

PRÉSENTATION DES TRAVAUX

1. INTRODUCTION

Les travaux décrits dans ce texte portent sur l'étude de la topologie des variétés symplectiques compactes à l'aide de techniques de géométrie approximativement holomorphe. L'objectif est, par analogie avec la géométrie algébrique complexe, de construire des "systèmes linéaires" sur les variétés symplectiques compactes, puis d'utiliser ces objets pour définir de nouveaux invariants topologiques. Ces invariants, très différents de ceux obtenus par des méthodes de théorie de jauge ou de comptage de courbes pseudo-holomorphes, laissent espérer une meilleure compréhension de la topologie des variétés symplectiques et notamment des différences entre variétés symplectiques et variétés kählériennes.

1.1. Rappels et généralités. Rappelons qu'une *forme symplectique* sur une variété C^∞ est une 2-forme ω fermée ($d\omega = 0$) et non dégénérée ($\omega^n = \text{vol} > 0$). Contrairement au cas riemannien où la courbure est un invariant local, toutes les variétés symplectiques sont localement symplectomorphes à \mathbb{R}^{2n} muni de la forme standard $\omega_0 = \sum dx_i \wedge dy_i$ (théorème de Darboux). Le problème de la classification des variétés symplectiques est donc avant tout de nature topologique.

Les surfaces de Riemann $(\Sigma, \text{vol}_\Sigma)$ sont des variétés symplectiques; de façon plus générale, toute variété kählérienne est symplectique, ce qui inclut toutes les variétés projectives complexes. Toutefois la catégorie symplectique est beaucoup plus vaste que celle des variétés complexes : ainsi Gompf a montré en 1994 que tout groupe de présentation finie peut être réalisé comme le groupe fondamental d'une variété symplectique compacte de dimension 4 [Go1], alors que pour une variété kählérienne le premier nombre de Betti est toujours pair.

A défaut d'être complexe, toute variété symplectique admet une structure *presque complexe* compatible, i.e. un endomorphisme $J \in \text{End}(TX)$ vérifiant $J^2 = -\text{Id}$ et tel que $g(u, v) := \omega(u, Jv)$ est une métrique riemannienne. En tout point, (X, ω, J) est semblable à $(\mathbb{C}^n, \omega_0, i)$, mais J n'est pas nécessairement *intégrable* : ainsi $\nabla J \neq 0$, $\bar{\partial}^2 \neq 0$, et le crochet de Lie de deux champs de vecteurs de type $(1, 0)$ n'est pas nécessairement de type $(1, 0)$. Sur une variété symplectique, il n'y a donc en général pas de fonctions holomorphes, même localement, et en particulier pas de coordonnées locales holomorphes.

Les problèmes auxquels s'attaque la topologie symplectique sont des questions telles que : quelles variétés lisses admettent des structures symplectiques ? peut-on classifier les structures symplectiques sur une variété lisse donnée ? Il faut noter qu'un résultat classique de Moser indique que, si la classe de cohomologie $[\omega] \in H^2(X, \mathbb{R})$ est fixée, alors les déformations de la structure symplectique sont triviales. Les motivations pour l'étude des variétés symplectiques sont aussi bien d'ordre physique (mécanique classique ; théorie des cordes ; ...) que géométrique.

Certaines propriétés des variétés complexes s'étendent au cas symplectique, mais c'est loin d'être la règle générale. C'est en dimension 4 que la situation est la mieux connue, notamment grâce aux travaux de Taubes sur la structure des invariants

de Seiberg-Witten des variétés symplectiques et leur relation avec les invariants de Gromov-Witten [Ta]. En revanche, lorsque $\dim X \geq 6$, il y a très peu de résultats, et par exemple aucune obstruction non triviale (en-dehors des conditions cohomologiques évidentes liées au fait que ω est non dégénérée) n'est connue à l'existence d'une structure symplectique sur une variété donnée.

1.2. Géométrie approximativement holomorphe. L'idée de base introduite au milieu des années 90 par Donaldson, et que j'ai développée par la suite, est la suivante : en présence d'une structure presque complexe, le défaut d'intégrabilité est une obstruction à l'existence d'objets holomorphes (sections de fibrés, systèmes linéaires), mais on peut travailler de façon similaire avec des objets approximativement holomorphes.

Soit (X, ω) une variété symplectique compacte de dimension $2n$. On supposera tout du long que $\frac{1}{2\pi}[\omega] \in H^2(X, \mathbb{Z})$; cette condition d'intégralité ne restreint pas le type topologique de X , car toute forme symplectique peut être perturbée jusqu'à rendre sa classe de cohomologie rationnelle, puis entière après multiplication par un facteur constant. Soit J une structure presque complexe compatible avec ω , et soit $g(\cdot, \cdot) = \omega(\cdot, J\cdot)$ la métrique riemannienne correspondante.

On considère un fibré en droites complexes L sur X tel que $c_1(L) = \frac{1}{2\pi}[\omega]$, muni d'une métrique hermitienne et d'une connexion hermitienne ∇^L dont la forme de courbure est $F(\nabla^L) = -i\omega$. La structure presque complexe induit une décomposition de la connexion : $\nabla^L = \partial^L + \bar{\partial}^L$, avec $\partial^L s(v) = \frac{1}{2}(\nabla^L s(v) - i\nabla^L s(Jv))$ et $\bar{\partial}^L s(v) = \frac{1}{2}(\nabla^L s(v) + i\nabla^L s(Jv))$.

Si la structure presque complexe J est intégrable, i.e. si X est une variété complexe kählérienne, alors le fibré L est un fibré en droites holomorphe ample, c'est-à-dire que pour k suffisamment grand le fibré $L^{\otimes k}$ admet de nombreuses sections holomorphes. Dans ce cas, la variété X se plonge dans un espace projectif (par un théorème de Kodaira); des sections hyperplanes génériques fournissent des hypersurfaces lisses de X (par le théorème de Bertini), et plus généralement le système linéaire formé par les sections de $L^{\otimes k}$ permet de construire diverses structures : pinceaux de Lefschetz, ...

Lorsque la variété X est seulement symplectique, si le défaut d'intégrabilité de J empêche l'existence de sections holomorphes, il est cependant possible de trouver un modèle local *approximativement holomorphe* : un voisinage d'un point $x \in X$ muni de la forme symplectique ω et de la structure presque complexe J s'identifie à un voisinage de l'origine dans \mathbb{C}^n muni de la forme symplectique standard ω_0 et d'une structure presque complexe de la forme $i + O(|z|)$. Dans ce modèle local, le fibré $L^{\otimes k}$ muni de la connexion $\nabla = (\nabla^L)^{\otimes k}$ de courbure $-ik\omega$ peut s'identifier au fibré trivial \mathbb{C} muni de la connexion $d + \frac{k}{4} \sum (z_j d\bar{z}_j - \bar{z}_j dz_j)$. La section de $L^{\otimes k}$ définie localement par $s_{k,x}(z) = \exp(-\frac{1}{4}k|z|^2)$ est alors approximativement holomorphe [Do1]. Plus précisément :

Définition 1.1. *Une suite de sections s_k de $L^{\otimes k}$ est dite approximativement holomorphe si, pour la métrique redimensionnée $g_k = kg$, et en normalisant les sections s_k de sorte que $\|s_k\|_{C^r, g_k} \sim C$, on a une inégalité de la forme $\|\bar{\partial}s_k\|_{C^{r-1}, g_k} < C'k^{-1/2}$, où C et C' sont des constantes indépendantes de k .*

Le changement de métrique, qui dilate les distances d'un facteur \sqrt{k} , est nécessaire pour l'obtention d'estimées uniformes du fait de la courbure de plus en plus

grande du fibré $L^{\otimes k}$. L'idée intuitive est que, pour k grand, les sections du fibré $L^{\otimes k}$ de courbure $-ik\omega$ voient la géométrie de X à petite échelle (de l'ordre de $1/\sqrt{k}$), ce qui rend la structure presque complexe J presque intégrable et permet d'approcher de mieux en mieux la condition d'holomorphicité $\bar{\partial}s = 0$.

Il est à noter que, la condition ci-dessus étant ouverte, il n'est pas possible de définir un "espace de sections approximativement holomorphes" de $L^{\otimes k}$ de façon simple (cf. les travaux de Borthwick et Uribe [BU] ou de Shiffman et Zelditch pour d'autres approches du problème).

Les techniques approximativement holomorphes ont permis d'obtenir de nombreux résultats d'existence et de structure pour les variétés symplectiques compactes, à commencer par la construction de sous-variétés symplectiques obtenue par Donaldson vers 1995 [Do1]. Il s'agit essentiellement, une fois obtenues de nombreuses sections approximativement holomorphes, d'en trouver certaines dont le comportement géométrique est aussi générique que possible. Plusieurs résultats de ce type sont décrits dans la suite de ce texte, ainsi que leurs applications à l'obtention de nouveaux invariants topologiques permettant de caractériser les variétés symplectiques.

Pour terminer cette introduction, il est à mentionner que plusieurs des résultats de topologie symplectique obtenus à l'aide des techniques approximativement holomorphes ont été transposés au cadre de la géométrie de contact (en dimension impaire) par Presas et ses collaborateurs (cf. par exemple [IMP]), le résultat le plus spectaculaire étant un théorème d'existence de structures de livres ouverts sur les variétés de contact compactes récemment obtenu par Giroux et Mohsen [GM].

2. CONSTRUCTIONS DE SOUS-VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

En conservant les notations introduites au §1.2, le premier résultat obtenu à l'aide des méthodes approximativement holomorphes est le théorème d'existence de sous-variétés symplectiques suivant, dû à Donaldson [Do1] :

Théorème 2.1 (Donaldson). *Pour $k \gg 0$, $L^{\otimes k}$ admet des sections approximativement holomorphes s_k dont les lieux d'annulation W_k sont des hypersurfaces symplectiques lisses.*

Ce résultat part de l'observation que, si la section s_k s'annule transversalement et si l'on a $|\bar{\partial}s_k(x)| \ll |\partial s_k(x)|$ en tout point de $W_k = s_k^{-1}(0)$, alors la sous-variété W_k est symplectique (i.e., $\omega|_{W_k}$ est non dégénérée, ce qui implique que $(W_k, \omega|_{W_k})$ est symplectique), et même approximativement J -holomorphe (i.e. $J(TW_k)$ est proche de TW_k). Le point crucial est donc d'obtenir une borne inférieure en tout point de W_k pour ∂s_k , pour compenser le défaut d'holomorphicité.

Définition 2.2. *On dit que des sections s_k de $L^{\otimes k}$ sont uniformément transverses à 0 s'il existe une constante $\eta > 0$ (indépendante de k) telle que, en tout point de X tel que $|s_k(x)| < \eta$, on a $|\partial s_k(x)|_{g_k} > \eta$.*

Pour des sections approximativement holomorphes, l'obtention d'une telle estimée uniforme de transversalité suffit à obtenir le Théorème 2.1. La construction de telles sections comporte deux grandes étapes : la première est un résultat de transversalité effectif local pour des fonctions à valeurs complexes, et fait appel à un résultat de Yomdin sur la complexité des ensembles semi-algébriques réels; la seconde étape est un procédé de globalisation original, qui permet par perturbations successives des

sections s_k d'obtenir des propriétés de transversalité uniforme sur des ouverts de plus en plus grands jusqu'à recouvrir X [Do1].

La première étape (résultat de transversalité effectif local) a récemment fait l'objet d'une simplification notable [Au5], qui permet de formuler l'argument de façon nettement plus courte et sans faire appel aux travaux de Yomdin. L'observation élémentaire qui sous-tend cette simplification est la suivante : une fonction holomorphe $f : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}$ s'annule transversalement (i.e., 0 est une valeur régulière) si et seulement si son 1-jet (f, df) ne s'annule nulle part. Dès lors, en travaillant sur les 1-jets plutôt que sur les fonctions, et en s'autorisant des perturbations affines plutôt que constantes, il devient nettement plus facile d'obtenir un résultat de transversalité uniforme de type Sard pour les fonctions approximativement holomorphes.

Les sous-variétés symplectiques construites par Donaldson possèdent plusieurs propriétés spécifiques qui les rapprochent davantage des sous-variétés complexes que des sous-variétés symplectiques générales. Tout d'abord, elles vérifient le théorème de l'hyperplan de Lefschetz : jusqu'en dimension moitié, les groupes d'homologie et d'homotopie de W_k sont identiques à ceux de X [Do1]. De façon plus importante, elles vérifient une propriété d'unicité asymptotique décrite dans [Au1] :

Théorème 2.3 ([Au1]). *Pour k suffisamment grand fixé, les sous-variétés W_k obtenues à l'aide du Théorème 2.1 pour des constantes de transversalité données sont, à isotopie symplectique près, indépendantes de tous les choix effectués (y compris celui de la structure presque complexe J).*

Ce résultat d'unicité, qui repose sur une extension de l'argument de Donaldson au cas de familles de sections dépendant d'un paramètre réel, est intéressant car il permet d'envisager l'utilisation d'invariants topologiques ou symplectiques associés aux sous-variétés W_k pour caractériser la variété X . De plus, il donne une information sur le problème d'isotopie symplectique, qui consiste à déterminer si les courbes symplectiques connexes représentant une classe d'homologie donnée dans une variété symplectique de dimension 4 sont toutes mutuellement isotopes ou non : les sous-variétés construites par Donaldson ne peuvent pas fournir de contre-exemples à ce problème dont la réponse générale est négative (cf. par exemple [FS]), mais pour lequel aucun contre-exemple n'est connu pour les courbes lisses connexes dont le fibré normal est de degré positif.

Le comportement géométrique des sous-variétés symplectiques obtenues à l'aide des techniques approximativement holomorphes est remarquable, en particulier vis-à-vis des sous-variétés lagrangiennes (ou plus généralement isotropes). Ainsi, de façon analogue à ce qui se produit en géométrie kählérienne, les sous-variétés isotropes vérifient une propriété de *convexité rationnelle*, ce qui se manifeste notamment par la possibilité de choisir les hypersurfaces symplectiques W_k de telle sorte qu'elles évitent une sous-variété isotrope donnée tout en passant par un point arbitrairement choisi du complémentaire.

Le résultat suivant a également été obtenu de façon indépendante par Damien Gayet et Jean-Paul Mohsen, et a fait l'objet de la publication commune [AGM] :

Théorème 2.4 ([AGM]). *Soit $\mathcal{L} \subset X$ une sous-variété isotrope compacte, et soit $N = |\mathrm{Tor} H_1(\mathcal{L}, \mathbb{Z})|$. Alors, pour tout entier k multiple de N suffisamment grand, il*

existe des sections approximativement holomorphes de $L^{\otimes k}$ dont les lieux d'annulation W_k sont des sous-variétés symplectiques lisses disjointes de \mathcal{L} , passant par un point quelconque de $X - \mathcal{L}$.

Le Théorème 2.4 présente un intérêt particulier en relation avec le résultat de structure obtenu par Biran [Bi], qui permet de décomposer la variété X en d'une part un fibré en disques sur W_k , et d'autre part un complexe cellulaire isotrope. En principe, il devrait également permettre d'obtenir des obstructions à l'existence de certains plongements lagrangiens (cf. notamment les travaux de Nemirovski).

3. SYSTÈMES LINÉAIRES APPROXIMATIVEMENT HOLOMORPHES

Si les sous-variétés symplectiques dont la construction et les propriétés ont été abordées au §2 offrent déjà de vastes perspectives, les applications les plus intéressantes des techniques approximativement holomorphes en topologie symplectique font intervenir des *systèmes linéaires* engendrés par deux sections ou plus, qui permettent de munir les variétés symplectiques compactes de diverses structures topologiques extrêmement riches telles que pincesaux de Lefschetz, applications projectives, etc...

3.1. Pinceaux de Lefschetz symplectiques. Si l'on considère non plus une, mais deux sections de $L^{\otimes k}$, Donaldson a montré qu'il est possible de munir la variété X de structures de *pincesaux de Lefschetz symplectiques* [Do2, Do3] : un couple de sections approximativement holomorphes (s_k^0, s_k^1) de $L^{\otimes k}$ convenablement choisies définit une famille d'hypersurfaces $\Sigma_{k,\alpha} = \{x \in X, s_k^0(x) - \alpha s_k^1(x) = 0\}$, $\alpha \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$. Les sous-variétés $\Sigma_{k,\alpha}$ sont symplectiques, et elles sont toutes lisses excepté un nombre fini d'entre elles qui présentent une singularité isolée (un point double ordinaire) ; elles s'intersectent le long des *points base* du pinceau, qui forment une sous-variété symplectique lisse $Z_k = \{s_k^0 = s_k^1 = 0\}$ de codimension 4. Ainsi, lorsque $\dim X = 4$ (le cas le plus étudié), les fibres sont des surfaces compactes orientées dont certaines présentent une singularité nodale, et Z_k est constitué d'un nombre fini de points.

On peut également définir l'application projective $f_k = [s_k^0 : s_k^1] : X - Z_k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, dont les points critiques correspondent aux singularités des fibres $\Sigma_{k,\alpha} = f_k^{-1}(\alpha) \cup Z_k$. La fonction f_k est une fonction de Morse complexe, c'est-à-dire qu'au voisinage d'un point critique on a un modèle local $f_k(z) = z_1^2 + \dots + z_n^2$ en coordonnées approximativement holomorphes.

L'argument de Donaldson repose à nouveau sur des perturbations successives des sections s_k^0 et s_k^1 afin d'obtenir des propriétés de transversalité uniforme, non seulement pour les sections (s_k^0, s_k^1) mais aussi pour la dérivée ∂f_k [Do3]. Il est à noter que la partie la plus technique de l'argument peut être simplifiée de la même façon que pour la construction de sous-variétés [Au5].

Donaldson montre également que, pour $k \gg 0$ fixé, les pincesaux de Lefschetz obtenus sont tous identiques à isotopie près, indépendamment des choix de construction.

3.2. Revêtements ramifiés de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et applications projectives. On considère maintenant des systèmes linéaires engendrés par trois sections approximativement holomorphes (s_k^0, s_k^1, s_k^2) de $L^{\otimes k}$: pour $k \gg 0$, il est à nouveau possible d'obtenir un

comportement générique pour l'application projective $f_k = (s_k^0 : s_k^1 : s_k^2)$ (à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$) associée au système linéaire.

Si la variété X est de dimension 4, le système linéaire n'a pas de points base, et l'application f_k est un *revêtement ramifié* :

Théorème 3.1 ([Au2]). *Pour k suffisamment grand, trois sections approximativement holomorphes convenablement choisies de $L^{\otimes k}$ au-dessus de X^4 déterminent un revêtement ramifié $f_k : X^4 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ à modèles locaux génériques : pour tout point $x \in X$, il existe des coordonnées approximativement holomorphes locales au voisinage de x et de $f_k(x)$ dans lesquelles f_k s'identifie à l'un des trois modèles locaux $(u, v) \mapsto (u, v)$ (difféomorphisme local), $(u, v) \mapsto (u^2, v)$ (ramification simple), ou $(u, v) \mapsto (u^3 - uv, v)$ (cusp). De plus, pour $k \gg 0$ les revêtements ainsi construits sont uniquement déterminés à isotopie près.*

Les trois modèles locaux qui apparaissent dans l'énoncé du théorème sont les mêmes que pour une application holomorphe générique en dimension complexe 2. Toutefois ils sont ici réalisés dans des coordonnées locales qui ne sont pas holomorphes. La propriété importante des systèmes de coordonnées considérés est la suivante : si l'on transporte la structure symplectique via le système de coordonnées, on obtient une forme symplectique sur \mathbb{C}^2 dont la restriction à une droite complexe quelconque est toujours positive.

Le lieu des points critiques de f_k est une courbe symplectique lisse (connexe) $R_k \subset X$. En revanche, la courbe symplectique $D_k = f_k(R_k) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ("courbe de ramification", ou "courbe discriminante") n'est immergée qu'en dehors des points où le troisième modèle local s'applique. En ces points, la courbe D_k présente un *cusp complexe* ($27x^2 = 4y^3$). Outre les cusps, la courbe D_k présente également génériquement des *points doubles*, qui n'apparaissent pas dans les modèles locaux car ils correspondent à des ramifications en deux points distincts de la même fibre de f_k ; bien que D_k soit approximativement holomorphe, les deux orientations sont a priori envisageables pour ses points doubles, contrairement au cas complexe.

Réciproquement, un revêtement de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ramifié le long d'une courbe symplectique singulière admet toujours une structure symplectique naturelle (canonique à isotopie près), obtenue par relèvement de la forme de Kähler de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ et perturbation le long de la courbe de ramification.

Le résultat d'unicité du Théorème 3.1 implique que, pour $k \gg 0$, il est possible de définir des invariants de la variété symplectique (X, ω) à partir de la monodromie du revêtement et de la topologie de la courbe $D_k \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$; toutefois, la courbe D_k n'est déterminée qu'à création ou annulation de paires de points doubles admissibles près.

Lorsque $\dim X > 4$, le lieu des points base $Z_k = \{s_k^0 = s_k^1 = s_k^2 = 0\}$ n'est plus vide, et l'application projective f_k n'est plus définie partout ; les points base forment génériquement une sous-variété symplectique lisse de X , de codimension réelle 6. A cette différence près, le résultat précédent s'étend en dimension supérieure :

Théorème 3.2 ([Au3]). *Pour k suffisamment grand, trois sections approximativement holomorphes convenablement choisies du fibré $L^{\otimes k}$ déterminent une application projective $f_k : X^{2n} - Z_k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ à modèles locaux génériques, de façon canonique à isotopie près.*

Près d'un point de Z_k , un modèle local pour f_k est $(z_1, \dots, z_n) \mapsto [z_1 : z_2 : z_3]$. Hors de Z_k , les trois modèles locaux génériques deviennent respectivement :

- (i) $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1, z_2)$;
- (ii) $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1^2 + \dots + z_{n-1}^2, z_n)$;
- (iii) $(z_1, \dots, z_n) \mapsto (z_1^3 - z_1 z_n + z_2^2 + \dots + z_{n-1}^2, z_n)$.

Le lieu des points critiques $R_k \subset X$ est de nouveau une courbe symplectique lisse (connexe), tandis que son image $D_k = f_k(R_k) \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est encore une courbe symplectique singulière, dont les seules singularités génériques sont des cusps complexes ainsi que des points doubles (le signe de l'intersection pouvant être soit positif soit négatif). Les fibres de f_k sont des sous-variétés symplectiques de codimension réelle 4, s'intersectant le long de Z_k ; les fibres au-dessus des points de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D_k$ sont lisses, tandis que celles au-dessus d'un point générique de D_k présentent un point double ordinaire, et celles au-dessus d'un cusp de D_k présentent une singularité de type A_2 .

Comme en dimension 4, le résultat d'unicité à isotopie près implique que, modulo d'éventuelles créations ou annulations de paires de points doubles d'orientations opposées dans la courbe D_k , la topologie de la fibration f_k peut être utilisée pour définir des invariants de la variété symplectique (X, ω) (voir §4).

3.3. Fibrés de jets et transversalité uniforme. Les constructions décrites ci-dessus reposent sur l'analyse minutieuse des diverses situations locales possibles pour f_k et sur des arguments de transversalité permettant d'assurer l'existence de sections de $L^{\otimes k}$ se comportant de façon générique. Il s'agit donc de recenser les divers cas particuliers, génériques ou non, susceptibles de se produire ; chacun correspond à l'annulation d'une certaine quantité exprimable en fonction des sections s_k^0, s_k^1, s_k^2 et de leurs dérivées.

Afin de faciliter ce type de constructions, et pour pouvoir étendre les résultats à des systèmes linéaires déterminés par plus de trois sections ou à des situations plus générales encore, il est nécessaire de développer une version approximativement holomorphe de la théorie des singularités. L'ingrédient essentiel de cette approche est un théorème de transversalité uniforme pour les jets de sections approximativement holomorphes ([Au4], Théorème 1.1).

Etant données des sections approximativement holomorphes s_k de fibrés très positifs E_k (par exemple $E_k = \mathbb{C}^m \otimes L^{\otimes k}$) sur une variété symplectique X , il est possible de considérer leurs r -jets, $j^r s_k = (s_k, \partial s_k, (\partial \partial s_k)_{\text{sym}}, \dots, (\partial^r s_k)_{\text{sym}})$, qui sont des sections de *fibrés de jets* $\mathcal{J}^r E_k = \bigoplus_{j=0}^r (T^* X^{(1,0)})_{\text{sym}}^{\otimes j} \otimes E_k$. Les fibrés $\mathcal{J}^r E_k$ peuvent naturellement être stratifiés par des sous-variétés approximativement holomorphes, correspondant aux divers comportements locaux possibles à l'ordre r pour les sections s_k . Le comportement génériquement attendu correspond au cas où le jet $j^r s_k$ est transverse aux sous-variétés de la stratification. Le résultat est le suivant :

Théorème 3.3 ([Au4]). *Etant données des stratifications \mathcal{S}_k des fibrés de jets $\mathcal{J}^r E_k$ par des sous-variétés approximativement holomorphes (en nombre fini, régulières au sens de Whitney, uniformément transverses aux fibres, et de courbure bornée indépendamment de k), pour k suffisamment grand les fibrés E_k admettent des sections approximativement holomorphes s_k dont les r -jets sont uniformément transverses aux stratifications \mathcal{S}_k . De plus ces sections peuvent être choisies arbitrairement proches de sections données.*

En l'appliquant à des stratifications convenablement choisies, ce théorème fournit la partie principale de l'argument requis pour construire des m -uplets de sections approximativement holomorphes de $L^{\otimes k}$ (et donc des applications projectives à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^{m-1}$) présentant un comportement générique. De plus, une version à un paramètre réel du Théorème 3.3 permet d'obtenir des résultats d'unicité asymptotique à isotopie près pour ces sections génériques ([Au4], Théorème 3.2).

4. INVARIANTS DE MONODROMIE

La topologie des structures introduites ci-dessus (pincesaux de Lefschetz, revêtements ramifiés, ...) peut être étudiée à l'aide de la notion de *monodromie*, dans le but de définir des invariants de variétés symplectiques.

De façon générale, la monodromie d'une fibration lisse $f : X \rightarrow Y$ de fibre F est décrite par un morphisme $\phi : \pi_1(Y) \rightarrow \pi_0 \text{Diff}(F)$, obtenu en considérant le difféomorphisme (défini seulement à isotopie près en l'absence du choix d'une connexion sur la fibration) induit sur la fibre générique par un déplacement le long d'un lacet dans la base Y ; en présence de structures supplémentaires sur les fibres (sections distinguées, structures symplectiques, ...) on pourra aussi considérer des classes d'isotopie de difféomorphismes relatifs, de symplectomorphismes, etc... Lorsque f possède des points critiques, i.e. en présence de fibres singulières, la monodromie est définie en se restreignant à la préimage de $Y_0 = Y - \text{crit}(f)$, la monodromie autour des fibres singulières étant alors d'une importance toute particulière pour l'étude de la topologie de l'application f .

4.1. Monodromie de fibrations de Lefschetz. On considère à nouveau une structure de pinceau de Lefschetz symplectique sur X , donnée par des hypersurfaces $\Sigma_{k,\alpha}$ s'intersectant transversalement le long de la sous-variété des points base Z_k ; les hypersurfaces $\Sigma_{k,\alpha}$ sont les surfaces de niveaux d'une fonction de Morse complexe $f_k : X - Z_k \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, et sont lisses excepté un nombre fini d'entre elles qui contiennent un point double ordinaire comme seule singularité. Ce point double est obtenu à partir d'une fibre générique par contraction d'une sphère lagrangienne appelée *cycle évanescent*.

En considérant la variété \hat{X} formée par éclatement de X le long de Z_k , on obtient une *fibration de Lefschetz* $\hat{f}_k : \hat{X} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, dont on peut étudier la monodromie autour des fibres singulières (correspondant aux valeurs critiques de f_k). Cette monodromie prend ses valeurs dans le *mapping class group* symplectique,

$$\text{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k) = \pi_0(\{\phi \in \text{Symp}(\Sigma_k, \omega), \phi|_{V(Z_k)} = \text{Id}\}),$$

où Σ_k est une fibre générique de \hat{f}_k (correspondant au choix d'un point de référence $\alpha \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$), et $V(Z_k)$ est un voisinage de Z_k dans la fibre Σ_k . On obtient ainsi un morphisme de monodromie $\psi_k : \pi_1(\mathbb{C} - \text{crit } f_k) \rightarrow \text{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$. La monodromie autour d'une fibre singulière est un *twist de Dehn* (positif) le long du cycle évanescent (une sphère lagrangienne plongée $S^{n-1} \subset \Sigma_k - Z_k$).

Dans le cas où $\dim X = 4$, les fibres sont des surfaces compactes et Z_k est un ensemble fini de points ; le groupe $\text{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$ s'identifie donc au "mapping class group" $\text{Map}_{g,N}$ d'une surface de Riemann de genre $g = g(\Sigma_k)$ à $N = \text{card } Z_k$ composantes de bord, et la monodromie autour d'une fibre singulière (une surface de Riemann possédant un point double à croisement normal) est un *twist de Dehn* le long d'une courbe fermée simple.

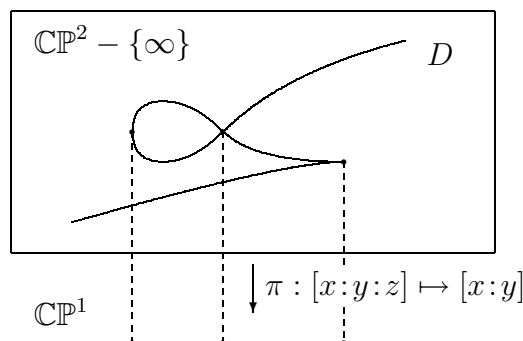
Le résultat d'unicité asymptotique de Donaldson implique que, pour k suffisamment grand, la monodromie des pincesaux de Lefschetz construits à partir de sections approximativement holomorphes de $L^{\otimes k}$ est un invariant symplectique de (X, ω) . Inversement, Gompf a montré que la donnée du morphisme de monodromie détermine entièrement la variété X munie de sa structure symplectique [Go2] ; de plus, en dimension 4 l'espace total d'une "fibration de Lefschetz topologique" au-dessus de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ admet toujours une structure symplectique [GS].

Les propriétés géométriques et topologiques des pincesaux et fibrations de Lefschetz ont fait l'objet de nombreuses études ces dernières années, particulièrement en dimension 4 ; cf. par exemple [ABKP], [Sm1], [EK]. Donaldson et Smith ont montré qu'une variante des invariants de Gromov-Witten peut être exprimée en termes de fibrations en produits symétriques associées à un pinceau de Lefschetz, ce qui leur a permis de redémontrer sans faire appel à la théorie de Seiberg-Witten des résultats de Taubes sur l'existence de courbes symplectiques dans certaines classes d'homologie [DS, Sm2]. Par ailleurs, Seidel a introduit une version combinatoire de l'homologie de Floer lagrangienne pour les pincesaux de Lefschetz [Se], ce qui lui a permis d'obtenir une description simplifiée, effectivement calculable, de certaines catégories de Fukaya (A_∞ -catégories dont les objets sont des sous-variétés lagrangiennes et dont les morphismes sont donnés par l'homologie de Floer), et de vérifier ainsi les conjectures de symétrie miroir de Kontsevich pour des exemples simples.

Tous ces travaux montrent clairement l'intérêt que présente le calcul de la monodromie des pincesaux de Lefschetz symplectiques construits par Donaldson. Malheureusement, ce calcul est très délicat en pratique ; de fait, la méthode de calcul la plus efficace consiste souvent à faire intervenir un système linéaire comportant une troisième section (c'est-à-dire une application à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$), et à calculer les invariants de monodromie qui lui sont associés avant d'en déduire ceux du pinceau de Lefschetz correspondant.

4.2. Monodromie de revêtements ramifiés de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$. Les données topologiques qui caractérisent un revêtement ramifié $f_k : X^4 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ sont d'une part la courbe de ramification $D_k \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ (à isotopie et annulation de paires de points doubles près), et d'autre part un morphisme de monodromie $\theta_k : \pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D_k) \rightarrow S_N$ décrivant l'agencement des $N = \deg f_k$ feuillettes du revêtement au-dessus de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - D_k$.

L'étude d'une courbe singulière $D \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ peut se faire en utilisant les techniques de groupes de tresses introduites en géométrie algébrique complexe par Moishezon et Teicher [Mo1, Te1] : l'idée est de choisir une projection linéaire $\pi : \mathbb{C}\mathbb{P}^2 - \{\text{pt}\} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, par exemple $\pi([x:y:z]) = [x:y]$, de telle sorte que la courbe D soit en position



générale par rapport aux fibres de π . La restriction $\pi|_D$ est alors un revêtement ramifié singulier de degré $d = \deg D$, dont les points particuliers sont d'une part les singularités de D (points doubles et cusps) et d'autre part des points de tangence verticale où la courbe D devient tangente aux fibres de π .

Hormis celles qui contiennent des points particuliers de D , les fibres de π sont des droites qui intersectent la courbe D en d points distincts. Si l'on choisit un point de référence dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (et la fibre correspondante $\ell \simeq \mathbb{C} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ de π), et si l'on se restreint à un ouvert affine afin de pouvoir trivialisier la fibration π , la topologie du revêtement ramifié $\pi|_D$ peut être décrite par un morphisme $\rho : \pi_1(\mathbb{C} - \{\text{pts}\}) \rightarrow B_d$, où B_d est le groupe des tresses à d brins : la tresse $\rho(\gamma)$ correspond au mouvement des d points de $\ell \cap D$ à l'intérieur des fibres de π lors d'un déplacement le long du lacet γ . De façon équivalente, si l'on choisit un système de lacets qui engendrent le groupe libre $\pi_1(\mathbb{C} - \{\text{pts}\})$, le morphisme ρ peut être décrit par une *factorisation* dans le groupe de tresses B_d , faisant intervenir la monodromie autour de chacun des points particuliers de D (laquelle, pour chaque type de point, est toujours conjuguée à un modèle local standard).

Le morphisme ρ et la factorisation correspondante dépendent de choix de trivialisations, qui les affectent par conjugaison simultanée (changement de trivialisations de la fibre ℓ de π) ou par opérations de Hurwitz (changement de générateurs de $\pi_1(\mathbb{C} - \{\text{pts}\})$). Il y a équivalence complète entre la donnée d'un morphisme $\rho : \pi_1(\mathbb{C} - \{\text{pts}\}) \rightarrow B_d$ à ces opérations algébriques près et la donnée d'une courbe singulière symplectique plane D de degré d compatible avec la projection π à isotopie symplectique (parmi les courbes singulières compatibles avec la projection π) près. En revanche, la courbe D n'est isotope à une courbe complexe que pour certains choix particuliers du morphisme ρ .

Contrairement au cas complexe, dans le cas symplectique il n'est pas évident a priori que la courbe de ramification D_k puisse posséder les propriétés attendues vis-à-vis de la projection linéaire π ; cela requiert en fait une amélioration du Théorème 3.1 afin de contrôler le comportement de D_k près des points particuliers (tangences verticales, points doubles et cusps) [AK, Au3]. Par ailleurs, il faut tenir compte des créations ou annulations de paires de points doubles admissibles dans D_k , qui affectent le morphisme $\rho_k : \pi_1(\mathbb{C} - \{\text{pts}\}) \rightarrow B_d$ par insertion ou suppression de paires de facteurs. Le résultat d'unicité du Théorème 3.1 implique alors le résultat suivant, obtenu en collaboration avec L. Katzarkov [AK] :

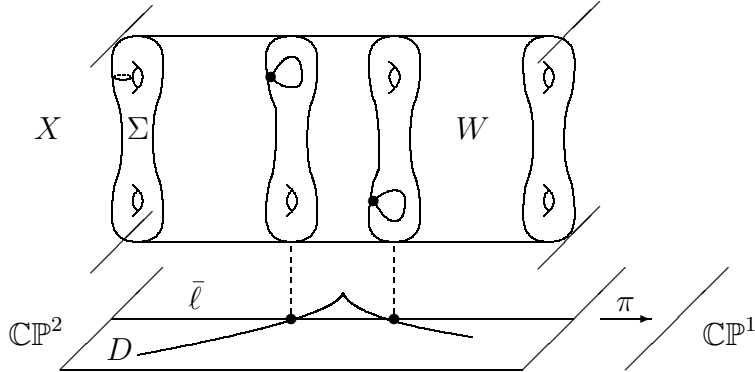
Théorème 4.1 ([AK]). *Pour k fixé suffisamment grand, les morphismes de monodromie (ρ_k, θ_k) associés aux revêtements ramifiés approximativement holomorphes $f_k : X \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ définis par trois sections de $L^{\otimes k}$ sont, à conjugaisons, opérations de Hurwitz et insertions ou suppressions près, des invariants de la variété symplectique (X^4, ω) . De plus, ces invariants sont complets, en ce sens que la donnée de ρ_k et de θ_k permet de reconstruire (X^4, ω) à symplectomorphisme près.*

Il est intéressant de mentionner que les pincesaux de Lefschetz symplectiques construits par Donaldson peuvent être réobtenus très facilement à partir des revêtements ramifiés f_k , simplement en considérant les applications composées $\pi \circ f_k$ à valeurs dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. Autrement dit, les fibres $\Sigma_{k,\alpha}$ du pinceau sont les préimages par f_k des fibres de π , les fibres singulières du pinceau correspondant aux points de tangence verticale de D_k . En fait, les morphismes de monodromie ψ_k des pincesaux de Lefschetz peuvent être construits de façon explicite à partir de θ_k et ρ_k : par

restriction à la droite $\bar{\ell} = \ell \cup \{\infty\}$, le morphisme θ_k à valeurs dans S_N décrit la topologie d'une fibre du pinceau en tant que revêtement ramifié de \mathbb{CP}^1 à N feuillettes et d points de ramification, ce qui permet de définir un *morphisme de relèvement* $(\theta_k)_*$ d'un sous-groupe de B_d à valeurs dans $\text{Map}(\Sigma_k, Z_k) = \text{Map}_{g,N}$. On a alors $\psi_k = (\theta_k)_* \circ \rho_k$ (cf. [AK], §5.2). Cette relation permet de tirer parti des diverses techniques disponibles pour le calcul de la monodromie de revêtements ramifiés [Mo2, Te1, ADKY], afin d'obtenir des formules explicites décrivant la monodromie de pinceaux de Lefschetz dans des cas qui ne sont pas accessibles au calcul direct (voir notamment [AK2]).

4.3. Monodromie d'applications projectives. Lorsque $\dim X > 4$, la topologie d'une application projective $f_k : X - Z_k \rightarrow \mathbb{CP}^2$ et la courbe discriminante $D_k \subset \mathbb{CP}^2$ peuvent être décrites de la même façon que pour un revêtement ramifié ; la seule différence est que le morphisme θ_k décrivant la monodromie de la fibration au-dessus du complémentaire de D_k prend désormais ses valeurs dans le "mapping class group" symplectique $\text{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$ de la fibre générique de f_k . Le Théorème 4.1 demeure vrai dans ce cadre [Au3]. Toutefois, ces invariants sont difficilement exploitables, notamment lorsque $\dim X \geq 8$, car le groupe $\text{Map}^\omega(\Sigma_k, Z_k)$ est très mal connu.

Cependant, il existe une procédure de réduction dimensionnelle qui permet d'éviter cet écueil. En effet, la restriction de f_k à la droite $\bar{\ell} \subset \mathbb{CP}^2$ définit un pinceau de Lefschetz sur une hypersurface symplectique $W_k \subset X$, de fibre générique Σ_k et de monodromie θ_k .



Cette structure peut être enrichie par ajout d'une section supplémentaire de $L^{\otimes k}$ de façon à obtenir une application de W_k dans \mathbb{CP}^2 , qui peut de nouveau être caractérisée par des invariants de monodromie, et ainsi de suite jusqu'en petite dimension. Au final, étant donnée une variété symplectique (X^{2n}, ω) et un entier $k \gg 0$, on obtient $n-1$ courbes singulières $D_k^{(n)}, D_k^{(n-1)}, \dots, D_k^{(2)} \subset \mathbb{CP}^2$, décrites par autant de morphismes à valeurs dans des groupes de tresses, et un morphisme $\theta_k^{(2)}$ de $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k^{(2)})$ dans un groupe symétrique. Ces invariants suffisent à reconstruire de proche en proche les différentes sous-variétés de X qui interviennent dans le processus de réduction, et en fin de compte ils déterminent la variété (X, ω) à symplectomorphisme près [Au3] :

Théorème 4.2 ([Au3]). *Pour k fixé suffisamment grand, les morphismes de monodromie $\rho_k^{(n)}, \dots, \rho_k^{(2)}$ à valeurs dans des groupes de tresses et $\theta_k^{(2)}$ à valeurs dans un groupe symétrique associés à des systèmes linéaires de sections de $L^{\otimes k}$ sont, à conjugaison, opérations de Hurwitz et insertions ou suppressions près, des invariants*

de la variété symplectique (X^{2n}, ω) . De plus, ces invariants sont complets : ils permettent de reconstruire (X^{2n}, ω) à symplectomorphisme près.

Cette stratégie d'étude semble beaucoup plus prometteuse que celle consistant à considérer directement des applications projectives à valeurs dans des espaces $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$ pour $m \geq 3$. En effet, même si les méthodes de monodromie continuent en principe à s'appliquer dans ce cadre, la courbe $D_k \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est alors remplacée par une hypersurface dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^m$, susceptible de présenter des singularités très compliquées et donc délicate à étudier.

4.4. Techniques de calcul. En principe, les Théorèmes 4.1 et 4.2 ramènent la classification des variétés symplectiques compactes à des questions purement combinatoires concernant les groupes de tresses et les groupes symétriques, et la topologie symplectique semble se réduire en grande partie à l'étude de certaines courbes planes singulières, ou de façon équivalente de certains mots dans des groupes de tresses.

Le calcul explicite de ces invariants de monodromie est difficile dans le cas général, mais est rendu possible pour un grand nombre de surfaces complexes par l'utilisation de techniques de "dégénération" et de perturbations approximativement holomorphes. Ainsi, les invariants définis par le Théorème 4.1 sont calculables explicitement pour divers exemples tels que $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$, $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ [Mo2], quelques intersections complètes (surfaces de Del Pezzo ou K3) [Ro], la surface d'Hirzebruch \mathbb{F}_1 , et tous les revêtements doubles de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ (parmi lesquels une famille infinie de surfaces de type général) [ADKY].

La technique de dégradation, développée par Moishezon et Teicher [Mo2, Te1], consiste à partir d'un plongement projectif de la surface complexe X et à déformer l'image de ce plongement en une configuration singulière X_0 constituée d'une union de plans s'intersectant le long de droites. La courbe discriminante d'une projection de X_0 sur $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ est donc une union de droites ; la façon dont une désingularisation de X_0 affecte cette courbe peut être étudiée explicitement, en considérant un certain nombre de modèles locaux standard au voisinage des divers points de X_0 où trois plans et plus s'intersectent. Ceci permet de traiter de nombreux exemples en petit degré, mais pour le cas $k \gg 0$ qui nous intéresse (systèmes linéaires très positifs) seules des surfaces très simples peuvent être abordées.

Pour aller au-delà, il est plus efficace de s'affranchir de la rigidité des applications algébriques, et de s'autoriser des perturbations approximativement holomorphes dont la flexibilité supérieure permet de choisir des modèles locaux plus accessibles au calcul. Il devient ainsi possible de calculer directement les invariants de monodromie pour tous les systèmes linéaires de la forme $f^*O(p, q)$ sur des revêtements doubles de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ ramifiés le long de courbes algébriques lisses connexes de degré arbitraire [ADKY]. Il devient également possible d'obtenir une formule générale de "stabilisation", qui décrit explicitement les invariants de monodromie associés au système linéaire $L^{\otimes 2k}$ en fonction de ceux associés au système linéaire $L^{\otimes k}$ (lorsque $k \gg 0$), pour les revêtements ramifiés de $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ comme pour les pinceaux de Lefschetz en dimension 4 [AK2].

Toutefois, malgré ces succès, un obstacle sérieux limite l'utilisation des invariants de monodromie en pratique : il n'est pas possible de les exploiter efficacement pour différencier deux variétés symplectiques homéomorphes en toute généralité, car il n'existe pas d'algorithme pour comparer deux mots dans un groupe de tresses (ou

dans un mapping class group) à opérations de Hurwitz près. Cet obstacle théorique oblige à se tourner vers des invariants moins complets mais plus maniables.

5. GROUPES FONDAMENTAUX DE COMPLÉMENTAIRES DE COURBES PLANES

Le groupe fondamental du complémentaire est un invariant qu'il est très naturel d'associer à une courbe plane singulière $D \subset \mathbb{CP}^2$, notamment dans le cas d'une courbe de ramification. Son étude pour divers types de courbes algébriques est un sujet classique depuis les travaux de Zariski, et a été beaucoup développée dans les années 80 et 90 grâce notamment aux travaux de Moishezon et Teicher [Mo1, Mo2, Te1]. La relation avec les invariants de monodromie est directe : grâce au théorème de Zariski-van Kampen, le morphisme de monodromie $\rho : \pi_1(\mathbb{C} - \{\text{pts}\}) \rightarrow B_d$ fournit une présentation explicite de $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D)$. Toutefois, comme l'introduction ou l'élimination de paires de points doubles affecte ce groupe fondamental, il ne peut être directement utilisé comme invariant pour un revêtement ramifié symplectique, et doit être remplacé par un quotient convenable, le *groupe fondamental stabilisé*, qui a été introduit et étudié dans un travail en commun avec S. Donaldson, L. Katzarkov et M. Yotov [ADKY].

En reprenant les notations du §4.2, l'inclusion $i : \ell - (\ell \cap D_k) \rightarrow \mathbb{CP}^2 - D_k$ de la fibre de référence de la projection linéaire π induit un morphisme surjectif sur les groupes fondamentaux; les images des générateurs standard du groupe libre et leurs conjugués forment un sous-ensemble $\Gamma_k \subset \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ dont les éléments sont appelés *générateurs géométriques*. Les images des générateurs géométriques par le morphisme θ_k sont des transpositions dans S_N . La création d'une paire de points doubles dans la courbe D_k revient à quotienter $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ par une relation de la forme $[\gamma_1, \gamma_2] \sim 1$, où $\gamma_1, \gamma_2 \in \Gamma_k$ sont tels que $\theta_k(\gamma_1)$ et $\theta_k(\gamma_2)$ sont des transpositions disjointes. On note K_k le sous-groupe normal de $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ engendré par tous ces commutateurs $[\gamma_1, \gamma_2]$.

Théorème 5.1 ([ADKY]). *Pour $k \gg 0$ fixé, le groupe fondamental stabilisé $\bar{G}_k = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)/K_k$ est un invariant de la variété symplectique (X^4, ω) .*

Cet invariant peut être calculé explicitement pour les divers exemples où les invariants de monodromie sont calculables (\mathbb{CP}^2 , $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$, intersections complètes Del Pezzo et K3, surface d'Hirzebruch \mathbb{F}_1 , revêtements doubles de $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$). Ces divers exemples ont servi de point de départ à diverses observations et conjectures concernant les groupes fondamentaux de complémentaires de courbes de ramification [ADKY].

Tout d'abord, il est à noter que, dans tous les exemples connus, pour k suffisamment grand l'opération de stabilisation devient triviale : $K_k = \{1\}$, c'est-à-dire que les générateurs géométriques associés à des transpositions disjointes commutent déjà dans $\pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$. Par exemple, lorsque $X = \mathbb{CP}^2$ on a $\bar{G}_k = \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k)$ pour tout $k \geq 3$. Le quotient par K_k ne semble donc pas engendrer de perte d'information, du moins pour $k \gg 0$ (la situation pour de petites valeurs de k pouvant être très différente).

Le principal résultat de structure est le suivant :

Théorème 5.2 ([ADKY]). *Il existe une suite exacte naturelle*

$$1 \longrightarrow G_k^0 \longrightarrow \bar{G}_k \longrightarrow S_n \times \mathbb{Z}_d \longrightarrow \mathbb{Z}_2 \longrightarrow 1,$$

où $n = \deg f_k$ et $d = \deg D_k$. De plus, si X est simplement connexe, alors il existe un morphisme surjectif naturel $\phi_k : G_k^0 \rightarrow (\mathbb{Z}^2/\Lambda_k)^{n-1}$, où

$$\Lambda_k = \{(c_1(K_X) \cdot \alpha, c_1(L^{\otimes k}) \cdot \alpha), \alpha \in H_2(X, \mathbb{Z})\}$$

est un sous-groupe de \mathbb{Z}^2 entièrement déterminé par les propriétés numériques de la classe symplectique et de la classe canonique.

Dans cet énoncé, les deux composantes du morphisme $\bar{G}_k \rightarrow S_n \times \mathbb{Z}_d$ sont respectivement données par la monodromie du revêtement ramifié, $\theta_k : \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k) \rightarrow S_n$, et le morphisme d'abélianisation $\delta_k : \pi_1(\mathbb{CP}^2 - D_k) \rightarrow H_1(\mathbb{CP}^2 - D_k, \mathbb{Z}) \simeq \mathbb{Z}_d$. Pour sa part, le morphisme ϕ_k est défini en considérant les n relèvements à X d'un lacet fermé γ élément de G_k^0 , ou plus précisément leurs classes d'homologie (dont la somme est nulle) dans le complémentaire d'une section hyperplane et de la courbe de ramification dans X .

En outre, les exemples connus incitent à formuler la conjecture suivante, beaucoup plus forte, sur la structure des sous-groupes G_k^0 :

Conjecture 5.3 ([ADKY]). *Si X est simplement connexe, alors pour k suffisamment grand le morphisme ϕ_k induit un isomorphisme au niveau de l'abélianisé, c'est-à-dire que $\text{Ab } G_k^0 \simeq (\mathbb{Z}^2/\Lambda_k)^{n-1}$, tandis que $\text{Ker } \phi_k = [G_k^0, G_k^0]$ est un quotient de $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$.*

6. VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES ET VARIÉTÉS KÄHLÉRIENNES

Il est bien connu depuis les années 70 que la topologie des variétés symplectiques compactes de dimension 4 offre une diversité beaucoup plus grande que celle des variétés kählériennes. D'autre part, il a été découvert plus récemment (dans les années 90) que les courbes symplectiques (lisses ou singulières) dans une variété donnée peuvent aussi présenter une plus vaste palette de possibilités que les courbes complexes, auxquelles elles ne sont pas toujours isotopes. Le Théorème 3.1 jette un pont entre ces deux phénomènes : en effet, un revêtement de \mathbb{CP}^2 (ou plus généralement d'une surface complexe) ramifié le long d'une courbe complexe hérite automatiquement d'une structure complexe, ce qui signifie que, à partir d'une variété symplectique n'admettant pas de structure kählérienne, le Théorème 3.1 fournit toujours des courbes de ramification qui ne sont isotopes à aucune courbe complexe dans \mathbb{CP}^2 . L'étude de ces phénomènes d'isotopie et de non-isotopie présente donc un intérêt majeur pour la compréhension de la topologie des variétés symplectiques de dimension 4. Des résultats ont été obtenus dans deux directions.

6.1. Phénomènes d'isotopie et de stabilisation. Le problème d'isotopie symplectique consiste à déterminer si, dans une variété donnée, toutes les sous-variétés symplectiques réalisant une classe d'homologie donnée sont isotopes à des sous-variétés complexes. Le premier résultat positif est dû à Gromov, qui a montré à l'aide de son résultat de compacité pour les courbes pseudo-holomorphes que, dans \mathbb{CP}^2 , une courbe symplectique lisse de degré 1 ou 2 est toujours isotope à une courbe complexe. Des améliorations successives de cette technique ont permis de traiter le cas de courbes lisses de degré supérieur dans \mathbb{CP}^2 ou dans $\mathbb{CP}^1 \times \mathbb{CP}^1$; le meilleur résultat connu actuellement est dû à Siebert et Tian, et permet de traiter le cas des courbes lisses de \mathbb{CP}^2 jusqu'en degré 17 [ST]. Des résultats sur certaines configurations singulières très simples sont également connus.

Au niveau des variétés symplectiques de dimension 4, la conséquence plus immédiate du phénomène d'isotopie symplectique est l'holomorphie de certaines fibrations de Lefschetz. Ainsi, la classification complète des fibrations de Lefschetz elliptiques (qui sont toutes holomorphes) est un résultat classique de Moishezon. Les fibrations de Lefschetz de genre 2 sont toutes hyperelliptiques, ce qui permet de les réaliser comme des revêtements doubles de surfaces réglées, ramifiés le long de courbes symplectiques intersectant la fibre en 6 points (la courbe de ramification est lisse si toutes les fibres singulières sont irréductibles ; en présence de fibres réductibles des transformations birationnelles sont nécessaires). Ceci a permis à Siebert et Tian de démontrer, grâce à leur résultat d'isotopie symplectique pour les courbes lisses dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^1 \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ et dans la surface d'Hirzebruch \mathbb{F}_1 , que toutes les fibrations de Lefschetz de genre 2 à fibres irréductibles et à monodromie transitive (i.e. dont la courbe de ramification est connexe) sont isomorphes à des fibrations holomorphes [ST].

Néanmoins, dans le cas où on autorise la présence de fibres singulières réductibles, cette propriété disparaît, et il existe des fibrations de Lefschetz symplectiques de genre 2 dont l'espace total n'est difféomorphe à aucune surface complexe [OS]. Il est alors naturel de se demander si une propriété plus faible demeure vraie, lorsque l'on autorise la stabilisation par sommes connexes fibrées avec certaines fibrations holomorphes. Dans le cas du genre 2, il suffit en fait de considérer la stabilisation par une seule fibration, la fibration holomorphe f_0 présentant 20 fibres singulières irréductibles et dont l'espace total est une surface rationnelle. Le résultat obtenu est le suivant :

Théorème 6.1 ([Au6]). *Soit $f : X \rightarrow S^2$ une fibration de Lefschetz de genre 2. Alors la somme fibrée de f avec un nombre suffisant de copies de la fibration holomorphe f_0 est isomorphe à une fibration holomorphe.*

De plus, cette somme fibrée $f \# n f_0$ ($n \gg 0$) est entièrement déterminée par son nombre total de fibres singulières et par le nombre de fibres singulières réductibles de chaque type (deux composantes de genre 1, ou composantes de genres 0 et 2).

Ce résultat conduit à formuler la question suivante : étant donné une fibration de Lefschetz symplectique (sans restriction sur le genre des fibres), est-il toujours possible, par sommes fibrées successives avec des fibrations holomorphes choisies parmi une liste finie de possibilités, de se ramener à une fibration holomorphe (éventuellement elle-même décomposable en un certain nombre de blocs simples) ? Une réponse à cette question améliorerait grandement notre compréhension de la structure des fibrations de Lefschetz symplectiques.

6.2. Phénomènes de non-isotopie, tressage et chirurgie de Luttinger. A l'inverse des cas d'isotopie décrits ci-dessus, la réponse au problème d'isotopie symplectique semble en général être négative. Les premiers contre-exemples connus dans le cas de courbes symplectiques lisses connexes sont dûs à Fintushel et Stern [FS], qui ont construit par un procédé de *tressage* des familles infinies de courbes symplectiques deux à deux non isotopes, réalisant une même classe d'homologie (multiple de la fibre) dans des surfaces elliptiques, et à Smith, qui a utilisé la même construction en genre supérieur. Toutefois, ces deux constructions sont précédées par un résultat de Moishezon [Mo3], qui a établi dès le début des années 90 un résultat qui donne l'existence dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ de familles infinies de courbes symplectiques

de degré fixé et possédant des cusps et points doubles en nombre fixé, deux à deux non isotopes ; une reformulation du résultat permet de voir qu'il s'agit encore une fois d'une construction de tressage. Dans un travail en commun avec Donaldson et Katzarkov, ce résultat de Moishezon a été réétudié et mis en relation avec une construction de chirurgie le long d'un tore lagrangien dans une variété symplectique de dimension 4, appelée *chirurgie de Luttinger* [ADK]. Ceci a permis de simplifier notablement l'argument de Moishezon, qui se basait sur de longs et délicats calculs de groupes fondamentaux de complémentaires de courbes, tout en le reliant à diverses constructions développées en topologie de la dimension 4.

Etant donné un tore lagrangien T plongé dans une variété symplectique (X^4, ω) , un lacet plongé homotopiquement non trivial $\gamma \subset T$ et un entier k , la chirurgie de Luttinger est une opération qui consiste à découper dans X un voisinage tubulaire de T , feuilleté par des tores lagrangiens parallèles à T , et à le recoller de telle sorte que le nouveau méridien diffère de l'ancien par k tours le long du lacet γ (tandis que les longitudes ne sont pas affectées), ce qui fournit une nouvelle variété symplectique $(\tilde{X}, \tilde{\omega})$. Cette construction relativement peu étudiée, qui permet notamment de passer d'un produit $T^2 \times \Sigma$ à n'importe quel fibré en surfaces au-dessus de T^2 , ou encore de transformer une somme fibrée classique en somme "twistée", permet de décrire de façon unifiée de nombreux exemples de variétés symplectiques de dimension 4 construits au cours de ces dernières années.

La construction de tressage de courbes symplectiques, quant à elle, part d'une courbe symplectique éventuellement singulière $\Sigma \subset (Y^4, \omega_Y)$ et de deux cylindres symplectiques plongés dans Σ pouvant être joints par un anneau lagrangien contenu dans le complémentaire de Σ , et consiste à effectuer k demi-torsions entre ces cylindres pour obtenir une nouvelle courbe symplectique $\tilde{\Sigma}$ dans Y . Dans le cas où Σ est la courbe de ramification d'un revêtement ramifié symplectique $f : X \rightarrow Y$, on a le résultat suivant :

Proposition 6.2 ([ADK]). *Le revêtement ramifié de Y le long de la courbe symplectique $\tilde{\Sigma}$ obtenue par tressage de Σ le long d'un anneau lagrangien $A \subset Y - \Sigma$ est naturellement symplectomorphe à la variété \tilde{X} construite à partir du revêtement ramifié X par chirurgie de Luttinger le long d'un tore lagrangien $T \subset X$ obtenu par relèvement de A .*

Ainsi, une fois construite une famille infinie de courbes symplectiques grâce au procédé de tressage, il ne reste plus qu'à trouver des invariants qui distinguent les revêtements ramifiés correspondants pour conclure à la non-isotopie des courbes construites. Dans la construction de Fintushel et Stern, ce rôle est joué par les invariants de Seiberg-Witten, dont le comportement est bien compris pour les fibrations elliptiques et leurs chirurgies.

Dans le cas des exemples de Moishezon, une construction de tressage permet, à partir de courbes complexes $\Sigma_{p,0} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ ($p \geq 2$) de degré $d_p = 9p(p-1)$ et comptant $\kappa_p = 27(p-1)(4p-5)$ cusps et $\nu_p = 27(p-1)(p-2)(3p^2+3p-8)/2$ points doubles, de construire des courbes symplectiques $\Sigma_{p,k} \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^2$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$, de même degré et avec les mêmes singularités. Grâce à la Proposition 6.2, ces courbes peuvent être vues comme les courbes de ramification de revêtements ramifiés symplectiques, dont les espaces totaux $X_{p,k}$ diffèrent par des chirurgies de Luttinger le long d'un tore lagrangien $T \subset X_{p,0}$. L'effet de ces chirurgies sur le fibré canonique et sur la forme symplectique peut être décrit explicitement, ce qui

permet de distinguer les variétés $X_{p,k}$: la classe canonique de $(X_{p,k}, \omega_{p,k})$ est donnée par $p c_1(K_{p,k}) = (6p - 9)[\omega_{p,k}] + (2p - 3)k PD([T])$. De plus, $[T] \in H_2(X_{p,k}, \mathbb{Z})$ n'est pas une classe de torsion, et si $p \not\equiv 0 \pmod{3}$ ou $k \equiv 0 \pmod{3}$ alors c'est une classe primitive [ADK]. Ceci implique que, parmi les courbes $\Sigma_{p,k}$, il en existe une infinité qui sont deux à deux non isotopes.

Il est à noter que l'argument utilisé par Moishezon pour distinguer les courbes $\Sigma_{p,k}$, qui repose sur le difficile calcul des groupes fondamentaux $\pi_1(\mathbb{C}\mathbb{P}^2 - \Sigma_{p,k})$ [Mo3], est mis en relation avec celui présenté ici par le biais de la Conjecture 5.3, dont on peut conclure *a posteriori* qu'elle est satisfaite par les revêtements ramifiés $X_{p,k}$.

Le fait que la plupart des exemples connus de courbes non-isotopes se réduisent à des constructions de tressage, et qu'un très grand nombre de constructions de variétés symplectiques par chirurgie puissent se reformuler en termes de chirurgies de Luttinger, incite à poser la question du rôle de cette construction dans la différenciation des variétés symplectiques par rapport aux variétés kählériennes. Ainsi, une réponse à la question de l'existence de variétés symplectiques compactes de dimension 4 ne pouvant pas être obtenues à partir de surfaces complexes par chirurgies de Luttinger successives et déformations ferait certainement progresser notre compréhension de la topologie symplectique en dimension 4.

BIBLIOGRAPHIE

- [Au1] D. Auroux, *Asymptotically holomorphic families of symplectic submanifolds*, Geom. Funct. Anal. **7** (1997), 971–995.
- [Au2] D. Auroux, *Symplectic 4-manifolds as branched coverings of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$* , Inventiones Math. **139** (2000), 551–602.
- [Au3] D. Auroux, *Symplectic maps to projective spaces and symplectic invariants*, Proc. 7th Gökova Geometry-Topology Conference (2000), Turkish J. Math. **25** (2001), 1–42 ([math.GT/0007130](#)).
- [Au4] D. Auroux, *Estimated transversality in symplectic geometry and projective maps*, “Symplectic Geometry and Mirror Symmetry”, Proc. 4th KIAS International Conference, Seoul (2000), World Sci., Singapore, 2001, pp. 1–30 ([math.SG/0010052](#)).
- [Au5] D. Auroux, *A remark about Donaldson's construction of symplectic submanifolds*, à paraître dans J. Symplectic Geom. ([math.DG/0204286](#)).
- [Au6] D. Auroux, *Fiber sums of genus 2 Lefschetz fibrations*, à paraître dans Turkish J. Math. ([math.GT/0204285](#)).
- [ADK] D. Auroux, S.K. Donaldson, L. Katzarkov, *Luttinger surgery along Lagrangian tori and non-isotopy for singular symplectic plane curves*, à paraître dans Math. Ann. ([math.GT/0206005](#)).
- [ADKY] D. Auroux, S.K. Donaldson, L. Katzarkov, M. Yotov, *Fundamental groups of complements of plane curves and symplectic invariants*, preprint ([math.GT/0203183](#)).
- [AGM] D. Auroux, D. Gayet, J.-P. Mohsen, *Symplectic hypersurfaces in the complement of an isotropic submanifold*, Math. Ann. **321** (2001), 739–754.
- [AK] D. Auroux, L. Katzarkov, *Branched coverings of $\mathbb{C}\mathbb{P}^2$ and invariants of symplectic 4-manifolds*, Inventiones Math. **142** (2000), 631–673.
- [AK2] D. Auroux, L. Katzarkov, *The degree doubling formula for braid monodromies and Lefschetz pencils*, en préparation.
- [ABKP] J. Amorós, F. Bogomolov, L. Katzarkov, T. Pantev, *Symplectic Lefschetz fibrations with arbitrary fundamental groups*, J. Differential Geom. **54** (2000), 489–545.
- [Bi] P. Biran, *Lagrangian barriers and symplectic embeddings*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), 407–464.
- [BU] D. Borthwick, A. Uribe, *Nearly Kählerian embeddings of symplectic manifolds*, Asian J. Math. **4** (2000), 599–620.

- [Do1] S. K. Donaldson, *Symplectic submanifolds and almost-complex geometry*, J. Differential Geom. **44** (1996), 666–705.
- [Do2] S.K. Donaldson, *Lefschetz fibrations in symplectic geometry*, Documenta Math., Extra Volume Int. Congress Math. 1998 (Berlin), II, 309–314.
- [Do3] S.K. Donaldson, *Lefschetz pencils on symplectic manifolds*, J. Differential Geom. **53** (1999), 205–236.
- [DS] S. Donaldson, I. Smith, *Lefschetz pencils and the canonical class for symplectic 4-manifolds*, preprint ([math.SG/0012067](#)).
- [EK] H. Endo, D. Kotschick, *Bounded cohomology and non-uniform perfection of mapping class groups*, Inventiones Math. **144** (2001), 169–175.
- [FS] R. Fintushel, R. Stern, *Symplectic surfaces in a fixed homology class*, J. Differential Geom. **52** (1999), 203–222.
- [GM] E. Giroux, J.-P. Mohsen, en préparation.
- [Go1] R. Gompf, *A new construction of symplectic manifolds*, Ann. Math. **142** (1995), 527–595.
- [Go2] R. Gompf, *A topological characterization of symplectic manifolds*, preprint ([math.SG/0210103](#)).
- [GS] R. Gompf, A.I. Stipsicz, *4-manifolds and Kirby calculus*, Graduate Studies in Math. **20**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999.
- [IMP] A. Ibort, D. Martínez-Torres, F. Presas, *On the construction of contact submanifolds with prescribed topology*, J. Differential Geom. **56** (2000), 235–283.
- [Mo1] B. Moishezon, *Stable branch curves and braid monodromies*, Algebraic Geometry (Chicago, 1980), Lecture Notes in Math. **862**, Springer, Heidelberg, 1981, pp. 107–192.
- [Mo2] B. Moishezon, *On cuspidal branch curves*, J. Algebraic Geom. **2** (1993), 309–384.
- [Mo3] B. Moishezon, *The arithmetic of braids and a statement of Chisini*, Geometric Topology (Haifa, 1992), Contemp. Math. **164**, Amer. Math. Soc., Providence, 1994, pp. 151–175.
- [OS] B. Ozbagci, A. Stipsicz, *Noncomplex smooth 4-manifolds with genus 2 Lefschetz fibrations*, Proc. Amer. Math. Soc. **128** (2000), 3125–3128.
- [Ro] A. Robb, *On branch curves of algebraic surfaces*, Singularities and Complex Geometry (Beijing, 1994), Amer. Math. Soc./Int. Press Stud. Adv. Math. **5**, Amer. Math. Soc., Providence, 1997, pp. 193–221.
- [Se] P. Seidel, *Vanishing cycles and mutation*, Proc. 3rd European Congress of Mathematics (Barcelona, 2000), Vol. II, Progr. Math. **202**, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 65–85 ([math.SG/0007115](#)).
- [ST] B. Siebert, G. Tian, *On the holomorphicity of genus two Lefschetz fibrations*, preprint.
- [Si] J.C. Sikorav, *Construction de sous-variétés symplectiques*, Séminaire Bourbaki n° 844, Astérisque **252** (1998), 231–253.
- [Sm1] I. Smith, *Lefschetz pencils and divisors in moduli space*, Geom. Topol. **5** (2001), 579–608.
- [Sm2] I. Smith, *Serre-Taubes duality for pseudoholomorphic curves*, preprint ([math.SG/0011223](#)).
- [Ta] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten and Gromov invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 221–238.
- [Te1] M. Teicher, *Braid groups, algebraic surfaces and fundamental groups of complements of branch curves*, Algebraic Geometry (Santa Cruz, 1995), Proc. Sympos. Pure Math., **62** (part 1), Amer. Math. Soc., Providence, 1997, pp. 127–150.
- [Te2] M. Teicher, *New invariants for surfaces*, Tel Aviv Topology Conference: Rothenberg Festschrift (1998), Contemp. Math. **231**, Amer. Math. Soc., Providence, 1999, pp. 271–281 ([math.AG/9902152](#)).