 0$).

Pour approximer le processus de positions sur la courbe à échelle δ , on néglige dans le processus ponctuel de Poisson les excursions de taille $|l(e)|$ supérieure à δ . Choisissons de recoller les

excursions intérieures par $\Phi_x^i \circ \Phi_1$, et les extérieures par $\Phi_x^e \circ \Phi_{r(x)}$ où l'on a posé

$$r(x) = \frac{p}{1-p} \frac{|\Phi_x^{i'}(1)|}{|\Phi_x^{e'}(1)|}$$

Introduisons alors la fonction $l \mapsto F_x(r(x)l)$. On décompose alors $F_x(r(x)l) = \lambda_x l + V_x(l)$, où λ_x est le réel tel que $\lambda_x l$ est l'approximation de F_x au premier ordre. La partie assymétrique V_x est alors d'ordre supérieur à 2. De plus, on a, puisque F_x est lisse, et par compacité de la courbe de Jordan (C), les quatre estimées suivantes qui s'avèreront fort utiles par la suite :

$$\begin{aligned} |\lambda_x| &\leq C_1 \\ |\lambda_x - \lambda_y| &\leq C_2|x - y| \\ |V_x(l)| &\leq C_3l^2 \\ |V_x(l) - V_y(l)| &\leq C_4|x - y|l^2 \end{aligned}$$

où les C_i sont des constantes positives.

Donnons-nous une mesure de probabilité portée par la courbe \mathcal{C} , et choisissons une variable aléatoire Θ_0 distribuée selon cette loi. Construisons alors le processus de positions sur la courbe partant de Θ_0 et approximé à échelle δ . Au temps initial, on choisit $\Theta_0^\delta = \Theta_0$, et on pose pour $t > 0$:

$$\Theta_t^\delta = \Theta_0^\delta + \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s^{\delta\infty}) + F_{\Theta_{s-}^\delta}(l(e_s^{\delta\infty}))$$

où e_s^{ab} désigne les excursions du processus ponctuel de Poisson telles que $a < |l(e_s)| \leq b$, et où

$$f(t-) = \lim_{s \nearrow t} f(s)$$

Comme il n'y a presque sûrement - pendant un temps fini - qu'un nombre fini d'excursions de taille supérieure à δ , la définition de $(\Theta_t^\delta, t \geq 0)$ fait sens. On remarque que le processus ainsi défini est càdlàg.

On a alors la propriété suivante sur les processus $(\Theta_t^\delta, t \geq 0)$ lorsque δ tend vers 0.

Proposition 4.1. *Il existe un temps d'arrêt T tel qu'on ait l'estimée suivante - pour $\delta' < \delta$:*

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} |\Theta_t^{\delta'} - \Theta_t^\delta|^2] \leq K\delta$$

où K est une certaine constante positive.

En conséquence, on a convergence presque sûre en norme uniforme de la famille de processus $(\Theta_t^\delta, 0 \leq t < T)$ le long de sous-suites, vers un unique processus limite $(\Theta_t, 0 \leq t < T)$.

Preuve. On va commencer par évaluer la norme L^2 de la différence entre deux approximations aux échelles $\delta' < \delta$. Tout d'abord, nommons les cinq termes qui apparaîtront dans cette différence.

Trois termes sont des martingales :

$$M_t^1 = \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s^{\delta'\delta})$$

$$M_t^2 = \sum_{0 \leq s \leq t} \lambda_{\Theta_{s-}^{\delta'}} l(e_s^{\delta' \delta})$$

$$M_t^3 = \sum_{0 \leq s \leq t} [\lambda_{\Theta_{s-}^{\delta'}} l(e_s^{\delta \infty}) - \lambda_{\Theta_{s-}^{\delta}} l(e_s^{\delta \infty})]$$

Et deux termes sont de type "à variation finie" :

$$A_t^1 = \sum_{0 \leq s \leq t} V_{\Theta_{s-}^{\delta'}} (l(e_s^{\delta' \delta}))$$

$$A_t^2 = \sum_{0 \leq s \leq t} [V_{\Theta_{s-}^{\delta'}} (l(e_s^{\delta \infty})) - V_{\Theta_{s-}^{\delta}} (l(e_s^{\delta \infty}))]$$

Alors, on a :

$$\Theta_t^{\delta'} - \Theta_t^{\delta} = M_t^1 + M_t^2 + M_t^3 + A_t^1 + A_t^2$$

L'identité classique $2ab \leq a^2 + b^2$ permet obtenir l'identité moins classique mais tout aussi élémentaire $(\sum_{1 \leq i \leq 5} a_i)^2 \leq 9 \sum_{1 \leq i \leq 5} a_i^2$, avec laquelle on majore dans l'égalité précédente le carré de la somme par la somme des carrés :

$$|\Theta_t^{\delta'} - \Theta_t^{\delta}|^2 = 9((M_t^1)^2 + (M_t^2)^2 + (M_t^3)^2 + (A_t^1)^2 + (A_t^2)^2)$$

Pour contrôler ceci, il est commode d'introduire le temps d'arrêt suivant :

$$T = \min\{\inf\{t \geq 0, \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s)^2 \geq \sqrt{t}\}, \inf\{t \geq 0, l(e_t) \geq 1 \text{ ou } l(e'_t) \geq 1\}, t_0\}$$

où

$$t_0 = \min\left\{\frac{1}{4(\max\{36C_2^2, 9C_4^2\})^2}, \frac{1}{2}\right\} < 1$$

est une constante dont l'intérêt apparaîtra sous peu.

Prenons alors le supremum de $|\Theta_t^{\delta'} - \Theta_t^{\delta}|^2$ sur l'intervalle de temps $[0, T]$.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} |\Theta_t^{\delta'} - \Theta_t^{\delta}|^2] &\leq 9(\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (M_t^1)^2] + \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (M_t^2)^2] + \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (M_t^3)^2]) \\ &\quad + \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (A_t^1)^2] + \mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (A_t^2)^2] \end{aligned}$$

Notons que, sur l'intervalle de temps $[0, 1]$, les trois processus $M_{t \wedge (T-)}^i$ sont des martingales bornées dans L^2 . Par exemple, pour M_t^1 :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(M_t^1)^2] &= \mathbb{E}[(\sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s^{\delta' \delta}))^2] \\ &= \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s^{\delta' \delta})^2] \\ &= t \int_{\delta'}^{\delta} y^2 \frac{dy}{y^2} = t(\delta - \delta') \end{aligned}$$

Mentionnons que l'égalité $\mathbb{E}[(\sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s^{\delta' \delta}))^2] = \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s^{\delta' \delta})^2]$, aussi intuitive qu'elle puisse paraître, n'est pas immédiate à établir, en raison du nombre aléatoire de termes qui apparaissent dans la somme. Un argument complet pourrait utiliser le théorème de convergence dominée, ainsi qu'un ensemble dense de temps d'arrêts déterministes (par exemple les dyadiques).

Le caractère borné dans L^2 des trois martingales $M_{t \wedge (T-)}^i$ étant noté, on applique l'inégalité de Doob L^2 :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (M_t^i)^2] \leq 4\mathbb{E}[(M_{T-}^i)^2]$$

Ceci va permettre de majorer comme l'on souhaite les termes martingales :

$$\mathbb{E}[(M_{T-}^1)^2] = \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s < T} l(e_s^{\delta' \delta})^2] \leq \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s < 1} l(e_s^{\delta' \delta})^2] = \delta - \delta' \leq \delta$$

De même pour la deuxième martingale :

$$\mathbb{E}[(M_{T-}^2)^2] = \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s < T} \lambda_{\Theta_{s-}^{\delta'}}^2 l(e_s^{\delta' \delta})^2] \leq C_1^2 \mathbb{E}[(\sum_{0 \leq s < T} l(e_s^{\delta' \delta}))^2] \leq C_1^2 \delta$$

La troisième martingale donne une majoration moins sympathique :

$$\mathbb{E}[(M_{T-}^3)^2] = \mathbb{E}[(\sum_{0 \leq s < T} [\lambda_{\Theta_{s-}^{\delta'}} l(e_s^{\delta \infty}) - \lambda_{\Theta_{s-}^{\delta}} l(e_s^{\delta \infty})])^2] \leq \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s < T} [\lambda_{\Theta_{s-}^{\delta'}} l(e_s^{\delta \infty}) - \lambda_{\Theta_{s-}^{\delta}} l(e_s^{\delta \infty})]^2]$$

Ainsi,

$$\mathbb{E}[(M_{T-}^3)^2] \leq C_2^2 \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s < T} |\Theta_{s-}^{\delta'} - \Theta_{s-}^{\delta}|^2 l(e_s^{\delta \infty})^2] \leq C_2^2 \mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^{\delta}|^2 \sum_{0 \leq s < T} l(e_s^{\delta \infty})^2]$$

Utilisons alors la définition du temps d'arrêt T pour majorer $\sum_{0 \leq s < T} l(e_s^{\delta \infty})^2$:

$$\mathbb{E}[(M_{T-}^3)^2] \leq C_2^2 \mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^{\delta}|^2 \sqrt{T}] \leq C_2^2 \sqrt{t_0} \mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^{\delta}|^2]$$

D'autre part, majorons les termes à variation finie :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (A_t^1)^2] \leq \mathbb{E}[(\sum_{0 \leq s < T} C_3 l(e_s^{\delta' \delta})^2)^2] \leq C_3^2 \mathbb{E}[(\sqrt{T} \sum_{0 \leq s < T} l(e_s^{\delta' \delta})^2)^2] \leq C_3^2 \mathbb{E}[\sum_{0 \leq s < 1} l(e_s^{\delta' \delta})^2] \leq C_3^2 \delta$$

Enfin, contrôlons le dernier des cinq termes :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (A_t^2)^2] \leq \mathbb{E}[(\sum_{0 \leq s < T} C_4 l(e_s^{\delta \infty})^2 |\Theta_s^{\delta'} - \Theta_s^{\delta}|)^2] \leq C_4^2 \mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^{\delta}|^2 (\sum_{0 \leq s < T} l(e_s^{\delta \infty})^2)^2]$$

On en déduit :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} (A_t^2)^2] \leq C_4^2 \mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^{\delta}|^2 \sqrt{T}^2] \leq C_4^2 t_0 \mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^{\delta}|^2]$$

Au final, on somme les différentes majorations pour obtenir :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} |\Theta_s^{\delta'} - \Theta_s^\delta|^2] \leq 9(4(\delta + C_1^2\delta + C_2^2\sqrt{t_0}\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^\delta|^2]) + C_3^2\delta + C_4^2t_0\mathbb{E}[\sup_{0 \leq u < T} |\Theta_u^{\delta'} - \Theta_u^\delta|^2])$$

Ce que l'on s'empresse de réécrire plus simplement :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} |\Theta_s^{\delta'} - \Theta_s^\delta|^2] \leq K_1\delta + K_2(t_0 + \sqrt{t_0})\mathbb{E}[\sup_{0 \leq s < T} |\Theta_s^{\delta'} - \Theta_s^\delta|^2]$$

où $K_1 = 36 + 36C_1^2 + 9C_3^2$ et $K_2 = \max\{36C_2^2, 9C_4^2\}$

Le choix étonnant de t_0 avait donc été fait de telle sorte que $K_2(t_0 + \sqrt{t_0}) < 1$

L'inégalité ci-dessus peut donc se réécrire :

$$\mathbb{E}[\sup_{0 \leq t < T} |\Theta_s^{\delta'} - \Theta_s^\delta|^2] \leq \frac{K_1}{1 - K_2(t_0 + \sqrt{t_0})} \delta$$

De cette inégalité on peut déduire la convergence presque sûre en norme uniforme le long de sous-suites bien choisies : en effet, en utilisant l'inégalité de Markov, on peut trouver une suite de réels $(\delta_n, n \geq 0)$ telle que

$$\mathbb{P}[\sup_{0 \leq t < T} |\Theta_s^{\delta_{n+1}} - \Theta_s^{\delta_n}| > 2^{-n}] \leq 2^{-n}$$

On utilise alors le lemme de Borel-Cantelli, qui montre que la suite de processus $(\Theta_t^{\delta_n}, 0 \leq t < T)$ est presque sûrement de Cauchy pour la norme uniforme. D'où la convergence p.s. en norme uniforme, vers un processus limite que l'on notera $(\Theta_t, 0 \leq t < T)$. L'unicité du processus limite découle d'arguments similaires. ■

Il ne reste que quelques pas à faire pour finir la construction du mouvement brownien semi-réfléchi. Avant toute chose, prolongeons le processus limite obtenu $(\Theta_t, 0 \leq t < T)$ au temps $t = T$ en collant comme il se doit (c'est-à-dire avec l'application d'uniformisation adéquate) l'éventuelle excursion ayant lieu en $t = T$. On peut alors itérer toute la construction précédente, en choisissant pour distribution "initiale" $\tilde{\Theta}_0 = \Theta_T$, et en utilisant les familles d'excursions $\tilde{e}'_0 = \tilde{e}_0 = 0$ et, pour $t > 0$, $\tilde{e}'_t = e'_{T+t}$, ainsi que $\tilde{e}_t = e_{t+T}$. Notons que $((\tilde{e}'_t, \tilde{e}_t), t \geq 0)$ est alors un processus de même loi que $((e'_t, e_t), t \geq 0)$, indépendant de \mathcal{F}_T . En particulier, appliquer le même construction avec ces nouvelles données permet de prolonger le processus Θ_t de l'intervalle $[0, T]$ à l'intervalle $[0, T + \tilde{T}]$, où \tilde{T} est une variable aléatoire de même loi que T , indépendante de T .

Or, on a le résultat suivant sur le temps d'arrêt T :

Lemme 4.2. *Le temps d'arrêt T est presque sûrement strictement positif.*

Donc, si $(T_i, i \in \mathbb{N})$ est une suite iid de même loi que T , alors $\sum_{i \in \mathbb{N}} T_i = \infty$ presque sûrement.

En itérant un nombre dénombrable de fois la construction précédente, on obtient donc un processus càdlàg de positions sur la courbe \mathcal{C} , défini pour tout temps positif : $(\Theta_t, t \geq 0)$.

Le mouvement brownien semi-réfléchi partant de 0 sera donc ainsi défini : faisons partir un mouvement brownien de 0, et arrêtons le à son premier contact avec la courbe \mathcal{C} . Ceci nous donne une distribution initiale Θ_0 à partir de laquelle on déduit un processus $(\Theta_t, t \geq 0)$ de positions sur la courbe. De ce processus de positions, on déduit un processus à valeurs dans le plan en

collant l'excursion e_t (respectivement e'_t) à l'aide de l'application adéquate, en choisissant comme point de départ Θ_{t-} . Le point d'arrivée de l'excursion e_t (respectivement e'_t) ainsi collée est alors Θ_t .

Ne reste plus qu'à paramétrer de manière naturelle en temps le processus ainsi construit (en s'inspirant de la reparamétrisation utilisée dans la propriété d'invariance conforme du mouvement brownien plan). On obtient enfin un processus qui pourrait bien mériter le nom de mouvement brownien semi-réfléchi.

Reste à montrer le lemme sur la stricte positivité presque sûre du temps d'arrêt T .

Preuve du Lemme. On rappelle la définition de T :

$$T = \min\{\inf\{t \geq 0, \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s)^2 \geq \sqrt{t}\}, \inf\{t \geq 0, l(e_t) \geq 1 \text{ ou } l(e'_t) \geq 1\}, t_0\}$$

où t_0 est une certaine constante strictement positive.

Commençons par noter que $\inf\{t \geq 0, l(e_t) \geq 1\}$ est presque sûrement strictement positif. En effet, cela résulte du fait que la mesure (pour μ) des excursions de taille supérieure à 1 est finie - ce qui implique qu'il n'y a presque sûrement qu'un nombre fini d'excursion de taille supérieure à 1 dans l'intervalle de temps $[0, 1]$. Considérons A_n , l'ensemble des aléas tels qu'il n'y a pas d'excursions de taille strictement supérieure à 1 sur l'intervalle de temps $[0, 2^{-n}]$. Par ce qui précède, la réunion des A_n est de mesure 1.

Montrons alors, pour conclure, que $\inf\{t \geq 0, \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s)^2 \geq \sqrt{t}\}$ est également presque sûrement strictement positif.

On cherche donc à majorer le processus croissant suivant : $Y_t = \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s)^2$. Intéressons-nous, pour $n_0 \in \mathbb{N}$, à la quantité suivante :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\forall t \leq 2^{-n_0}, Y_t < \sqrt{t}) &\geq \mathbb{P}(\forall n \geq n_0, Y_{2^{-n}} \leq \sqrt{2^{-(n+1)}}) \\ &\geq \mathbb{P}(\forall n \geq n_0, Y_{2^{-n}} - Y_{2^{-(n+1)}} \leq \sqrt{2^{-(n+1)}} - \sqrt{2^{-(n+2)}}) \end{aligned}$$

Or, $Y_{2^{-n}} - Y_{2^{-(n+1)}}$ a même loi que $Y_{2^{-(n+1)}}$. De plus, la fonction racine étant en-dessous de ses tangentes, on a l'inégalité suivante : $\sqrt{2^{-(n+1)}} - \sqrt{2^{-(n+2)}} \geq 2^{-\frac{n+3}{2}}$.

Ainsi, en se plaçant sur l'évènement A_{n_0} , c'est à dire en conditionnant à ce qu'il n'y ait pas de grands sauts pendant l'intervalle de temps $[0, 2^{-n_0}]$ - ce qui revient à ignorer les grands sauts :

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\exists t \leq 2^{-n_0}, Y_t \geq \sqrt{t} | A_{n_0}) &\leq \sum_{n \geq n_0} \mathbb{P}(Y_{2^{-(n+1)}} > 2^{-\frac{n+3}{2}} | A_{n_0}) \\ &\leq \sum_{n \geq n_0} \frac{\mathbb{E}[Y_{2^{-(n+1)}} | A_{n_0}]}{2^{-\frac{n+3}{2}}} \\ &\leq \sum_{n \geq n_0} \frac{2^{-(n+1)} \int_0^1 y^2 \frac{dy}{y^2}}{2^{-\frac{n+3}{2}}} \\ &= \sum_{n \geq n_0} \frac{2^{-(n+1)}}{2^{-\frac{n+3}{2}}} \\ &= \sum_{n \geq n_0} 2^{-\frac{(n-1)}{2}} = \frac{\sqrt{2}^{2-n_0}}{\sqrt{2}-1} \end{aligned}$$

On en déduit, comme les évènements $\{\exists t \leq 2^{-n_0}, Y_t \geq \sqrt{t}\}$ sont décroissants, que sur l'évènement A_{n_0} , le temps d'arrêt $\inf\{t \geq 0, \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s)^2 \geq \sqrt{t}\}$ est presque sûrement strictement positif.

La réunion des A_{n_0} étant de mesure totale, on en conclut que $\inf\{t \geq 0, \sum_{0 \leq s \leq t} l(e_s)^2 \geq \sqrt{t}\}$ est presque sûrement strictement positif.

Ainsi, T est strictement positif presque sûrement, ce que l'on souhaitait démontrer. ■

Références

- [1] K. Burdzy, Multidimensional Brownian Excursions and Potential Theory (Longman Scientific & Technical, 1987)
- [2] J. L. Doob, Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart (Springer, 1984)
- [3] S. C. Port et C. J. Stone, Brownian Motion and Classical Potential Theory (Academic Press, 1978)
- [4] D. Revuz et M. Yor, Continuous Martingales and Brownian Motion (3e ed, Springer, 1999)
- [5] J.-F. Le Gall, Mouvement Brownien et Calcul Stochastique (Notes de cours, disponibles sur sa page web)