

INVARIANTS DE SEIBERG-WITTEN ET VARIÉTÉS SYMPLECTIQUES

Denis AUROUX

Ecole Normale Supérieure, 45 rue d'Ulm, 75005 Paris, France

e-mail : `auroux@clipper.ens.fr`

Directeur : Jean Pierre BOURGUIGNON

11 juillet 1995

1 Introduction

Une question essentielle de la topologie est la classification des variétés, qu'elles soient topologiques ou différentiables.

La classification en dimension 2 est connue depuis longtemps. A l'opposé, en dimension supérieure ou égale à 5, le théorème du h-cobordisme de Smale affirme que deux variétés h-cobordantes sont difféomorphes. En revanche, dans les dimensions intermédiaires 3 et 4, la situation est moins claire.

En dimension 4, la classification des variétés différentiables simplement connexes compactes (orientables) à *homéomorphisme* près se ramène à celle des formes quadratiques entières : deux variétés sont homéomorphes si et seulement si leurs formes d'intersection sont isomorphes. En revanche, bien que toute forme quadratique soit la forme d'intersection d'une variété topologique, il existe des formes qui ne peuvent être réalisées par une variété différentiable.

On sait depuis les travaux de Donaldson [DK] que certaines variétés topologiques n'admettent pas de structure différentiable, et qu'inversement deux variétés homéomorphes ne sont pas nécessairement difféomorphes.

Les polynômes de Donaldson, introduits au début des années 80, fournissent des invariants des variétés de dimension 4 qui vont au-delà de la seule information topologique, puisqu'ils permettent de différencier des variétés qui ont même forme d'intersection. Ces invariants, qui découlent de l'étude des connexions anti-autoduales, font intervenir le groupe de jauge non abélien $SU(2)$, ce qui les rend parfois délicats à manipuler.

Récemment (1994), Seiberg et Witten ont introduit de nouveaux invariants [W] dont l'utilisation est plus aisée. Ces invariants, et leurs propriétés dans le cadre des variétés symplectiques, sont l'objet du présent mémoire, qui s'inspire essentiellement des travaux de Taubes ([T3], [T4]) et d'un texte rédigé par Friedrich ([F]).

2 Structures Spin^c et spineurs

2.1 Structures Spin^c

Définition 2.1 - On appelle algèbre de Clifford de \mathbb{R}^n euclidien, notée Cl_n , le quotient de l'algèbre tensorielle $\mathcal{T}\mathbb{R}^n$ par l'idéal engendré par les $x \otimes x + \|x\|^2 \cdot 1$ pour $x \in \mathbb{R}^n$.

L'espace vectoriel \mathbb{R}^n se plonge dans Cl_n , et cette dernière est alors l'algèbre à unité engendrée par \mathbb{R}^n avec les relations $x \cdot x = -\|x\|^2$. Par polarisation, on a également pour x et y éléments de $\mathbb{R}^n \subset \text{Cl}_n$, $x \cdot y + y \cdot x = -2\langle x, y \rangle$.

L'algèbre Cl_n est \mathbb{Z}_2 -graduée et se subdivise en éléments de longueur paire (Cl_n^0) et impaire (Cl_n^1). En outre, l'application de l'algèbre extérieure $\Lambda^*\mathbb{R}^n$ dans Cl_n qui à $e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_p}$ associe $e_{i_1} \dots e_{i_p}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Enfin, on a le théorème de classification des algèbres complexifiées $\text{Cl}_n \otimes \mathbb{C}$:

Théorème 2.2 - $\text{Cl}_{2k} \otimes \mathbb{C} \cong \text{End}(\mathbb{C}^{2^k})$ et $\text{Cl}_{2k+1} \otimes \mathbb{C} \cong \text{End}(\mathbb{C}^{2^k}) \oplus \text{End}(\mathbb{C}^{2^k})$.

On définit alors le groupe $\text{Spin}(n) \subset \text{Cl}_n^0$ de la façon suivante.

Définition 2.3 - $\text{Spin}(n) = \{x_1 \dots x_{2r}, x_i \in \mathbb{R}^n, \|x_i\| = 1\}$.

Proposition 2.4 - Pour tout élément $q \in \text{Spin}(n)$ et $v \in \mathbb{R}^n$, $q \cdot v \cdot q^{-1} \in \mathbb{R}^n$. Ceci fournit une représentation $\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{End}(\mathbb{R}^n)$ définie par $\rho(q) \cdot v = q \cdot v \cdot q^{-1}$. L'image de ρ est exactement $\text{SO}(n)$, et son noyau est ± 1 . Via ρ , $\text{Spin}(n)$ est donc un revêtement double de $\text{SO}(n)$. En particulier si $n \geq 3$, c'est le revêtement universel de $\text{SO}(n)$.

On définit alors dans l'algèbre complexifiée le groupe $\text{Spin}^c(n)$.

Définition 2.5 - $\text{Spin}^c(n) = (\text{Spin}(n) \times S^1) / \{\pm 1\} \subset \text{Cl}_n \otimes \mathbb{C}$

On dispose d'une suite exacte

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}^c(n) \xrightarrow{\rho^c} \text{SO}(n) \times S^1 \rightarrow 1$$

donnée par $\rho^c([g, z]) = (\rho(g), z^2)$ où ρ désigne le revêtement à deux feuillets de $\text{SO}(n)$ par $\text{Spin}(n)$. Cette suite exacte permet de définir une spin^c structure comme un relèvement d'une $\text{SO}(n)$ -structure.

Définition 2.6 - Une spin^c -structure sur une variété riemannienne orientée X dotée du $\text{SO}(n)$ -fibré principal P des repères orthonormés directs est la donnée de :

(1) un S^1 -fibré principal $P_{U(1)}$ sur X , ou de façon équivalente via la représentation canonique de $U(1)$, un fibré en droites complexes L .

(2) un $\text{Spin}^c(n)$ -fibré principal Q sur X qui est, fibre par fibre, un revêtement double de $P \times_X P_{U(1)}$ via ρ^c .

On peut alors caractériser de la façon suivante les fibrés en droites L qui conviennent :

Proposition 2.7 - *Un fibré en droites L correspond à une structure spin^c sur X si et seulement si $c_1(L) \equiv w_2(P) \pmod{2}$ dans $H^2(X, \mathbb{Z}_2)$.*

Cette condition est beaucoup plus faible que l'existence d'une structure spin . On peut montrer à l'aide du théorème des coefficients universels que sur une variété compacte orientable de dimension 4, $w_2(P)$ est toujours la réduction modulo 2 d'une classe entière, ce qui implique l'existence d'une structure spin^c .

2.2 Fibré des spineurs

Soit X une variété de dimension paire $n = 2k$ munie d'une structure spin^c . $\text{Spin}^c(n) \subset \text{Cl}_n \otimes \mathbb{C} \cong \text{End}(\Delta_n)$ par le théorème 2.2. $\text{Spin}^c(n)$ possède donc une représentation $\kappa : \text{Spin}^c(n) \rightarrow \text{U}(\Delta_n)$, où Δ_n est un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension 2^k . La représentation κ est la restriction de la représentation irréductible $\text{Cl}_n \otimes \mathbb{C} \rightarrow \text{End}(\Delta_n)$ (on appelle cette action sur Δ_n la multiplication de Clifford). Il est important de noter qu'à cause de l'isomorphisme d'espaces vectoriels exhibé plus haut, l'algèbre extérieure agit aussi par multiplication de Clifford.

La représentation κ permet d'associer au fibré principal Q un fibré vectoriel complexe S de rang 2^k appelé *fibré des spineurs*. Les éléments de l'algèbre de Clifford, ainsi que les formes différentielles, agissent sur S par multiplication de Clifford.

Soit maintenant l'élément $v = i^k . e_1 . e_2 . \dots . e_n$ de $\text{Cl}_n \otimes \mathbb{C}$. On a $v^2 = 1$, donc la multiplication de Clifford par v admet les deux valeurs propres ± 1 . L'élément v commute avec tous les éléments pairs de l'algèbre de Clifford, et anticommute avec les éléments impairs, et donc les deux sous-espaces propres, qui sont chacun de dimension 2^{k-1} , sont stables par les éléments pairs et sont échangés par les éléments impairs. En particulier, comme $\text{Spin}^c(n) \subset \text{Cl}_n^0 \otimes \mathbb{C}$, la représentation κ de Spin^c se scinde en deux sous-représentations κ^\pm dont on peut montrer qu'elles sont irréductibles.

Le fibré des spineurs se décompose en $S = S^+ \oplus S^-$, S^\pm correspondant à la représentation κ^\pm de $\text{Spin}^c(n)$, c'est-à-dire que v agit par $+1$ sur S^+ et -1 sur S^- . Les éléments pairs de l'algèbre de Clifford préservent cette décomposition, tandis que les éléments impairs permutent les deux facteurs.

Dans le cas de la dimension 4, S^+ et S^- sont des fibrés complexes de rang 2. Une propriété remarquable de l'action de Spin^c sur S^+ est que la multiplication de Clifford par $g . e^{i\theta}$ où $g \in \text{Spin}$ a pour déterminant $e^{2i\theta}$, ce qui correspond précisément au second facteur de la projection π de Q sur $P \times P_{U(1)}$. On a donc $L = \det(S^+)$.

On a d'autre part une décomposition $\Lambda^2 \mathbb{R}^4 = \Lambda^+ \oplus \Lambda^-$ en formes autoduales et anti-autoduales donnée par l'opérateur de Hodge $*$ qui est l'involution de Λ^2 définie par $*(e_i \wedge e_j) = e_k \wedge e_l$ lorsque (e_i, e_j, e_k, e_l) est une base orthonormée directe de \mathbb{R}^4 . Pour $\alpha \in \Lambda^+$, $\int \alpha \wedge \alpha = \int \alpha \wedge * \alpha = \int |\alpha|^2$. Pour $\beta \in \Lambda^-$, $\int \beta \wedge \beta = - \int \beta \wedge * \beta = - \int |\beta|^2$. Et alors $\int \alpha \wedge \beta = \int \langle \alpha, * \beta \rangle = - \int \langle \alpha, \beta \rangle = - \int \langle \beta, * \alpha \rangle = - \int \beta \wedge \alpha$, donc cette intégrale est nulle. Enfin on peut remarquer qu'une forme autoduale (ou antiautoduale) fermée vérifie $d^* \omega = 0$, et est

automatiquement harmonique. De plus la projection sur Λ^\pm d'une forme harmonique est harmonique, donc toute 2-forme harmonique se décompose en une partie autoduale et une partie antiautoduale. A cause de la correspondance entre classes de cohomologie et formes harmoniques, la même décomposition s'applique à l'espace de cohomologie H^2 qui s'écrit $H^2 = H^{2,+} \oplus H^{2,-}$. On note b_2^\pm la dimension de $H^{2,\pm}$.

La décomposition $S = S^+ \oplus S^-$ est compatible avec la décomposition de Hodge, en ce sens qu'une forme anti-autoduale agit sur S^+ comme 0. En effet, si on considère par exemple $e_1 \cdot e_2 - e_3 \cdot e_4$, par multiplication à gauche par l'élément inversible $e_2 \cdot e_1$ on obtient $1 - v$ dont le noyau est précisément S^+ . On a donc $\Lambda^- \cdot S^+ = 0$ et de même $\Lambda^+ \cdot S^- = 0$.

3 Opérateur de Dirac

Soit une spin^c-structure Q sur une variété X de dimension n , correspondant à une projection $\pi : Q \rightarrow P \times P_{U(1)}$. Si on se fixe une connexion A sur $P_{U(1)}$ (ce qu'on notera $A \in \mathcal{C}(P_{U(1)})$), A et la connexion de Levi-Civita sur X induisent une connexion sur Q , et donc une dérivation covariante ∇^A sur les sections de S .

Définition 3.1 - On appelle opérateur de Dirac sur le fibré des spineurs S , associé à la connexion A , l'opérateur $D_A : \Gamma(S) \rightarrow \Gamma(S)$ défini par

$$D_A \Phi = \sum_{i=1}^n e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Phi$$

où (e_i) désigne une base orthonormée quelconque.

Proposition 3.2 - L'opérateur D_A est un opérateur différentiel elliptique d'ordre 1, formellement autoadjoint.

(On rappelle qu'un opérateur est dit formellement autoadjoint lorsqu'il vérifie $\int \langle D\phi, \psi \rangle = \int \langle \phi, D\psi \rangle$).

De plus l'opérateur D_A envoie S^+ sur S^- et réciproquement. On notera D_A^\dagger sa restriction à $\Gamma(S^+) \rightarrow \Gamma(S^-)$ (resp. $D_A^- : \Gamma(S^-) \rightarrow \Gamma(S^+)$).

Soit A une forme de connexion sur $P_{U(1)}$, et $F_A = dA$ sa courbure, qui est une 2-forme sur X à valeurs imaginaires pures. On a notamment $c_1(L) = \frac{i}{2\pi} F_A$ (on prend cette définition de la classe de Chern au lieu de la définition plus usuelle $c_1(L) = \frac{1}{2i\pi} F_A$ afin d'avoir égalité entre classe de Chern et classe d'Euler et de pouvoir la calculer à partir des zéros d'une section. Voir [LB]).

Proposition 3.3 (formule de Weitzenböck) - Pour toute section Φ de S , on a l'égalité

$$D_A^2 \Phi = (\nabla^A)^* \nabla^A \Phi + \frac{R}{4} \Phi + \frac{1}{2} F_A \cdot \Phi$$

où R désigne la courbure scalaire de X , et F_A agit par multiplication de Clifford $F_A \cdot \phi = \sum_{i < j} F_A(e_i, e_j) e_i \cdot e_j \cdot \phi$.

L'indice de l'opérateur $D_A^+ : \Gamma(S^+) \rightarrow \Gamma(S^-)$ peut alors être calculé grâce au théorème de l'indice d'Atiyah-Singer.

Théorème 3.4 - *Si on note c la classe de Chern $c_1(L)$ du fibré L , l'indice sur \mathbb{C} de D_A^+ , $\text{Ind}(D_A^+) = \dim \text{Ker}(D_A^+) - \dim \text{Coker}(D_A^+)$, vérifie*

$$\text{Ind}(D_A^+) = (e^{c/2} \cdot \hat{A}(X)) \cdot [X].$$

En dimension 4 on a $\hat{A}(X) = 1 - \frac{1}{24}p_1(X)$, d'où on déduit $\text{Ind}(D_A^+) = \frac{1}{8}c^2 - \frac{1}{24}p_1$. De plus le théorème de la signature d'Hirzebruch affirme que la signature de X , soit $\sigma = b_2^+ - b_2^-$, vérifie $\sigma = \frac{1}{3}p_1(X) \cdot [X]$, et donc

$$\text{Ind}(D_A^+) = \frac{1}{8}(c^2 - \sigma).$$

4 Les invariants de Seiberg-Witten

4.1 Les équations de Seiberg-Witten

Soit X une variété orientée de dimension 4 (compacte), munie d'une structure spin^c caractérisée par le fibré en droites $L = \det(S^+)$.

Définition 4.1 - *Pour ϕ section de S^+ , on pose*

$$\omega^\phi(x, y) = \langle x \cdot y \cdot \phi, \phi \rangle + \langle x, y \rangle |\phi|^2$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire hermitien (antilinéaire en le premier facteur) sur S^+ .

Un simple calcul donne alors la proposition suivante.

Proposition 4.2 - *La 2-forme ω^ϕ est alternée, à valeurs imaginaires pures, et autoduale. De plus on a $\langle \omega^\phi \cdot \phi, \phi \rangle = |\omega^\phi|^2 = 2|\phi|^4$.*

Définition 4.3 - *L'équation de Seiberg-Witten est l'équation suivante qui relie une connexion A sur L et une section Φ de S^+ :*

$$\begin{cases} D_A \Phi = 0 \\ F_A^+ = \frac{1}{4} \omega^\Phi \end{cases} \quad (4.1)$$

où F_A^+ désigne la projection sur Λ^+ de la courbure F_A de la connexion A .

On a le résultat suivant, qui implique l'absence de solutions non triviales sur les variétés à courbure scalaire positive :

Proposition 4.4 - *Soit (A, Φ) une solution de (4.1), et soit R la courbure scalaire de X , et R_{\min} son minimum sur X , alors en tout point on a*

$$|\Phi(x)|^2 \leq \max(-R_{\min}, 0)$$

DÉMONSTRATION : En un point où $|\Phi|^2$ est maximal, on a $0 \leq \Delta|\Phi|^2 = 2\langle(\nabla^A)^*\nabla^A\Phi, \Phi\rangle - 2|\nabla^A\Phi|^2 \leq 2\langle(\nabla^A)^*\nabla^A\Phi, \Phi\rangle = 2\langle(-\frac{R}{4}\Phi, \Phi) - \frac{1}{2}\langle F_A\Phi, \Phi\rangle\rangle = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 - \langle F_A^+\Phi, \Phi\rangle = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 - \frac{1}{4}\langle\omega^\Phi, \Phi, \Phi\rangle = -\frac{R}{2}|\Phi|^2 - \frac{1}{2}|\Phi|^4$ et donc si $|\Phi|^2 \neq 0$, $|\Phi|^2 + R \leq 0$, d'où le résultat. \square

On considère maintenant l'action du groupe de jauge $\mathcal{G} = \text{Map}(X, S^1) = \text{Aut}(P_{U(1)})$. Soit une transformation de jauge $f \in \mathcal{G}$. La forme de connexion est transformée par f selon la formule classique $f^*A = A + \pi^*\frac{df}{f}$.

Proposition 4.5 - *Si (A, Φ) est solution de (4.1), alors $(f^*(A), f^{-1}\Phi)$ aussi. Le groupe de jauge agit donc sur l'espace des solutions.*

DÉMONSTRATION : On a $\nabla_t^{f^*A}\Phi - \nabla_t^A\Phi = \frac{df \cdot t}{f}\Phi$ d'où pour l'opérateur de Dirac $D_{f^*A}\Phi - D_A\Phi = \frac{1}{f}\text{grad}(f) \cdot \Phi$. On a donc $D_{f^*A}(\frac{1}{f}\Phi) = D_A(\frac{1}{f}\Phi) + \frac{1}{f}\text{grad}(f) \cdot (\frac{1}{f}\Phi) = (\frac{1}{f}D_A\Phi - \frac{1}{f^2}\text{grad}(f) \cdot \Phi) + \frac{1}{f^2}\text{grad}(f) \cdot \Phi = \frac{1}{f}D_A\Phi$. L'un est nul si et seulement si l'autre l'est.

La courbure est un tenseur, donc $F_{f^*A} = F_A$, or $\omega^{\frac{1}{f}\Phi} = \frac{1}{|f|^2}\omega^\Phi = \omega^\Phi$, donc la deuxième équation reste vérifiée. \square

Définition 4.6 - *Soit X une variété riemannienne compacte orientée de dimension 4, et L un fibré en droites complexes muni d'un produit scalaire hermitien. On appelle espace des modules*

$$\mathfrak{M}_L = \{(\Phi, A) \in \Gamma(S^+) \times \mathcal{C}(P_{U(1)}) : D_A\Phi = 0, F_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi\}/\mathcal{G}.$$

Il est à noter que \mathcal{G} agit librement sur l'espace des solutions, sauf lorsque $\Phi \equiv 0$ (solutions dites "triviales"). En effet si $f \in \mathcal{G}$ agit trivialement, $f^*A = A$ implique que $df = 0$, donc f est la multiplication par une constante, et $f^{-1}\Phi = \Phi$ implique $f \equiv 1$. Il est donc intéressant de perturber l'équation (4.1) afin d'éviter les solutions triviales.

Définition 4.7 - *L'équation de Seiberg-Witten perturbée est*

$$\begin{cases} D_A\Phi = 0 \\ F_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\Phi + \mu \end{cases} \quad (4.2)$$

où μ est une 2-forme autoduale à valeurs imaginaires pures.

La théorie pour l'équation perturbée est préférable en ce sens qu'un choix générique de μ permet souvent d'éliminer les problèmes qui peuvent apparaître dans le cas $\mu = 0$. Pour l'équation (4.2) on définit bien évidemment de même l'espace des modules $\mathfrak{M}_{L,\mu}$. On omettra souvent par la suite de préciser la dépendance en L et en μ .

On utilisera par la suite la formule suivante.

Lemme 4.8 - *La linéarisation des équations (4.1) ou (4.2) en une solution est*

$$P_{(\Phi, A)}^1(\psi, \eta) = (\eta \cdot \Phi + D_A \psi, (d\eta)^+ - \frac{1}{4} \omega^{\Phi, \psi})$$

où $\omega^{\Phi, \psi}$ est la variation de ω^Φ avec Φ .

DÉMONSTRATION : En effet le seul terme à expliquer est $\eta \cdot \Phi$, qui vient de $D_{A_t} \Phi - D_A \Phi = \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i}^{A_t} \Phi - \sum_i e_i \cdot \nabla_{e_i}^A \Phi = \sum_i e_i \cdot t\eta(e_i) \Phi = t\eta \cdot \Phi$. \square

4.2 Indépendance vis-à-vis des paramètres

Étudions maintenant la dépendance en μ et en la métrique g sur X des solutions des équations (4.1) et (4.2), et tout particulièrement l'existence de solutions triviales ($\Phi \equiv 0$).

La condition d'existence de solutions triviales pour (4.1) s'écrit $F_A \in \Lambda^-$. Lorsque L est trivial, il peut exister des solutions triviales. Lorsque L n'est pas trivial, la condition d'existence de solution triviales est l'appartenance de la classe de cohomologie non nulle $c_1(L)$ à $H^{2,-}$. Or $H^{2,-}$, lorsque la métrique varie, décrit les sous-espaces négatifs maximaux pour la forme d'intersection. Donc si $c_1(L) \cdot c_1(L) \geq 0$, il n'y a jamais de solutions triviales, et dans le cas contraire la condition d'existence de solutions triviales est de codimension b_2^+ . Pour (4.2) la situation est similaire.

En ce qui concerne la dépendance en μ dans (4.2), les solutions triviales correspondent aux connexions $A_0 + \eta$ telles que $(d\eta)^+ = \mu - F_{A_0}^+$. La condition d'existence de solutions triviales est donc $\mu - F_{A_0}^+ \in \text{Im}(d^+)$, qui est de codimension b_2^+ dans Λ^+ (voir lemme 4.11). Les solutions triviales de (4.2) n'existent donc que si μ est dans un sous-espace de codimension b_2^+ . On en déduit le théorème suivant.

Théorème 4.9 - *On suppose que $b_2^+ \geq 1$. Pour un choix générique de μ , l'équation (4.2) n'a pas de solutions avec $\Phi \equiv 0$. Le terme "générique" signifie ici en dehors d'un espace de codimension b_2^+ .*

Si on suppose de plus que L n'est pas trivial, alors pour un choix générique de métrique, (4.1) et (4.2) n'ont pas de solutions avec $\Phi \equiv 0$.

Dans le cas où $b_2^+ = 1$, l'espace des métriques (ou des μ) qui conviennent n'est pas connexe, ce qui fait que les constructions ne dépendent pas que de la structure différentiable sur X mais aussi de la métrique choisie. Pour simplifier, on supposera donc en pratique que $b_2^+ \geq 2$, l'espace des paramètres g et μ convenables étant alors connexe, on pourra définir à partir de \mathfrak{M} des invariants qui ne dépendent que de la structure différentielle de X .

L'espace \mathfrak{M} est naturellement muni d'une structure de variété analytique réelle. Le problème est que cette variété n'est pas toujours lisse ; pour prouver qu'elle l'est génériquement, on introduit un espace paramétré défini de la façon suivante. Soit \mathcal{U} l'ouvert des μ tels que (4.2) n'a pas de solutions triviales. D'après ce qui précède, \mathcal{U} est dense et connexe pour $b_2^+ \geq 2$. On considère alors

l'espace paramétré $\mathcal{M} = \{(\Phi, A, \mu) \in \Gamma(S^+) \times \mathcal{C}(P_{U(1)}) \times \mathcal{U} : \theta(\Phi, A, \mu) = 0\} / \mathcal{G}$ où $\theta(\Phi, A, \mu) = (D_A \Phi, F_A^+ - \frac{1}{4} \omega^\Phi - \mu)$.

L'application θ est une submersion. En effet soit x un élément quelconque de $\Gamma(S^-) \times \Gamma(\Lambda^+)$. La projection de la différentielle $D\theta$ de θ sur le premier facteur, qui est $(\phi, \eta, \nu) \mapsto D_A \phi + \eta \cdot \Phi$ (lemme 4.8), est surjective à cause du terme $\eta \cdot \Phi$. Donc il existe x_0 dans l'image de $D\theta$ tel que $y = x - x_0$ puisse s'écrire sous la forme $y = (0, \nu)$. Comme $D\theta(0, 0, \nu) = (0, \nu)$ on en déduit que $y \in \text{Im}(D\theta)$ et donc $x \in \text{Im}(D\theta)$ ce qui donne le résultat. On en déduit que \mathcal{M} est une variété lisse puisque \mathcal{G} agit librement pour $\mu \in \mathcal{U}$.

En appliquant le théorème de Sard à la projection de \mathcal{M} sur le troisième facteur $\pi : [\Psi, A, \mu] \mapsto \mu$ (où $[\Psi, A, \mu]$ désigne la classe de (Ψ, A, μ) modulo \mathcal{G}), on obtient que pour presque tout μ , $\mathfrak{M}_{L, \mu}$ est un niveau non critique et donc une variété lisse. Montrons que si \mathfrak{M}_{L, μ_1} et \mathfrak{M}_{L, μ_2} sont lisses, ils sont cobordants. Pour cela, on remarque que l'opérateur linéarisé P^1 correspondant à (4.1) a une image de codimension finie, car $P^1 \oplus d^*$ qui est elliptique (il a le même symbole principal que $(D_A, d^+ \oplus d^*)$) a une image de codimension finie, d'où par projection le résultat pour P^1 . On peut alors choisir un supplémentaire de dimension finie de l'image de P^1 , et donc se limiter à des paramètres μ dans un ouvert connexe d'un espace vectoriel de dimension finie, \mathcal{V} inclus dans \mathcal{U} , contenant μ_1 et μ_2 , tout en conservant la propriété de submersion ($\mathcal{M} \cap \pi^{-1}(\mathcal{V})$ est donc toujours lisse). Par connexité de \mathcal{V} , on a un chemin γ joignant μ_1 à μ_2 . On peut construire une fonction f sur \mathcal{V} dont la ligne de niveau correspondant à la valeur ϵ proche de 0 est au voisinage de γ un chemin qu'on note γ_ϵ , passant en $\mu_{1, \epsilon}$ et $\mu_{2, \epsilon}$ (ces deux points étant proches de μ_1 et μ_2 respectivement). Par le théorème de Sard appliqué à $f \circ \pi$, on peut trouver ϵ aussi proche de 0 que voulu tel que $\pi^{-1}(\gamma_\epsilon)$ soit lisse, ce qui prouve que $\mathfrak{M}_{L, \mu_{1, \epsilon}}$ et $\mathfrak{M}_{L, \mu_{2, \epsilon}}$ sont cobordants. Or en dimension finie les points critiques constituent un fermé, donc au voisinage de \mathfrak{M}_{L, μ_1} et \mathfrak{M}_{L, μ_2} , π n'a pas de points critiques, d'où on déduit en utilisant la compacité de \mathfrak{M} (qui sera l'objet du théorème 4.13) que pour ϵ assez petit \mathfrak{M}_{L, μ_i} est difféomorphe à $\mathfrak{M}_{L, \mu_{i, \epsilon}}$ ce qui achève la preuve. \square

Les \mathfrak{M} obtenus pour différents μ convenables sont donc cobordants, et on peut donc définir des invariants à partir de \mathfrak{M} qui ne dépendent que de la structure différentielle sur X .

4.3 Dimension de \mathfrak{M}

On va maintenant calculer la dimension virtuelle de \mathfrak{M} (c'est à dire sa dimension si $\mathfrak{M} \neq \emptyset$). Pour cela on remarque que l'espace tangent à \mathfrak{M} est défini à partir du complexe elliptique obtenu en linéarisant l'équation (4.1).

La linéarisation de l'action de \mathcal{G} en une solution de (4.1) est

$$P_{(\Phi, A)}^0(h) = (-h\Phi, dh)$$

En effet, si (f_t) est une famille de transformations de jauge vérifiant $f_0 = 1$ et $\frac{d}{dt} f_t|_{t=0} = h$, on a, en $t = 0$, $\frac{d}{dt}(f_t^* A - A) = \frac{d}{dt}(\frac{df_t}{f_t}) = dh$, et $\frac{d}{dt}(\frac{1}{f_t} \Phi) = -h\Phi$.

L'opérateur associé à la linéarisation des équations (4.1) est $P_{(\Phi, A)}^1$ donné par le lemme 4.8.

Définition 4.10 - On appelle indice d'un complexe elliptique $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0$ la somme alternée des dimensions des espaces de cohomologie de ce complexe, $\text{Ind} = \dim(\mathcal{H}^0) - \dim(\mathcal{H}^1) + \dim(\mathcal{H}^2)$, ou de façon équivalente l'indice de l'opérateur $f \oplus g^* : A \oplus C \rightarrow B$.

L'indice d'un opérateur ne dépend que de sa partie principale, donc le complexe elliptique

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{P_{(\Phi,A)}^0} \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{P_{(\Phi,A)}^1} \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^+)$$

a le même indice que

$$\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{(0,d)} \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{(D_A, d^+)} \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^+)$$

qui se décompose comme la somme directe des complexes $\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{d^+} \Gamma(\Lambda^+)$ et $0 \rightarrow \Gamma(S^+) \xrightarrow{D_A} \Gamma(S^-)$. L'indice de ce dernier complexe est l'opposé de l'indice sur \mathbb{R} de l'opérateur de Dirac, qui est le double de l'indice sur \mathbb{C} , lequel vaut par le théorème de l'indice $\frac{1}{8}(c_1(L)^2 - \sigma)$. L'indice du deuxième complexe est donc $\frac{1}{4}(\sigma - c_1(L)^2)$. Reste à calculer l'indice du premier complexe.

Lemme 4.11 - L'indice de $\Gamma(\Lambda^0) \xrightarrow{d} \Gamma(\Lambda^1) \xrightarrow{d^+} \Gamma(\Lambda^+)$ est $\frac{1}{2}(\chi + \sigma) = b_0 - b_1 + b_2^+$.

DÉMONSTRATION : On a clairement $\mathcal{H}^0 = H^0(X, \mathbb{R})$. Si on note en indice de chaque opérateur le rang des formes sur lesquelles il opère, on calcule $\mathcal{H}^2 = \text{Coker}(d_1 + *d_1)_{\Lambda^+} = \text{Ker}((d_1 + *d_1)^*) \cap \Lambda^+$, or $d_1^* = *d_2^*$ et $(*d_1)^* = d_1^* = *d_2$ qui coïncident sur Λ^+ , donc $\mathcal{H}^2 = \text{Ker}(*d_2) \cap \Lambda^+ = \text{Ker}(d_2) \cap \Lambda^+ = H^2 \cap \Lambda^+$, dont la dimension est par définition b_2^+ .

Enfin $\mathcal{H}^1 = \text{Ker}(d_1^*) \cap \text{Ker}(d_1 + *d_1)$; or si $x \in \text{Ker}(d_1 + *d_1)$, alors $d_1 x \in \Lambda^-$ et $d_1 x \in \text{Ker}(d_2)$, et donc $d_1 x \in \text{Ker}(d_2^*) = \text{Im}(d_1)^\perp$ ce qui entraîne $d_1 x = 0$. Donc $\mathcal{H}^1 = \text{Ker}(d_1^*) \cap \text{Ker}(d_1) = H^1$ est de dimension b_1 . \square

Si on choisit pour μ une valeur régulière de la projection π définie plus haut, l'espace des modules \mathfrak{M} est lisse et son espace tangent est donné par $T\mathfrak{M} = \text{Ker}(P_{(\Phi,A)}^1)/\text{Im}(P_{(\Phi,A)}^0)$, c'est-à-dire le \mathcal{H}^1 du complexe linéarisé. Pour calculer la dimension virtuelle de \mathfrak{M} (c'est-à-dire sa dimension dans le cas où $\mathfrak{M} \neq \emptyset$), on remarque tout d'abord que l'absence de solution réductible implique l'injectivité de $P_{(\Phi,A)}^0$, d'où on déduit $\mathcal{H}^0 = 0$.

De plus on va montrer que $P_{(\Phi,A)}^1$ est surjectif dans notre cas. En effet, on a vu plus haut que l'opérateur $\theta : (\Phi, A, \mu) \mapsto (D_A \Phi, F_A^+ - \frac{1}{4}\omega^\Phi - \mu)$ est une submersion. Si on se donne $(\xi, \alpha) \in \Gamma(S^-) \oplus \Gamma(\Lambda^+)$, il existe donc $(\psi, \eta, \nu) \in \Gamma(S^+) \oplus \Gamma(\Lambda^1) \oplus \Gamma(\Lambda^+)$ tel que $D\theta(\psi, \eta, \nu) = P_{(\Phi,A)}^1(\psi, \eta) - (0, \nu) = (\xi, \alpha)$. D'autre part, comme on a supposé que le paramètre μ est une valeur régulière de π , l'image de $D\pi$ contient ν . Donc il existe $\phi \in \Gamma(S^+)$ et $\beta \in \Gamma(\Lambda^1)$ tels que la classe de (ϕ, β, ν) modulo \mathcal{G} soit tangente à l'espace des modules paramétré \mathcal{M} . On a donc $D\theta(\phi, \beta, \nu) = 0$, d'où l'on déduit que $D\theta(\psi - \phi, \eta - \beta, 0) =$

$P_{(\Phi, A)}^1(\psi - \phi, \eta - \beta) = (\xi, \alpha)$. L'opérateur $P_{(\Phi, A)}^1$ est donc surjectif, et donc le complexe associé aux équations de Seiberg-Witten vérifie, lorsque l'espace des modules est lisse, $\mathcal{H}^2 = 0$.

Il en découle que la dimension virtuelle de l'espace des modules, qui est égale à la dimension de \mathcal{H}^1 , est égale à l'opposé de l'indice du complexe linéarisé. On déduit de tout ce qui précède le résultat suivant.

Théorème 4.12 - *La dimension virtuelle d de l'espace des modules \mathfrak{M} est*

$$d = -\frac{1}{4}(2\chi + 3\sigma) + \frac{1}{4}c_1(L)^2. \quad (4.3)$$

4.4 Invariants de Seiberg-Witten

Comme les invariants de variétés non orientées sont peu précis (il n'existe que deux variétés de dimension 0 distinctes !), il est nécessaire d'orienter \mathfrak{M} . Ceci peut être effectué en orientant les droites déterminants des divers complexes elliptiques. La partie correspondant à l'opérateur de Dirac D_A est canoniquement orientée puisque cet opérateur est \mathbb{C} -linéaire. Une orientation de \mathfrak{M} est donc fixée par un choix d'orientation de la droite réelle

$$\det(H^0(X, \mathbb{R})) \otimes \det(H^1(X, \mathbb{R})) \otimes \det(H^{2,+}(X, \mathbb{R})). \quad (4.4)$$

Ceci affine considérablement les invariants (en dimension 0, on peut désormais compter les points en leur attribuant des signes ± 1).

On a d'autre part le théorème suivant :

Théorème 4.13 - *\mathfrak{M} est compact.*

DÉMONSTRATION : La proposition 4.4 fournit une borne sur Φ , donc sur ω^Φ , dont découle directement une borne sur F_A^+ . L'égalité $c_1(L)^2 = \frac{1}{4\pi^2} \int iF_A \wedge iF_A$ fournit alors une borne sur F_A^- . En effet on calcule $\int i(F_A^+ + F_A^-) \wedge i(F_A^+ + F_A^-) = \int iF_A^+ \wedge iF_A^+ + 2 \int iF_A^+ \wedge iF_A^- + \int iF_A^- \wedge iF_A^-$, or on a vu à la section 2.2 que le premier terme est $\int |F_A^+|^2$, le second est nul, et le troisième est $-\int |F_A^-|^2$. On a donc $\int |F_A^-|^2 = -4\pi^2 c_1(L)^2 + \int |F_A^+|^2$, ce qui fournit une borne L^2 pour F_A^- et F_A^+ , et donc par somme pour F_A .

Considérons alors l'ensemble des connexions qui ont même forme de courbure, quotienté par \mathcal{G} . Deux connexions unitaires sur L diffèrent d'une 1-forme imaginaire pure. A cause de $F_A = dA$, deux connexions ont même forme de courbure si et seulement si elles diffèrent d'une forme fermée. Cependant une transformation de jauge de la composante connexe de l'identité, $f = e^{i\xi}$, modifie la connexion par $f^*A = A + f^{-1}df = A + i.d\xi$. Ceci signifie que, si on se fixe une connexion A_0 de référence, on peut imposer que la connexion A diffère de A_0 par une 1-forme harmonique. On se ramène ainsi à $H^1(X, \mathbb{R})$. Mais le groupe \mathcal{G} n'est pas connexe : en effet on a $\pi_0(\mathcal{G}) = \pi_0(\text{Map}(X, S^1)) = [X, S^1] = H^1(X, \mathbb{Z})$. Donc $[A] \mapsto F_A$ (où $[A]$ désigne la classe de A modulo \mathcal{G}) est une fibration de fibre $H^1(X, \mathbb{R})/H^1(X, \mathbb{Z})$ compacte, et la borne sur F_A en fournit une sur un représentant de la classe de A . La projection de \mathfrak{M} sur le facteur A est donc bornée au sens L^2 .

En outre l'opérateur $d^* \oplus d^+$ est elliptique d'ordre 1, et en choisissant $\eta = A - A_0$ harmonique on dispose d'une borne L^2 sur η par ce qui précède, mais aussi sur $(d^* \oplus d^+)\eta = F_A^+ - F_{A_0}^+$ par ce qui a été vu plus haut. Un théorème classique sur les opérateurs elliptiques permet alors d'obtenir l'existence de bornes sur A dans l'espace de Sobolev L_1^2 . Or le lemme de Rellich affirme que l'inclusion $L_1^2 \rightarrow L^2$ est compacte, et donc on obtient que la projection de \mathfrak{M} sur le facteur A est compacte pour la topologie L^2 .

De plus pour A fixé, Φ est dans la boule $\sup |\Phi| \leq -R_{min}$ de l'espace de dimension finie $\text{Ker}(D_A)$, qui est compacte, et donc la projection de \mathfrak{M} sur le facteur A est une fibration à fibres compactes. On en déduit que \mathfrak{M} est compact. \square

Définissons enfin l'espace \mathfrak{M}^0 de la façon suivante.

Définition 4.14 - Soit un point base $x_0 \in X$. On définit \mathcal{G}_0 comme le sous-groupe de \mathcal{G} constitué des applications dont la restriction à la fibre en x_0 est l'identité. On définit alors \mathfrak{M}_L^0 comme le quotient de l'espace des solutions de (4.1) par \mathcal{G}_0 . Lorsque \mathfrak{M}_L est une variété lisse, \mathfrak{M}_L^0 est un S^1 -fibré principal sur \mathfrak{M}_L .

On peut maintenant définir les invariants de Seiberg-Witten.

Définition 4.15 - Soit X une variété compacte orientée de dimension 4 telle que $b_2^+ \geq 2$ et soit L une structure spin^c sur X . Une orientation de (4.4) étant fixée, on définit l'invariant de Seiberg-Witten $SW(L)$ ainsi :

- a) lorsque $d < 0$ dans (4.3), on pose $SW(L) = 0$;
- b) lorsque $d = 0$ dans (4.3), on choisit μ dans (4.2) tel que \mathfrak{M}_L soit une variété lisse. L'espace des modules \mathfrak{M}_L est alors une réunion finie de points signés; on définit $SW(L)$ comme le nombre de ces points comptés avec les signes correspondants;
- c) lorsque $d > 0$ dans (4.3), on choisit μ dans (4.2) tel que \mathfrak{M}_L soit une variété lisse. L'espace des modules \mathfrak{M}_L est compact et orienté, donc admet une classe fondamentale. L'invariant de Seiberg-Witten est obtenu en évaluant sur cette classe fondamentale le cup-produit maximal de la première classe de Chern du fibré en droites $\mathfrak{M}_L^0 \times_{S^1} \mathbb{C}$ sur \mathfrak{M}_L .

On a vu que la formule (4.3) s'écrit aussi $d = 2\text{Ind}_{\mathbb{C}}(D) + (-b_0 + b_1 - b_2^+)$. Comme $b_0 = 1$, ceci implique que d et $b_2^+ + b_1$ sont de parités opposées. Lorsque $b_2^+ + b_1$ est pair, d est donc impair, et les invariants qu'on vient de définir sont systématiquement triviaux.

Le terme d'"invariants" est justifié par la proposition suivante, qui est une conséquence directe des résultats précédents.

Proposition 4.16 - Soit X une variété compacte connexe orientée de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$. Alors SW définit une application de l'ensemble des structures spin^c sur X à valeurs dans \mathbb{Z} , qui dépend uniquement de la structure différentielle de X . Autrement dit $SW(L)$ est indépendant du choix de la métrique sur X et de la perturbation μ . L'invariant $SW(L)$ ne dépend de L

qu'à isomorphisme près. De plus SW est invariant par les difféomorphismes de X : si ϕ est un difféomorphisme de X , alors $SW(\phi^*L)$ est égal, au signe près, à $SW(L)$.

5 Variétés symplectiques

Définition 5.1 - Une 2-forme ω sur une variété orientée X de dimension 4 est dite symplectique si elle vérifie $d\omega = 0$ et $\omega \wedge \omega \neq 0$, et si la 4-forme $\omega \wedge \omega$ oriente X . On appelle alors variété symplectique une variété X munie d'une forme symplectique ω .

Définition 5.2 - Une structure presque complexe (c'est-à-dire un homomorphisme $J : TX \rightarrow TX$ vérifiant en tout point $J^2 = -1$) est dite compatible avec ω si pour tous champs de vecteurs v et w on a $\omega(w, Jv) = -\omega(Jw, v)$ et si pour tout champ v on a $\omega(v, Jv) \geq 0$ avec égalité si et seulement si $v = 0$.

De façon équivalente, on peut dire que J est compatible avec ω si et seulement si la forme bilinéaire définie par $g(x, y) = \omega(x, Jy)$ est une métrique riemannienne sur X .

Une variété symplectique admet toujours une structure presque complexe compatible. En effet, on part d'une base (f_1, f_2, f_3, f_4) de l'espace cotangent à X au voisinage d'un point fixé, dans laquelle on écrit ω sous la forme $f_1 \wedge g_1 + g$, où g_1 et g ne font pas intervenir f_1 . La 2-forme g est portée par un espace vectoriel de dimension 3. Par ailleurs on sait que le produit vectoriel est surjectif, et donc g peut s'écrire $h_1 \wedge h_2$. Si on pose $\epsilon_1 = f_1$, $\epsilon_2 = g_1$, $\epsilon_3 = h_1$ et $\epsilon_4 = h_2$, on a l'expression

$$\omega = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 + \epsilon_3 \wedge \epsilon_4. \quad (5.1)$$

La construction peut clairement être effectuée de telle façon que les ϵ_i soient de classe C^∞ dans le voisinage considéré. On a ainsi construit des coordonnées locales appelées *coordonnées de Darboux*.

Par suite, $\omega \wedge \omega = 2 \cdot \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 \wedge \epsilon_3 \wedge \epsilon_4$. Par définition, il est non nul et compatible avec l'orientation, et la base duale (e_i) des (ϵ_i) est une base directe. Il suffit alors de définir J par $Je_1 = e_2$, $Je_2 = -e_1$, $Je_3 = e_4$ et $Je_4 = -e_3$ pour obtenir une structure presque complexe compatible avec ω dans le voisinage considéré.

Pour transformer ce résultat d'existence locale en un résultat global, il suffit de remarquer qu'en chaque point $x \in X$ l'espace des endomorphismes de $T_x X$ compatibles avec ω (c'est-à-dire tels que $J^2 = -1$ et que $\omega(\cdot, J\cdot)$ soit une forme symétrique définie positive) est contractible. En effet si on fixe un endomorphisme J_0 compatible avec ω , pour tout endomorphisme compatible J , on peut construire le chemin $J_t = (tJ + (1-t)J_0)Q_t^{-1}$, où Q_t désigne la racine carrée positive de la matrice symétrique définie positive $-(tJ + (1-t)J_0)^2 = 1 - t(1-t)(2 + JJ_0 + J_0J)$, et ceci fournit une rétraction par déformation de l'espace des endomorphismes compatibles avec ω en x sur $\{J_0\}$. Le fibré sur X des endomorphismes compatibles avec ω est donc un fibré dont les fibres sont

contractibles, et donc il admet une section, c'est-à-dire qu'il existe une structure presque complexe compatible avec ω définie sur X tout entier.

En pratique on travaillera avec la métrique pour laquelle la base (e_i) est orthonormée. Une base orthonormée qui vérifie (5.1) sera dite "base standard". Notons que ω est alors une forme autoduale.

On peut alors définir le fibré canonique K de la façon suivante, en utilisant le fait que la structure presque complexe J permet d'associer aux formes un type (p, q) comme c'est le cas avec une vraie structure complexe.

Définition 5.3 - *On appelle fibré canonique, que l'on note K , le déterminant du fibré cotangent holomorphe $\Lambda^{1,0}X$, c'est-à-dire le fibré en droites complexes des formes holomorphes de degré maximal, ou encore $K = \Lambda^{2,0}X$.*

Sur une variété presque complexe, on construit une structure spin^c canonique. La raison fondamentale de ceci est l'existence d'un morphisme naturel $U(k) \rightarrow \text{Spin}^c(2k)$ qu'on construit de la façon suivante.

En considérant un \mathbb{C} -espace vectoriel de dimension k comme \mathbb{R} -espace vectoriel de dimension $n = 2k$, on a une inclusion $j : U(k) \rightarrow \text{SO}(n)$. En combinant cette inclusion avec le déterminant, on dispose d'un homomorphisme $j \times \det : U(k) \rightarrow \text{SO}(n) \times S^1$, qui se relève dans le revêtement double de $\text{SO}(n) \times S^1$ par $\text{Spin}^c(n)$ en un morphisme $l : U(k) \rightarrow \text{Spin}^c(n)$.

On peut alors considérer le Spin^c -fibré principal Q obtenu via l à partir du $U(k)$ -fibré principal associé à la structure presque complexe et à la métrique. Une conséquence directe de la construction de l par relèvement est que Q se projette bien sur le $\text{SO}(n)$ -fibré principal des repères orthonormés directs, et on a donc bien construit une structure spin^c canonique sur X . La construction de l implique également que le fibré en droites L associé à cette structure spin^c correspond à la représentation $\det : U(k) \rightarrow S^1$, c'est donc le déterminant du fibré tangent holomorphe, soit le dual K^{-1} du fibré canonique.

Calculons maintenant la dimension virtuelle d de \mathfrak{M} . Pour cela on remarque que l'égalité $L = \Lambda^2 TX$ implique $c_1(L) = c_1(X)$. De plus sur une variété presque complexe, les classes de Pontrjagin et d'Euler s'expriment en fonction des classes de Chern : $p_1 = c_1^2 - 2c_2$, et $e = c_2$. On en déduit immédiatement par le théorème de la signature que $\sigma = \frac{1}{3}(c_1^2 - 2c_2)$ et $\chi = c_2$. En reportant dans (4.3), il vient

$$d = -\frac{2\chi + 3\sigma}{4} + \frac{c_1^2}{4} = \frac{1}{4}(-2c_2 - (c_1^2 - 2c_2) + c_1^2) = 0.$$

Plaçons-nous désormais dans le cas d'une métrique et d'une base orthonormée (e_i) de base duale (ϵ_i) où $\omega = \epsilon_1 \wedge \epsilon_2 + \epsilon_3 \wedge \epsilon_4$. Les 2-formes $\epsilon_1 \wedge \epsilon_2$ et $\epsilon_3 \wedge \epsilon_4$ agissent de façon identique sur S^+ car leur différence est anti-autoduale, et $(\epsilon_1, \epsilon_2)^2 = -1$. Donc les deux valeurs propres de la multiplication par ω sont $\pm 2i$, correspondant à des espaces propres $S_{\pm 2i}^+$ de dimension complexe 1. Pour S^+ il est pratique de choisir une base orthonormée dont le premier vecteur v_0 est dans S_{-2i}^+ , c'est à dire $\omega.v_0 = -2i.v_0$, et le second v_1 est dans S_{+2i}^+ , c'est à dire $\omega.v_1 = +2i.v_1$. Les multiplications de Clifford par $\epsilon_1.\epsilon_2$, $\epsilon_3.\epsilon_4$ et $\omega/2$ ont

alors la même matrice

$$\epsilon_1.\epsilon_2 \equiv \epsilon_3.\epsilon_4 \equiv \omega/2 \equiv \begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}.$$

Soit un élément

$$\begin{pmatrix} e^{i\theta_1} & 0 \\ 0 & e^{i\theta_2} \end{pmatrix}$$

du tore maximal de $U(2)$, et appliquons-lui l . On obtient dans $\text{Spin}^c(4)$ l'élément $[(\cos\frac{\theta_1}{2} + \epsilon_1.\epsilon_2\sin\frac{\theta_1}{2}).(\cos\frac{\theta_2}{2} + \epsilon_3.\epsilon_4\sin\frac{\theta_2}{2}), e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}]$ dont l'action sur S^+ est donnée par le produit de

$$\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_1}{2} - i.\sin\frac{\theta_1}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta_1}{2} + i.\sin\frac{\theta_1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta_2}{2} - i.\sin\frac{\theta_2}{2} & 0 \\ 0 & \cos\frac{\theta_2}{2} + i.\sin\frac{\theta_2}{2} \end{pmatrix}$$

par $e^{\frac{i}{2}(\theta_1+\theta_2)}$ soit

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{i\theta_1}e^{i\theta_2} \end{pmatrix}.$$

Sur le premier facteur, $U(2)$ agit trivialement sur S_{-2i}^+ qui est donc isomorphe au fibré trivial I . Sur le second facteur, $U(2)$ agit sur S_{+2i}^+ par la représentation déterminant, donc S_{+2i}^+ est isomorphe au déterminant du fibré tangent holomorphe, c'est-à-dire K^{-1} . Pour résumer, on a donc obtenu :

Proposition 5.4 - *Une variété symplectique admet une structure spin^c canonique, pour laquelle le fibré des spineurs positifs se décompose en $S^+ = I \oplus K^{-1}$, et ω agit par multiplication de Clifford sur I avec la valeur propre $-2i$, et sur K^{-1} avec la valeur propre $+2i$.*

Passons maintenant aux autres structures spin^c sur X . La proposition 2.7 implique que les L qui conviennent sont exactement ceux qui sont de la forme $K^{-1} \otimes E^2$, où E est un fibré en droites sur X . La structure spin^c qui correspond à un fibré E est obtenue à partir de la structure canonique en "tordant" les spineurs par E , c'est-à-dire qu'on a

$$S^+ = E \oplus (K^{-1} \otimes E). \quad (5.2)$$

La multiplication de Clifford par ω préserve à nouveau cette décomposition, avec les mêmes valeurs propres que dans le cas précédent.

La dimension virtuelle de \mathfrak{M} pour la structure associée à E s'exprime de façon simple en utilisant le fait que pour $L = K^{-1}$ la dimension est $d_0 = 0$. En effet on a $d = d - d_0$ qui vaut $\frac{1}{4}(c_1(L)^2 - c_1(K^{-1})^2)$ d'après la formule (4.3). On utilise $c_1(L) = c_1(K^{-1} \otimes E^2) = c_1(K^{-1}) + 2c_1(E)$ pour développer $c_1(L)^2$ et obtenir $d = c_1(K^{-1}).c_1(E) + c_1(E).c_1(E)$ soit

$$d = -c_1(K).c_1(E) + c_1(E).c_1(E). \quad (5.3)$$

On va maintenant calculer l'expression de la forme ω^Φ pour la décomposition (5.2). Pour cela on se donne localement s_0 une section de E de norme 1, et s_1 une

section de K^{-1} de norme 1, et on se place dans la base orthonormée $(s_0, s_0 \otimes s_1)$ de S^+ .

On écrit $\Phi = \alpha + \beta = \alpha_s \cdot s_0 + \beta_s \cdot s_0 \otimes s_1$, c'est-à-dire que dans notre base $\Phi = \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{pmatrix}$. On a vu plus haut que $\epsilon_1 \cdot \epsilon_2$ et $\epsilon_3 \cdot \epsilon_4$ correspondent alors à la matrice $\begin{pmatrix} -i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix}$. Les autres 2-formes sont données par les matrices d'Heisenberg

$$\epsilon_1 \cdot \epsilon_4 \equiv \epsilon_2 \cdot \epsilon_3 \equiv \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \epsilon_1 \cdot \epsilon_3 \equiv \epsilon_4 \cdot \epsilon_2 \equiv \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

(on vérifie qu'on a bien $(\epsilon_1 \cdot \epsilon_2) \cdot (\epsilon_1 \cdot \epsilon_4) = -\epsilon_4 \cdot \epsilon_2$).

On calcule alors ω^Φ sur les vecteurs de la base. on obtient

$$\omega^\Phi(e_1, e_2) = \omega^\Phi(e_3, e_4) = \langle e_1 \cdot e_2 \cdot \Phi, \Phi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} -i\alpha_s \\ i\beta_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{pmatrix} \right\rangle = i(|\alpha_s|^2 - |\beta_s|^2),$$

où le signe dans la dernière égalité vient du fait que le produit scalaire est antilinéaire en la première variable. On calcule de même

$$\omega^\Phi(e_1, e_4) = \omega^\Phi(e_2, e_3) = \langle e_1 \cdot e_4 \cdot \Phi, \Phi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} \beta_s \\ -\alpha_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{pmatrix} \right\rangle = (\alpha_s \beta_s^* - \alpha_s^* \beta_s),$$

$$\omega^\Phi(e_1, e_3) = \omega^\Phi(e_4, e_2) = \langle e_1 \cdot e_3 \cdot \Phi, \Phi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} i\beta_s \\ i\alpha_s \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \alpha_s \\ \beta_s \end{pmatrix} \right\rangle = -i(\alpha_s^* \beta_s + \alpha_s \beta_s^*).$$

On a donc la formule $\omega^\Phi = i(|\alpha_s|^2 - |\beta_s|^2)(\epsilon_1 \wedge \epsilon_2 + \epsilon_3 \wedge \epsilon_4) + (-\alpha_s^* \beta_s + \alpha_s \beta_s^*)(\epsilon_1 \wedge \epsilon_4 + \epsilon_2 \wedge \epsilon_3) - i(\alpha_s^* \beta_s + \alpha_s \beta_s^*)(\epsilon_1 \wedge \epsilon_3 - \epsilon_2 \wedge \epsilon_4)$

En substituant les expressions matricielles de $\epsilon_i \cdot \epsilon_j$ il vient (en identifiant α et β à leurs parties scalaires) l'expression suivante pour la multiplication de Clifford par ω^Φ .

$$\omega^\Phi = 2 \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 & 2\alpha\beta^* \\ 2\alpha^*\beta & |\beta|^2 - |\alpha|^2 \end{pmatrix}. \quad (5.4)$$

Enfin une propriété remarquable des invariants de Seiberg-Witten est leur symétrie. Pour cela on démontrera d'abord le lemme suivant.

Lemme 5.5 - *Pour $\Phi \in \Gamma(S^+)$ et $A \in \mathcal{C}(P_{U(1)})$, on a*

$$\int_X (|F_A^+ - \frac{1}{4}\omega^\Phi|^2 + |D_A\Phi|^2) = \int_X (|F_A^+|^2 + |\nabla^A\Phi|^2 + \frac{R}{4}|\Phi|^2 + \frac{1}{8}|\Phi|^4).$$

DÉMONSTRATION : On développe en prenant garde au fait que F_A^+ et ω^Φ sont des formes à valeurs imaginaires pures : $|F_A^+ - \frac{1}{4}\omega^\Phi|^2 = -\sum_{i<j} (F_A^+(e_i, e_j) - \frac{1}{4}\omega^\Phi(e_i, e_j))^2 = |F_A^+|^2 + \frac{1}{16}|\omega^\Phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i<j} F_A^+(e_i, e_j)\langle e_i \cdot e_j \cdot \Phi, \Phi \rangle = |F_A^+|^2 + \frac{1}{8}|\Phi|^2 + \frac{1}{2}\sum_{i<j} \langle \overline{F_A^+(e_i, e_j)} e_i \cdot e_j \cdot \Phi, \Phi \rangle = |F_A^+|^2 + \frac{1}{8}|\Phi|^2 - \frac{1}{2}\langle F_A^+ \cdot \Phi, \Phi \rangle$.

D'autre part la formule de Weitzenböck entraîne, en utilisant le fait que l'opérateur de Dirac est formellement autoadjoint, $\int |D_A\Phi|^2 = \int (|\nabla^A\Phi|^2 + \frac{R}{4}|\Phi|^2 + \frac{1}{2}\langle F_A^+ \cdot \Phi, \Phi \rangle)$. Le résultat est alors immédiat. \square

En utilisant le fait que les solutions de (4.1) sont exactement les (Φ, A) qui annulent l'expression ci-dessus, on obtient la symétrie suivante.

Proposition 5.6 - *L'invariant de Seiberg-Witten associé à la structure spin^c donnée par le fibré E est égal en valeur absolue à celui qui correspond au fibré $\tilde{E} = K \otimes E^{-1}$.*

DÉMONSTRATION : En effet, $\tilde{E} = (K^{-1} \otimes E)^{-1}$ et $\tilde{E} \otimes K^{-1} = E^{-1}$, et donc par somme directe, $\tilde{S}^+ = (S^+)^*$. Soit (Φ, A) une solution de (4.1) pour E , c'est-à-dire un couple qui annule l'expression du lemme 5.5. Le champ Φ^* est alors une section des spineurs associés à \tilde{E} de même norme que Φ . D'autre part la connexion ∇^A sur S^+ induit une connexion ∇^{A^*} sur \tilde{S}^+ , qui vérifie par construction $\nabla_{e_i}^{A^*}(f^*) = (\nabla_{e_i}^A f)^*$. La norme de $\nabla^{A^*}(\Phi^*)$ est alors bien sûr égale à celle de $\nabla^A \Phi$.

De plus, par passage au déterminant, les connexions A et A^* sur L et L^{-1} vérifient la même relation que ∇^A et ∇^{A^*} . En utilisant la définition de la courbure il vient $F_A^*(e_i, e_j).(f^*) = (F_A(e_i, e_j).f)^*$, soit comme la courbure est une 2-forme à valeurs imaginaires pures, $F_A^*(e_i, e_j) = F_A(e_i, e_j)^* = -F_A(e_i, e_j)$ d'où $F_A^* = -F_A$. Donc $(F_A^*)^+ = -F_A^+$ est de même norme que F_A^+ , ce qui implique que (Φ^*, A^*) annule aussi l'expression du lemme 5.5, c'est-à-dire que (Φ^*, A^*) est solution de (4.1).

La construction effectuée induit donc une bijection entre \mathfrak{M}_L et \mathfrak{M}_{L^*} , et la proposition en découle. \square

6 Invariants de Gromov

Soit X une variété symplectique, et J une structure presque complexe compatible.

Définition 6.1 - *Une sous-variété Σ compacte de dimension 2 de X (non nécessairement connexe) est dite pseudo-holomorphe si son espace tangent est stable par J . Le champ d'endomorphismes J définit alors une structure complexe sur Σ .*

La restriction de la forme symplectique ω à Σ est alors symplectique, et donc oriente Σ , ce qui permet de définir sa classe fondamentale $[\Sigma] \in H_2(X, \mathbb{Z})$ qui est non triviale parce que $\omega.[\Sigma] = \int_{\Sigma} \omega > 0$. On notera $e = e(\Sigma) \in H^2(X, \mathbb{Z})$ le dual de Poincaré de $[\Sigma]$.

Un résultat important sur les sous-variétés pseudo-holomorphes connexes est la formule d'adjonction.

Lemme 6.2 - *Soit Σ une sous-variété pseudo-holomorphe connexe de X , de genre g . Alors on a*

$$2 - 2g + e(\Sigma).e(\Sigma) = -c_1(K).e(\Sigma). \quad (6.1)$$

DÉMONSTRATION : D'une part, $e.e = c_1(N\Sigma)$ car $e.e = \#(\Sigma \cap \Sigma)$ est le nombre de zéros d'une déformation de Σ , c'est-à-dire d'une section de $N\Sigma$. D'autre part $2-2g = \chi(\Sigma) = c_1(T\Sigma)$. On a alors $c_1(T\Sigma) + c_1(N\Sigma) = c_1(TX|_\Sigma) = c_1(TX) \cdot [\Sigma] = -c_1(T^*X) \cdot [\Sigma] = -c_1(K) \cdot [\Sigma]$ (car $K = \det T^*X$). On obtient donc la formule voulue. \square

Définition 6.3 - Soit $e \in H^2(X, \mathbb{Z})$ une classe de cohomologie non triviale. On note $H = H(e)$ l'espace des sous-variétés pseudo-holomorphes plongées de X dont la classe fondamentale est le dual de Poincaré de e .

Remarquons que dans cette définition on souhaiterait que toutes les composantes connexes de la courbe pseudo-holomorphe soient réalisées avec une multiplicité 1 (courbe *simple*). Cependant il est nécessaire pour prouver le théorème de compacité d'admettre éventuellement, dans le cas des tores de nombre d'auto-intersection nul, des multiplicités supérieures (revêtements ramifiés).

On dispose du résultat suivant sur la structure de H (le terme "générique" désigne ici un sous-ensemble G_δ -dense au sens de Baire de l'espace des structures presque complexes lisses compatibles).

Lemme 6.4 - Pour un choix générique de J , H est une variété lisse de dimension

$$d = -c_1(K) \cdot e + e.e. \quad (6.2)$$

De plus H est canoniquement orienté.

DÉMONSTRATION : Décrivons l'espace tangent à H en un de ses points Σ . On suppose dans un premier temps que Σ est connexe. Une déformation de Σ peut être vue, en identifiant le fibré normal $N\Sigma$ avec un voisinage tubulaire de Σ , comme une section de $N\Sigma$. Pour $\nu \in \Gamma(N\Sigma)$ on notera alors $\Sigma + \epsilon\nu$ la surface image de la section $\epsilon\nu$ par cette identification (c'est-à-dire la surface obtenue en déplaçant chaque point de Σ selon le vecteur normal $\epsilon\nu$). Associons à une déformation $\nu \in \Gamma(N\Sigma)$ et à un champ $\xi \in \Gamma(T\Sigma)$

$$\phi(\nu, \xi) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon^{-1} P^{N(\Sigma + \epsilon\nu)} \cdot J \cdot P^{T(\Sigma + \epsilon\nu)}(\xi).$$

La déformation ν est tangente à H si et seulement si $\phi(\nu, \xi) = 0$ pour tout ξ (c'est-à-dire que J préserve $T(\Sigma + \epsilon\nu)$). Or $P^{T(\Sigma + \epsilon\nu)}(\xi) = \xi - \epsilon \nabla_\xi \nu$ donc $J \cdot P^{T(\Sigma + \epsilon\nu)}(\xi) = J\xi - \epsilon J \cdot \nabla_\xi \nu$, dont la projection sur $T(\Sigma + \epsilon\nu)$ est, au premier ordre en ϵ , $J\xi - \epsilon \nabla_{J\xi} \nu$. En utilisant que $P^{N(\Sigma + \epsilon\nu)} = Id - P^{T(\Sigma + \epsilon\nu)}$, on obtient $\phi(\nu, \xi) = \nabla_{J\xi} \nu - J \cdot \nabla_\xi \nu$ qui représente le défaut d'holomorphicité de ν . L'opérateur différentiel ϕ est donc à des termes d'ordre 0 près égal à $\bar{\nabla} : \Gamma(N\Sigma) \rightarrow \Gamma(\Lambda^1 \otimes N\Sigma)$ ($\bar{\nabla}$ désigne $\bar{\partial}$ couplé à $N\Sigma$, c'est à dire la partie antiholomorphe de ∇). La régularité de H en découle, et l'orientation de H est fournie par la structure presque complexe.

La dimension de H se calcule alors à l'aide du complexe de Dolbeault associé à $N\Sigma$. En effet $\dim_{\mathbb{C}}(H) = \text{Ind}(\bar{\nabla}^{N\Sigma})$ est égal à $\dim H^0(\Sigma, \Omega^0(N\Sigma)) -$

$\dim H^1(\Sigma, \Omega^0(N\Sigma))$, c'est-à-dire la caractéristique d'Euler-Poincaré du fibré $N\Sigma$. En appliquant le théorème de Riemann-Roch (cf. [LB]), ceci s'exprime en fonction du degré du fibré normal $\chi(\Sigma, N\Sigma) = \deg(N\Sigma) + (1 - g) = e.e + 1 - g$. On en déduit la dimension de H sur \mathbb{R} , $d = 2\chi(\Sigma, N\Sigma) = 2e.e + (2 - 2g)$. Or par la formule d'adjonction (6.1), $2 - 2g = -c_1(K).e - e.e$, donc on obtient $d = e.e - c_1(K).e$.

Si Σ n'est pas connexe, pour chaque composante Σ_i , dont la classe fondamentale est duale de e_i , l'espace H_i associé est de dimension $d_i = e_i.e_i - c_1(K).e_i$ d'après ce qu'on vient de prouver. Or localement, $H = \oplus H_i$, parce que déformer Σ revient à déformer ses composantes. Donc $d = \sum d_i = \sum e_i.e_i - c_1(K).\sum e_i$. Or $e = \sum e_i$ clairement, et pour $i \neq j$, $e_i.e_j = 0$ car les différentes composantes sont disjointes, d'où $e.e = \sum e_i.e_i$. On en déduit que $d = e.e - c_1(K).e$, et donc le lemme est prouvé. \square

Il est à noter que d est toujours pair. En effet on a vu que pour chaque composante Σ_i , $d_i = 2e_i.e_i + (2 - 2g_i)$ est pair, et donc $d = \sum d_i$ est pair. Lorsque $d > 0$, on peut donc choisir un ensemble Ω de $d/2$ points distincts de X , et définir H_Ω comme l'ensemble des $\Sigma \in H$ qui contiennent tous les points de Ω . On a alors le lemme suivant.

Lemme 6.5 - *Pour un choix générique de J et Ω , $H_\Omega \subset H$ est une sous-variété canoniquement orientée de H , de dimension 0.*

DÉMONSTRATION : Si $\Sigma \in H_\Omega$, considérons une déformation de Σ , soit $\nu \in \Gamma(N\Sigma)$ (en identifiant $N\Sigma$ avec un voisinage tubulaire de Σ), et un point $x_0 \in \Omega$. La condition d'appartenance de x_0 à la surface déformée $\Sigma + \epsilon\nu$ (obtenue à partir de Σ en déplaçant chaque point selon le vecteur normal $\epsilon\nu$) s'écrit $\nu(x_0) = 0$. Comme $N\Sigma$ est un fibré de rang 2 sur \mathbb{R} , pour un choix générique de x_0 la condition $\nu(x_0) = 0$ est réalisée sur un sous-espace de codimension 2. Pour un choix générique de Ω il faut donc enlever 2 à la dimension pour chaque point de Ω . Comme Ω comporte exactement $d/2$ points, le résultat est vrai. \square

On a de plus le résultat de compacité suivant (voir [McS]).

Théorème 6.6 - *Dans le cas où $d = 0$, l'espace H est compact pour un choix générique de J . Dans le cas $d > 0$, H_Ω est compact pour un choix générique de J et Ω .*

IDÉE DE DÉMONSTRATION : Ce théorème est un résultat ardu, pour lequel on se contentera de donner les grandes lignes. Essentiellement, il s'agit de remarquer qu'il est possible de compactifier H , les points de $\overline{H} - H$ correspondant à des courbes pseudo-holomorphes présentant des singularités. Le résultat s'obtient alors en constatant que ces courbes singulières sont organisées en strates dont la dimension est strictement inférieure à celle de H . Comme on étudie ici uniquement des espaces de dimension nulle (quitte à ne considérer que des courbes passant par tous les points de Ω), il y a génériquement absence de courbes singulières, et donc H (resp. H_Ω) est compact.

On traitera d'abord le cas $d = 0$. A cause de la compacité de X , il n'y a pas de problèmes de points partant à l'infini. La seule façon dont une suite de H peut ne pas converger correspond à une suite tendant vers une surface immergée (et non plongée) dans X , éventuellement non connexe, et pouvant comporter des points singuliers. L'idée est alors de montrer que de telles limites correspondent à des équations faisant intervenir des opérateurs dont l'indice est strictement inférieur à celui qui correspond à H .

Plaçons-nous par exemple dans le cas où la limite est une courbe pseudo-holomorphe connexe immergée comportant un nombre n de points doubles, qui correspondent tous à un nombre d'intersection positif (car on est sur \mathbb{C}). L'image dans $H_2(X, \mathbb{Z})$ de la classe fondamentale de cette courbe est bien sûr toujours le dual de e .

Cette courbe immergée possède un fibré normal, dont le degré n'est plus $e.e$ comme avant. En effet, au voisinage d'un point double, l'image de la courbe dans X possède deux "brins" A et B . Si on décale la courbe, il est clair que A rencontre la copie décalée de B , et B rencontre la copie décalée de A , ces deux intersections ayant un signe positif à cause de l'holomorphie. Ces deux intersections comptent dans le nombre d'intersection $e.e$, cependant si on considère le fibré normal à la courbe, elles n'apparaissent pas. En conséquence, le degré ν du fibré normal s'obtient en enlevant 2 pour chaque point double, c'est-à-dire

$$\nu = e.e - 2n.$$

La formule d'adjonction (6.1) s'écrit ici

$$2 - 2g + \nu = -c_1(K).e.$$

De plus la courbe immergée appartient à un espace de modules défini de façon analogue à H , mais constitué d'images d'immersions au lieu de sous-variétés. La preuve du lemme 6.4 indique que pour J générique, cet espace de modules est lisse de dimension $d' = 2 - 2g + 2\nu$. Les formules précédentes donnent alors $d' = -c_1(K).e + e.e - 2n$, soit strictement moins que d . Comme $d = 0$, on en déduit que génériquement il n'existe pas de telles courbes.

Le cas où la courbe n'est pas connexe s'obtient en remarquant que par somme sur les composantes on a encore $d' = d - 2n$ strictement inférieur à d . Dans le cas $d > 0$, on procède de même en remarquant que la contrainte de passage par $d/2$ points diminue la dimension de d , ce qui donne $d' - d = -2n < 0$.

Le même type d'argument permet de montrer que de façon générique il n'y a pas apparition de points singuliers ou de points d'intersection entre les différentes composantes de la surface. \square

On peut alors définir les invariants de Gromov d'une variété symplectique.

Définition 6.7 - Soit X une variété compacte symplectique de dimension 4. On définit pour chaque classe $e \in H^2(X, \mathbb{Z})$ l'élément $Gr(e) \in \mathbb{Z}$ défini comme suit :

a) Lorsque $d < 0$ dans (6.2), on pose $Gr(e) = 0$.

b) Lorsque $d = 0$, alors pour J générique, H est un ensemble fini de points signés, et on définit $Gr(e)$ comme le nombre de ces points comptés avec les signes correspondants.

c) Lorsque $d > 0$, alors pour J et Ω génériques, H_Ω est un ensemble fini de points signés, et on définit $Gr(e)$ comme le nombre de ces points comptés avec les signes correspondants.

Le terme d’"invariant" est justifié par la proposition suivante.

Proposition 6.8 - *L’invariant $Gr : H^2(X, \mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$ ne dépend que du couple (X, ω) . Autrement dit, la valeur de Gr est indépendante du choix de la structure presque complexe J , et dans le cas $d > 0$, de l’ensemble Ω . De plus si (ω_t) est une famille continue de formes symplectiques sur X , les invariants Gr associés à ω_0 et ω_1 coïncident. Enfin, Gr est invariant par les difféomorphismes de X en ce sens que si $\phi : X \rightarrow X$ est un difféomorphisme, l’invariant $Gr(e)$ pour la forme symplectique ω est égal à l’invariant $Gr(\phi^*e)$ pour la forme symplectique $\phi^*\omega$.*

7 Le théorème principal

7.1 Enoncé

Les similarités des définitions des invariants de Seiberg-Witten et des invariants de Gromov (y compris dans les formules (5.3) et (6.2)), ainsi que le cas des variétés kählériennes, ont conduit Taubes à conjecturer puis formuler l’énoncé suivant ([T3]) :

Théorème 7.1 - *Soit X une variété compacte orientée symplectique de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$. Soit E un fibré en droites complexes non trivial sur X , et soit $L = K^{-1} \otimes E^2$. Alors $SW(L) = \pm Gr(c_1(E))$.*

On se contentera ici du résultat suivant, plus faible, qui comporte déjà de nombreuses conséquences intéressantes.

Théorème 7.2 - *Soit X une variété compacte orientée symplectique de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$. Soit E un fibré en droites complexes non trivial sur X et soit $L = K^{-1} \otimes E^2$. Si $SW(L) \neq 0$, alors il existe une courbe symplectique plongée dont la classe fondamentale est le dual de Poincaré de $c_1(E)$.*

Pour cela on considérera une famille à un paramètre de perturbations des équations de Seiberg-Witten, et à partir d’une suite de solutions correspondant à des valeurs du paramètre tendant vers l’infini, on exhibera une courbe pseudo-holomorphe comme limite du lieu des zéros de la projection des solutions sur le facteur E .

L’hypothèse de non-trivialité de E tient au fait que si E est égal au fibré trivial I , la courbe symplectique construite a une classe fondamentale nulle, et est donc potentiellement vide. Cependant ce qui suit s’applique quand même à ce cas.

7.2 Notations

On munit tout d'abord X d'une métrique où il existe une base orthonormée vérifiant (5.1). On a vu à la section 5 que pour la structure spin^c canonique, S^+ se décompose en $I \oplus K^{-1}$. D'après ce qu'on a vu à la section 3, la donnée d'une connexion sur K^{-1} (et de la connexion de Levi-Civita sur TX) fixe une connexion sur S^+ , donc par projection une connexion sur le facteur I . La condition que l'on souhaite imposer est l'existence d'une section globale parallèle u_0 ne s'annulant pas de I , c'est à dire que la connexion sur I doit être la connexion triviale d dans la trivialisatation fixée par u_0 . On peut en outre imposer que u_0 soit partout de norme 1. Cette condition fixe une unique connexion (modulo jauge), A_0 , sur K^{-1} . De plus la projection sur le second facteur de la connexion sur S^+ correspondante est en fait exactement A_0 , car la connexion induite sur I est triviale.

Si X est kählérienne, c'est-à-dire si la structure presque complexe J est intégrable, la connexion sur S^+ préserve la décomposition en $I \oplus K^{-1}$. Cependant dans le cas général, ce n'est pas le cas. Posons $\nabla_{A_0} u_0 = b$, où b est une 1-forme à valeurs dans K^{-1} (dans le cas où X est kählérienne on a donc $b = 0$). La connexion ∇_{A_0} diffère de $d \oplus A_0$ d'une 1-forme antihermitienne, donc la connexion ∇_{A_0} s'écrit sous forme matricielle

$$\nabla_{A_0} = \begin{pmatrix} d & -b^* \\ b & A_0 \end{pmatrix}.$$

Lemme 7.3 - $D_{A_0} u_0 = 0$.

DÉMONSTRATION : On applique D_{A_0} à l'équation $\omega.u_0 = -2i.u_0$. Il vient, en sous-entendant les sommations sur les indices libres, $D(\omega).u_0 + e^\nu.\omega.b_\nu = -2i.e^\nu.b_\nu$. Or $D(\omega) = (d + d^*)\omega = d\omega + *d\omega$ (car ω est autoduale). De plus on a $d\omega = 0$ car ω est symplectique. Comme ω agit sur $b_\nu \in K^{-1}$ par multiplication par $+2i$, il vient donc que $2i.e^\nu.b_\nu = -2i.e^\nu.b_\nu$, d'où $D_{A_0} u_0 = e^\nu.b_\nu = 0$. \square

On se fixe désormais un fibré en droites E , et donc une structure spin^c . On va étudier la famille d'équations de Seiberg-Witten perturbées suivante, indexée par un réel $r > 0$, dont les inconnues sont une connexion A sur $L = K^{-1} \otimes E^2$ et une section ψ de $S^+ = E \oplus (K^{-1} \otimes E)$:

$$\begin{cases} D_A \psi = 0 \\ F_A^+ = \frac{1}{4}\omega^\psi + F_{A_0}^+ - \frac{ir}{4}\omega. \end{cases} \quad (7.1)$$

Cela revient à fixer $\mu = F_{A_0}^+ - \frac{ir}{4}\omega$ dans (4.2), donc les résultats de la section 4 impliquent que cette perturbation n'affecte pas les propriétés de l'espace des solutions. Fixons les notations suivantes : tout d'abord, A induit une connexion ∇_A sur S^+ . Par projection sur le premier facteur, cela fournit une connexion ∇_a sur E , et sur le second facteur, ∇'_A sur $K^{-1} \otimes E$. Ces deux connexions s'obtiennent en fait à partir de d et A_0 qui correspondaient à la structure spin^c canonique en ajoutant une même connexion sur le facteur E , qui est donc

nécessairement ∇_a . On a donc sur $K^{-1} \otimes E$, $\nabla'_A = (A_0 \otimes 1) + (1 \otimes \nabla_a)$ et donc sur le déterminant $L = K^{-1} \otimes E^2$, $A = (A_0 \otimes 1) + 2 \cdot (1 \otimes \nabla_a)$. Ces relations impliquent que les courbures de A , A_0 , ∇_a et ∇'_A vérifient $F_a = F'_A - F_{A_0} = \frac{1}{2}(F_A - F_{A_0})$. Enfin, la connexion ∇_A s'écrit sous forme matricielle

$$\nabla_A = \begin{pmatrix} \nabla_a & -b^* \\ b & \nabla'_A \end{pmatrix}.$$

Il est utile d'écrire la section ψ sous la forme $\psi = r^{1/2} \cdot (\alpha u_0 + \beta)$, où α est une section de E et β est une section de $K^{-1} \otimes E$. ω^ψ s'écrit alors conformément à (5.4) (en ajoutant un facteur r dû à la convention prise ici), et la seconde équation de (7.1) signifie que l'expression de la multiplication de Clifford par $F'_A - F_{A_0}$ est

$$F'_A - F_{A_0} = \frac{r}{2} \begin{pmatrix} |\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1 & 2\alpha\beta^* \\ 2\alpha^*\beta & |\beta|^2 - |\alpha|^2 + 1 \end{pmatrix}. \quad (7.2)$$

La première équation, quant à elle, s'écrit $e^\mu \cdot (\nabla_A(\alpha \cdot u_0 + \beta))_\mu = 0$ (où l'indice μ désigne l'évaluation sur le vecteur e_μ). En utilisant le fait que $D_{A_0}u_0 = e^\mu \cdot b_\mu = 0$ et de même $b_\mu^* \cdot e^\mu \cdot u_0 = 0$, seuls les termes diagonaux dans ∇_A interviennent, ce qui donne

$$(\nabla_a \alpha)_\mu \cdot e^\mu \cdot u_0 + e^\mu \cdot (\nabla'_A \beta)_\mu = 0 \quad (7.3)$$

Appliquons à nouveau l'opérateur de Dirac à cette équation. Il vient

$$(\nabla_a \nabla_a \alpha)_{\nu\mu} e^\nu e^\mu \cdot u_0 + (\nabla_a \alpha)_\mu e^\nu e^\mu \cdot b_\nu + e^\nu e^\mu \cdot (\nabla'_A \nabla'_A \beta)_{\nu\mu} - b_\nu^* (\nabla'_A \beta)_\mu e^\nu e^\mu u_0 = 0$$

Dans le deuxième et le quatrième terme, on peut utiliser la relation $e^\nu \cdot e^\mu + e^\mu \cdot e^\nu = -2\delta^{\mu\nu}$ pour échanger ν et μ , puis utiliser $e^\nu \cdot b_\nu = 0$ et $b_\nu^* \cdot e^\nu \cdot u_0 = 0$ pour ne garder que les termes diagonaux. Il vient donc

$$(\nabla_a \nabla_a \alpha)_{\nu\mu} e^\nu e^\mu \cdot u_0 - 2\langle \nabla_a \alpha, b \rangle + e^\nu e^\mu (\nabla'_A \nabla'_A \beta)_{\nu\mu} + 2\langle b^*, \nabla'_A \beta \rangle \cdot u_0 = 0$$

On peut décomposer le premier terme en d'une part $-\sum_\nu (\nabla_a \nabla_a \alpha)_{\nu\nu} u_0 = (\nabla_a^* \nabla_a \alpha) u_0$ et d'autre part $\sum_{\mu \neq \nu} (\nabla_a \nabla_a \alpha)_{\nu\mu} e^\nu \cdot e^\mu \cdot u_0 = \sum_{\nu < \mu} ((\nabla_a \nabla_a \alpha)_{\nu\mu} - (\nabla_a \nabla_a \alpha)_{\mu\nu}) e^\nu \cdot e^\mu \cdot u_0 = \sum_{\nu < \mu} F_a(e^\nu, e^\mu) \alpha \cdot e^\nu \cdot e^\mu \cdot u_0 = F_a \alpha \cdot u_0$. De même le troisième terme se réécrit $(\nabla'_A)^* \nabla'_A \beta + F'_A \cdot \beta$. On obtient donc

$$(\nabla_a^* \nabla_a \alpha) \cdot u_0 + \alpha \cdot F_a \cdot u_0 - 2\langle \nabla_a \alpha, b \rangle + \nabla'_A{}^* \nabla'_A \beta + F'_A \cdot \beta + 2\langle b^*, \nabla'_A \beta \rangle \cdot u_0 = 0 \quad (7.4)$$

7.3 Bornes sur β

Calculons le produit scalaire L^2 de (7.4) avec β . On utilise le fait que $F_a = \frac{1}{2}(F_A - F_{A_0})$ et $F'_A = F_{A_0} + \frac{1}{2}(F_A - F_{A_0})$ pour substituer l'expression (7.2), et on obtient

$$\int \frac{r}{2} |\alpha|^2 |\beta|^2 - 2\langle \nabla_a \alpha, \beta^* b \rangle + |\nabla'_A \beta|^2 - \frac{r}{4} (|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1) |\beta|^2 + \langle F'_{A_0} \beta, \beta \rangle = 0 \quad (7.5)$$

Le dernier terme est minoré par $-k|\beta|^2$, où $k > 0$ est une constante indépendante de r . Le terme en $\frac{r}{4}|\alpha|^2|\beta|^2$ quant à lui est minoré par 0. Il vient alors

$$\int \frac{r}{4}|\beta|^4 + (\frac{r}{4} - k)|\beta|^2 + |\nabla'_A\beta|^2 \leq 2 \int \langle \nabla_a\alpha, \beta^*b \rangle \leq z \int \frac{1}{r\epsilon}|\nabla_a\alpha|^2 + r\epsilon|\beta|^2 \quad (7.6)$$

pour tout $\epsilon > 0$, où z désigne une constante positive indépendante de r (c'est en fait la norme de b).

Comme on étudie le comportement des équations lorsque r tend vers l'infini, on peut supprimer le terme $-k|\beta|^2$. Pour $\epsilon = \frac{1}{8}$ il vient

$$\int \frac{r}{8}|\beta|^2 + |\nabla'_A\beta|^2 \leq z' \int \frac{1}{r}|\nabla_a\alpha|^2$$

Si on note $\|\cdot\|$ la norme L^2 , on obtient donc des majorations de $\|r^{1/2}\beta\|$ et $\|\nabla'_A\beta\|$ par un multiple uniforme de $r^{-1/2}\|\nabla_a\alpha\|$. Comme $\nabla_A\beta = \nabla'_A\beta - b^*\beta$, une majoration de $\|\nabla_A\beta\|$ en découle directement. On a donc le lemme suivant :

Lemme 7.4 - *Pour r suffisamment grand, $\|\nabla_A\beta\|$ et $\|r^{1/2}\beta\|$ sont bornés par un multiple uniforme de $r^{-1/2}\|\nabla_a\alpha\|$.*

La définition de l'opérateur de Dirac implique trivialement que la même majoration s'applique à $\|D_A\beta\|$. On en déduit que α est "presque holomorphe" pour r grand, en ce sens qu'on a :

Lemme 7.5 - *Pour r suffisamment grand, la norme L^2 de la projection de $\nabla_a\alpha$ sur $E \otimes \Lambda^{0,1}$ est bornée par un multiple uniforme de $r^{-1/2}\|\nabla_a\alpha\|$.*

En effet, la formule (7.3) et le lemme 7.4 impliquent que $(\nabla_a\alpha)_\mu.e^\mu.u_0$, qui est égal à $-D_A\beta$, vérifie la majoration souhaitée. Or $(\nabla_a\alpha)_\mu.e^\mu.u_0$ est égal à $\nabla_{e_1}\alpha.(e^1.u_0) + \nabla_{Je_1}\alpha.(Je^1.u_0) + \dots$, soit $(\nabla_{e_1}\alpha + i\nabla_{Je_1}\alpha).e^1.u_0 + \dots$, ce qui correspond précisément à la partie antiholomorphe de la connexion.

Pour résumer on peut dire que quand r est grand, α tend à être holomorphe et β tend vers 0.

Il est à noter que dans le cas où X est kählérienne, le membre de droite de (7.6) est nul parce que $b = 0$, et donc pour r assez grand ($r > 4k$) l'équation (7.6) implique que $\beta = 0$. L'équation de Dirac s'écrit alors $D_A\alpha = 0$, c'est à dire $\nabla_a\alpha^{(0,1)} = 0$. Dans le cas kählérien β est rigoureusement nul et α est rigoureusement holomorphe, ce qui permet d'obtenir directement la courbe pseudo-holomorphe voulue comme lieu des zéros de α et d'achever immédiatement la preuve du théorème. Cependant dans le cas où X est seulement symplectique, on ne peut conclure qu'à partir de la limite quand r tend vers l'infini, ce qui complique la preuve.

7.4 Bornes sur α

On réécrit le produit scalaire de (7.4) avec αu_0 , en utilisant le fait que les 3 derniers termes correspondaient à $D_A^2\beta$, et en substituant F_a grâce à (7.2). Il

vient

$$\int |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1)|\alpha|^2 + \langle \alpha u_0, D_A^2 \beta \rangle = 0 \quad (7.7)$$

soit en ajoutant des termes de part et d'autre, et en utilisant le fait que l'opérateur de Dirac est formellement autoadjoint,

$$\int |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - 1)^2 = \int \frac{r}{4}|\beta|^2(|\alpha|^2 - 1) - \int \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - 1 - |\beta|^2) - \int \langle D(\alpha u_0), D\beta \rangle$$

On remarque que $(F_A - F_{A_0}) \wedge \omega = \frac{1}{4}\omega^\psi \wedge \omega - \frac{ir}{4}\omega \wedge \omega = \frac{1}{4}(\langle e_1, e_2, \psi, \psi \rangle + \langle e_3, e_4, \psi, \psi \rangle)vol - \frac{ir}{2}vol$, ce qui est égal à $\frac{ir}{2}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1)vol$. En reportant ceci dans le second terme à droite dans l'équation précédente et en majorant les autres termes à droite, il vient

$$\int |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - 1)^2 \leq \int \frac{r}{4}|\alpha|^2|\beta|^2 + \frac{i}{2} \int ((F_A - F_{A_0}) \wedge \omega) + \int |\nabla_a \alpha| |D_A \beta| \quad (7.8)$$

Si on revient à l'équation (7.5) en remarquant que les trois derniers termes correspondent au produit scalaire L^2 de $D_A^2 \beta$ par β , c'est à dire la norme L^2 de $D_A \beta$, il vient

$$\int \frac{r}{2}|\alpha|^2|\beta|^2 + |D_A \beta|^2 \leq z \int |\nabla_a \alpha| |\beta| \leq z'.r^{-1} \int |\nabla_a \alpha|^2 \quad (7.9)$$

où z et z' désignent encore des constantes positives. Le terme $\int \frac{r}{4}|\alpha|^2|\beta|^2 \leq \frac{z'}{2}.r^{-1} \int |\nabla_a \alpha|^2$ peut donc être passé à gauche dans (7.8) lorsque r est assez grand, quitte à ajouter un facteur constant dans l'équation.

De plus pour tout $\epsilon > 0$ et pour une certaine constante z'' ,

$$\int |\nabla_a \alpha| |D_A \beta| \leq \frac{1}{2}(\epsilon \int |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{1}{\epsilon} \int |D_A \beta|^2) \leq \frac{\epsilon}{2} \int |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{z''}{\epsilon.r} \int |\nabla_a \alpha|^2$$

(à cause du lemme 7.4). En choisissant ϵ assez petit, pour r assez grand, ce terme peut donc être passé à gauche dans (7.8) quitte à ajouter un facteur constant.

On obtient donc pour une certaine constante positive M indépendante de r ,

$$\int |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{r}{4}(|\alpha|^2 - 1)^2 \leq M \int i(F_A - F_{A_0}) \wedge \omega = 4\pi M.c_1(E).\omega$$

On a donc le lemme suivant :

Lemme 7.6 - *L'intégrale $\int |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2)^2$ est bornée par $M.c_1(E).\omega$, où $M > 0$ ne dépend pas de r .*

Un fait remarquable est que ce lemme a de nombreuses conséquences directes dont les théorèmes qui sont prouvés dans [T1] et [T2], à savoir les résultats suivants :

Théorème 7.7 - Soit X une variété symplectique compacte orientée de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$. Alors les structures spin^c correspondant à $E = I$ et $E = K$ ont un invariant de Seiberg-Witten égal à ± 1 .

DÉMONSTRATION : On se place d'abord dans le cas $E = I$ (structure spin^c canonique). Le lemme 7.6 s'applique, or $c_1(E) = 0$, donc lorsque r est suffisamment grand, pour toute solution de l'équation (7.1), l'intégrale du lemme est nulle. Ceci implique qu'une solution vérifie nécessairement $|\alpha| \equiv 1$ et $|\nabla_a \alpha| \equiv 0$. Le lemme 7.4 implique alors que β est partout nul.

Par une transformation de jauge, on peut se ramener à $\alpha \equiv 1$ soit $\psi = r^{1/2}u_0$. La section α étant parallèle, la connexion ∇_a est alors la connexion triviale d sur I . Or la connaissance de ∇_a détermine A , donc $A = A_0$. En conséquence pour r assez grand, (7.1) admet une unique solution modulo jauge $(r^{1/2}u_0, A_0)$, et l'invariant de Seiberg-Witten vaut ± 1 .

Le résultat pour $E = K$ découle de la symétrie de la proposition 5.6. \square

Théorème 7.8 - Si une structure spin^c sur X a un invariant de Seiberg-Witten non nul, alors $0 \leq c_1(E).\omega \leq c_1(K).\omega$.

DÉMONSTRATION : Le membre de gauche du lemme 7.6 est toujours positif ou nul, donc s'il existe des solutions de (7.1), on a nécessairement $c_1(E).\omega \geq 0$. L'autre inégalité découle directement de la symétrie des invariants (proposition 5.6). \square

Une autre conséquence du lemme 7.6 est le résultat suivant :

Lemme 7.9 - La mesure m de l'ensemble des points où $|\alpha|^2 < \frac{1}{2}$ vérifie $m = O(r^{-1})$.

DÉMONSTRATION : m est la mesure de l'ensemble des points où $\frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2)^2 > \frac{r}{16}$, donc $m \leq \frac{16}{r} \int \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2)^2 \leq \frac{16M}{r}c_1(E).\omega$, ce qui donne la borne requise. \square

7.5 Formule de monotonie

On cherche à limiter d'une certaine façon l'ensemble des points où α s'annule. Pour cela on construit une fonctionnelle "énergie" qui est bornée sur X et dont on montre à l'aide d'une formule de monotonie qu'elle est grande au voisinage des zéros de α .

Lemme 7.10 - On pose $Q = \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2)$. Alors l'intégrale de Q sur X est bornée par une constante indépendante de r .

DÉMONSTRATION : La formule (7.7) peut être réécrite sous la forme suivante :

$$\int_X \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2) = \int_X |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2)^2 - \frac{r}{4}|\alpha|^2|\beta|^2 + \langle \alpha u_0, D_A^2 \beta \rangle$$

En utilisant le fait que l'opérateur de Dirac est formellement autoadjoint et le fait que $D_A(\alpha u_0) = -D_A\beta$, on obtient $\int_X Q \leq \int_X |\nabla_a \alpha|^2 + \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2)^2$. Le lemme 7.6 permet alors de conclure. \square

Pour prouver la formule de monotonie on aura besoin de la borne uniforme suivante sur la courbure F_a :

Lemme 7.11 - *En tout point la courbure F_a de la connexion ∇_a vérifie la borne*

$$|F_a| \leq \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2) + \mathcal{K}$$

où \mathcal{K} devient négligeable lorsque r est grand.

IDÉE DE DÉMONSTRATION : On a $|F_a|^2 = |F_a^+|^2 + |F_a^-|^2$. La norme de F_a^+ est directement bornée grâce à l'équation (7.1). En effet $F_a^+ = \frac{1}{8}\omega^\psi - \frac{i}{8}r\omega$, et en négligeant les termes en β , $\omega^\psi \cong |\alpha|^2\omega$, d'où en utilisant le fait que $|\omega| = \sqrt{2}$, la majoration $|F_a^+| \leq \frac{r}{4\sqrt{2}}(1 - |\alpha|^2) + \mathcal{K}^+$.

Pour obtenir une majoration sur F_a^- on remarque que par l'identité de Bianchi $dF_a = 0$ donc $d^*dF_a^- = -d^*dF_a^+$. En substituant l'équation (7.1) et en utilisant la formule de Weitzenböck, on obtient une inéquation différentielle sur $|F_a^-|$. Un long calcul basé sur une comparaison avec la solution d'une équation différentielle proche de cette inéquation permet, en utilisant le principe du maximum, de montrer l'inégalité voulue : $|F_a^-| \leq \frac{r}{4\sqrt{2}}(1 - |\alpha|^2) + \mathcal{K}^-$.

Le calcul donne la majoration $\mathcal{K} = O(r^{1/2}(1 - |\alpha|^2)) + O(1)$, ce qui est suffisamment petit pour permettre de prouver la formule de monotonie. Il est cependant à noter qu'une fois la formule de monotonie obtenue, il est possible d'affiner cette majoration, et d'obtenir la borne $\mathcal{K} = O(1)$. \square

Lemme 7.12 - *Il existe une constante $\lambda > 0$ (indépendante de r) telle que pour tout $s > 0$, pour r assez grand ($r > r_0(s)$), en tout point x où α s'annule, si on note $B(x, s)$ la boule de centre x et de rayon s , $\int_{B(x, s)} Q \geq \lambda s^2$.*

IDÉE DE DÉMONSTRATION : On note B la boule de centre x et de rayon s , et ∂B son bord. Soit $f(s) = \int_B Q$. On sait que $F_a \wedge \omega = \frac{1}{2}(F_A - F_{A_0}) \wedge \omega = \frac{ir}{4}(|\alpha|^2 - |\beta|^2 - 1)$ donc $f(s) = \int_B \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2) = \int_B (iF_a \wedge \omega) - \int_B \frac{r}{4}|\beta|^2$. De plus localement on peut écrire la forme symplectique comme $\omega = du$: par exemple dans des coordonnées locales s'annulant en x , on peut choisir $u = \frac{1}{2}(x_1.e_2 - x_2.e_1 + x_3.e_4 - x_4.e_3)$ à des termes quadratiques près, ce qui implique que dans la boule considérée u est de norme inférieure à $\frac{s}{2}$ (à un terme en s^2 près, qu'on peut négliger si s est assez petit). On a alors en utilisant la formule de Stokes et la borne obtenue sur F_a , $f(s) = \int_B (iF_a \wedge du) - \frac{r}{4} \int_B |\beta|^2 = \int_{\partial B} (iF_a \wedge u) - \frac{r}{4} \int_B |\beta|^2 \leq \frac{s}{2} \int_{\partial B} |F_a| - \frac{r}{4} \int_B |\beta|^2 \leq \frac{s}{2} \int_{\partial B} \frac{r}{4}(1 - |\alpha|^2) + \frac{s}{2} \int_{\partial B} \mathcal{K} - \frac{r}{4} \int_B |\beta|^2$.

On a donc montré que modulo le terme correctif \mathcal{K} (qui est cependant partiellement compensé par l'intégrale de $|\beta|^2$) on a $\int_B Q \lesssim \frac{s}{2} \int_{\partial B} Q$, soit $f(s) \lesssim \frac{s}{2} f'(s)$, ce qui implique que la fonction $s \rightarrow \frac{f(s)}{s^2}$ est croissante modulo des termes correctifs qui disparaissent quand r devient grand.

D'autre part, un calcul analogue à la preuve de la proposition 4.4 en tenant compte du terme de perturbation permet de montrer qu'on a uniformément $|\psi| = O(r^{1/2})$. En appliquant la formule de Weitzenböck à ψ et en exprimant les termes à partir des équations (7.1), on obtient une borne uniforme $|\nabla^*\nabla\psi| = O(r^{3/2})$. Pour r suffisamment grand, on considère alors un voisinage de taille $r^{-1/2}$ de x sur lequel on effectue un changement de métrique d'un facteur $r^{-1/2}$ pour ramener le rayon de la boule à une taille constante. Après changement d'échelle ψ est toujours borné par $O(r^{1/2})$, tandis que $\nabla^*\nabla\psi$ est divisé par r et devient borné par $O(r^{1/2})$.

Le théorème d'existence de paramétrix pour l'opérateur elliptique $\nabla^*\nabla$ entraîne l'existence d'un opérateur pseudo-différentiel d'ordre -1 P et d'un opérateur régularisant Q tels que $\nabla\psi = P(\nabla^*\nabla\psi) + Q\psi$. Or chacun de ces deux opérateurs induit une application continue $L^\infty \rightarrow L^p \rightarrow L_1^p$ pour tout p , et pour $p > 4$ l'inclusion $L_1^p \rightarrow L^\infty$ est continue, donc on obtient une borne uniforme $|\nabla\psi| \leq C|\nabla^*\nabla\psi| + C'|\psi|$. Le fait que les opérateurs convergent vers ceux qui correspondent à la boule unité de \mathbb{R}^4 plat implique que si r est assez grand, les constantes C et C' peuvent être choisies indépendantes de r . On en déduit que les dérivées premières de ψ après changement d'échelle sont bornées uniformément par un multiple uniforme de $r^{1/2}$. Avant changement d'échelle on avait donc $|\nabla_A\psi| = O(r)$, et donc $|\nabla_a\alpha| = O(r^{1/2})$.

On en déduit que si $\alpha(x) = 0$, alors dans une boule de centre x et de rayon $s_0 = K.r^{-1/2}$ on a $|\alpha|^2 \leq \frac{1}{2}$, donc $Q \geq \frac{r}{8}$. On a donc $\int_B Q \geq \frac{r}{8} \text{vol}(B) = K'.r^{-1}$. D'où on déduit que $\frac{f(s_0)}{s_0^2} \geq \lambda$, et en utilisant la propriété de croissance de $\frac{f(s)}{s^2}$ il vient que pour $s > s_0$ c'est à dire $r > \frac{K^2}{s^2}$, $\frac{f(s)}{s^2} \geq \lambda$, ce qui donne le résultat. \square

7.6 Convergence pour $r \rightarrow \infty$

Considérons une suite de solutions correspondant à une suite de paramètres r_n tendant vers l'infini. Pour chacune de ces solutions, le lieu des zéros de α_n est une surface Σ_n dans X . Pour tout $\delta > 0$, on peut recouvrir Σ_n par un nombre $N(\delta, n)$ de boules (de Σ_n) de rayon δ (pour la métrique induite par celle de X), de telle façon que chaque point appartienne à au plus k d'entre elles, où k est une constante qui ne dépend que de la dimension de l'espace recouvert (ici 2).

Pour n assez grand, le lemme 7.12 affirme que dans chacune de ces boules l'intégrale de Q est plus grande que $\lambda.\delta^2$, donc à cause de la propriété de recouvrement par au plus k boules, l'intégrale de Q sur la réunion des boules est minorée par $\frac{\lambda}{k}\delta^2 N(\delta, n)$. Or par le lemme 7.10, cette intégrale est majorée par une constante A , donc en notant $M = \frac{k.A}{\lambda}$ on a $N(\delta, n) \leq M.\delta^{-2}$. Cette majoration uniforme implique le résultat suivant :

Lemme 7.13 - *Les surfaces Σ_n possèdent une sous-suite convergente au sens de Hausdorff vers une partie fermée $\Sigma \subset X$ dont la dimension de Hausdorff est au plus 2.*

DÉMONSTRATION : En effet, pour chaque entier N , pour n assez grand, Σ_n

est contenu dans la réunion de $M.4^N$ boules de rayon 2^{-N} , dont on notera les centres $x_{n,N,i}$. Par compacité de $X^{M.4^N}$ il existe une sous-suite de paramètres $r_{\phi(n)}$ telle que pour chaque i , $x_{\phi(n),N,i}$ converge vers un certain $x_{N,i}$. Quitte à effectuer une extraction diagonale on peut supposer que la convergence a lieu pour tout N . On note alors $U(N) = \bigcup_i B(x_{N,i}, 2^{2-N})$. Il est facile de vérifier qu'on a toujours $U(N+1) \subset U(N)$. Il suffit alors de poser $\Sigma = \bigcap_N U(N)$. Le fait que $\dim \Sigma \leq 2$ découle directement de la construction. Σ est un fermé de X parce que c'est l'intersection des fermés $\overline{U(N)}$ à cause du fait que $\overline{U(N+1)} \subset U(N)$. \square

On va maintenant montrer que les formes de courbure convergent vers un courant holomorphe à support dans Σ . Pour cela on utilisera le lemme suivant, qui découle de l'étude locale des solutions et de leur comparaison avec les solutions sur un fibré trivial sur \mathbb{C}^2 :

Lemme 7.14 - *Il existe une constante C telle qu'en un point x dont la distance à $\alpha^{-1}(0)$ est d , on a $|F_a| = O(r \cdot \exp(-Cr^{1/2} \cdot d))$.*

Considérons maintenant la suite de courants sur X donnée par $F_n = \frac{iF_a}{2\pi}$ pour chaque solution. Cette suite est bornée au sens L^1 d'après les lemmes 7.10 et 7.11, en conséquence elle admet une sous-suite qui converge au sens des distributions vers un certain courant F . Les propriétés de F sont les suivantes :

Lemme 7.15 - *Le courant F est de type $(1,1)$, et son support est contenu dans Σ . De plus l'intégrale de F sur un disque suffisamment petit dont le bord ne rencontre pas Σ est invariante par homotopie, et sa valeur est un entier. Si de plus le disque considéré est l'image d'un plongement pseudo-holomorphe et rencontre Σ , cet entier est strictement positif.*

IDÉE DE DÉMONSTRATION : Le fait que le support de F soit contenu dans Σ découle directement du lemme 7.14. En effet soit μ une 2-forme à support disjoint de Σ . Si on note d la distance du support de μ à Σ , on sait que pour n assez grand le support de μ est à distance $d/2$ de Σ_n . La majoration du lemme 7.14 implique alors que $\int F_n \wedge \mu \rightarrow 0$, ce qui donne le résultat.

Pour montrer que F est de type $(1,1)$ c'est-à-dire J -invariant, il suffit de montrer que pour toute forme μ , $\int F_n \wedge (\mu - J\mu) \rightarrow 0$. Pour cela, à N fixé on utilise une partition de l'unité pour écrire $\mu = \mu_1 + \mu_2$ où μ_1 est à support dans $X - U(N+1)$ et μ_2 est à support dans $U(N)$. Les seuls termes non J -invariants de F_a sont les termes non diagonaux (i.e. orthogonaux à ω) de F_a^+ , dont la norme est bornée par $\frac{r}{2}|\alpha||\beta|$. On a donc, en utilisant l'inégalité de Hölder, $|\int F_a \wedge (\mu_2 - J\mu_2)| \leq \int_{U(N)} r|\alpha||\beta||\mu_2| \leq r \cdot \sup(|\alpha|) \cdot \sup(|\mu_2|) \cdot (\int_X |\beta|^2)^{1/2} \cdot \text{vol}(U(N))^{1/2}$. Or on a vu qu'un analogue de la proposition 4.4 permet de borner uniformément α indépendamment de r , et d'autre part la norme L^2 de β est $O(r^{-1})$ en utilisant les lemmes 7.4 et 7.6. Comme le volume de $U(N)$ tend par construction vers 0 quand N tend vers l'infini, on en déduit que $\int F_n \wedge (\mu_2 - J\mu_2)$ est aussi petit qu'on le souhaite, et ce indépendamment de n , à condition de choisir N assez grand. Par ailleurs une fois N fixé, $\int F_n \wedge (\mu_1 - J\mu_1)$ tend vers 0 lorsque n

tend vers l'infini parce que le support de F est contenu dans Σ . On en déduit le résultat voulu.

Le fait que l'intégrale de F sur un disque convenable soit bien définie et invariante par homotopie découle du fait que la courbure est une forme fermée. En effet soit une famille de disques, $\phi : D \times [0, 1] \rightarrow X$ telle que $\phi^{-1}(\Sigma)$ soit compact (c'est-à-dire que les points d'intersection avec Σ ne traversent pas le bord des disques). En utilisant l'identité de Bianchi ($dF_a = 0$) et la formule de Stokes, on a $\int_{D \times \{0\}} \phi^* F_n - \int_{D \times \{1\}} \phi^* F_n = \int_{\partial D \times [0, 1]} \phi^* F_n$. Par l'hypothèse de compacité de $\phi^{-1}(\Sigma)$, le bord $\phi(\partial D \times [0, 1])$ est à une distance $d > 0$ de Σ , donc de Σ_n pour n grand. Le lemme 7.14 implique alors que les intégrales de F_n sur les deux disques $\phi(D \times \{0\})$ et $\phi(D \times \{1\})$ diffèrent d'au plus un terme exponentiel qui tend vers 0 quand n devient grand. Ceci signifie que si on peut intégrer F sur les disques concernés, la valeur de l'intégrale ne change pas quand on déforme le disque (à condition que le bord ne traverse pas Σ).

Considérons un disque D dont le bord ne rencontre pas Σ (on dira qu'un tel disque est *admissible*). Le bord de D est à une distance $d > 0$ du fermé Σ , donc il est possible d'appliquer la remarque ci-dessus à une déformation suffisamment petite de D . Ceci entraîne qu'au terme correctif exponentiel près, pour ϵ assez petit, $\int_D F_n \cong \frac{1}{\pi \epsilon^2} \int_{V_\epsilon(D)} F_n \wedge *(dz \wedge \bar{d}z)$, où $V_\epsilon(D)$ désigne l'ensemble des points à distance inférieure à ϵ de D et où $dz \wedge \bar{d}z$ désigne un prolongement de la forme volume de D . La convergence de F_n vers F au sens des distributions entraîne donc celle de $\int_D F_n$, ce qui signifie qu'on peut intégrer F sur D .

Pour montrer que l'intégrale de F sur un disque admissible $D \subset X$ est un entier, on effectue la construction suivante. Soit D_0 le disque unité inclus dans la sphère S^2 , et $\phi : D_0 \rightarrow D$ permettant d'identifier les deux disques considérés. $\phi^* \nabla_a$ est une connexion sur un fibré en droites sur D_0 , dont la courbure près du bord de D_0 est petite d'après le lemme 7.14. Ceci implique qu'on peut étendre le fibré en droites et la connexion à tout S^2 , et ce de telle façon qu'en dehors de D_0 la courbure soit bornée par un multiple de $r \cdot \exp(-Cr^{1/2} \cdot d)$. L'intégrale sur S^2 de la courbure est égale à la classe de Chern du fibré ainsi construit, qui est un entier. On en déduit que $\int_D F_n$ est proche de cet entier, la différence des deux correspondant à l'intégrale de la courbure sur $S^2 - D_0$, ce qui est décroissant avec r de façon exponentielle. Par passage à la limite, $\int_D F$ est un entier.

Dans le cas où le disque D est pseudo-holomorphe, cet entier est positif ou nul. En effet la restriction de F_n à D est une 2-forme, donc un multiple de la forme volume : $F_n|_D = f \cdot \text{vol}$. En fait seule la partie de type (1,1) intervient, c'est-à-dire $\frac{1}{16\pi}(1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2)\omega + \frac{i}{2\pi}F_a^-$. On a donc $f \geq \frac{1}{16\pi}(1 - |\alpha|^2 + |\beta|^2) - \frac{1}{2\sqrt{2\pi}}|F_a^-|$. D'après la majoration de F_a^- vue au lemme 7.11, on a donc $f \geq -\frac{\mathcal{K}^-}{2\sqrt{2\pi}}$, où \mathcal{K}^- est borné par une constante. On en déduit que si le disque considéré est assez petit, $\int_D F_n \geq -\frac{1}{2}$. Comme cette intégrale converge pour $n \rightarrow \infty$ vers un entier, sa limite est donc positive ou nulle.

La preuve du fait que $\int_D F$ est strictement positive fait appel à la comparaison des solutions de (7.1) au voisinage du point considéré avec les solutions des équations correspondantes sur \mathbb{C}^2 ($\int_D F$ peut en fait être interprété comme

le nombre d'intersection de Σ avec D). □

7.7 Holomorphie de la limite

Soit D le disque unité de \mathbb{C} . Pour toute application admissible $\sigma : D \rightarrow X$ (c'est-à-dire telle que le bord de $\sigma(D)$ ne rencontre pas Σ) on dispose désormais d'un entier $I(\sigma) = \int_D \sigma^* F$ qui vérifie les propriétés suivantes :

- (1) Si $\sigma(D) \subset X - \Sigma$ alors $I(\sigma) = 0$.
- (2) Si σ_0 et σ_1 sont homotopes de façon admissible (c'est-à-dire sans que le bord des disques traverse Σ), alors $I(\sigma_0) = I(\sigma_1)$.
- (3) Si σ est admissible et $\theta : D \rightarrow D$ est une application propre de degré k , alors $I(\sigma \circ \theta) = k.I(\sigma)$.
- (4) Si $\sigma^{-1}(\Sigma)$ est contenu dans une union disjointe de disques $D_i \subset D$, et si on note $\theta_i : D \rightarrow D_i$ morphisme conforme et $\sigma_i = \sigma \circ \theta_i$, on a $I(\sigma) = \sum_i I(\sigma_i)$.
- (5) Si σ est un plongement pseudo-holomorphe dont l'image rencontre Σ , alors $I(\sigma) > 0$.

Ces propriétés suffisent à assurer que Σ est une courbe pseudo-holomorphe.

Pour cela on commence par remarquer que les propriétés (4) et (5) permettent d'obtenir une borne sur le nombre de composantes qui constituent l'intersection d'un disque pseudo-holomorphe donné $\sigma_0(D)$ avec Σ . D'autre part, en appliquant la propriété (2) à des déformations judicieuses, il est possible de décomposer en plusieurs parties les composantes non ponctuelles de l'intersection, tout en conservant la propriété de pseudo-holomorphie au voisinage des intersections. On obtient donc que presque tout disque pseudo-holomorphe proche du disque de départ ne rencontre Σ qu'en au plus $I(\sigma_0)$ points. On obtient alors le lemme suivant :

Lemme 7.16 - *Pour tout $x \in \Sigma$, pour un choix générique d'un repère complexe au voisinage de x , il existe un voisinage V de x , un entier m et une application continue ϕ d'un petit disque de \mathbb{C} dans l'espace $S^m \mathbb{C}$ des m -uplets non-ordonnés de points, tels que $\Sigma \cap V$ soit l'ensemble des points de coordonnées (ζ, w) tels que $\zeta \in \phi(w)$.*

On va maintenant montrer que Σ est une variété lipschitzienne en presque tout point. Pour cela on introduit les notations suivantes : on se fixe un rayon $\rho > 0$ et un point $x \in \Sigma$. Dans un repère complexe fixé en x , pour chaque droite complexe $\kappa \in \mathbb{C}\mathbb{P}^1$, on notera $\sigma_{\rho, \kappa}$ un plongement holomorphe dont l'image est un disque de rayon ρ centré en x , dont l'espace tangent en x est la droite κ . Il existe un ouvert dense $\Omega \subset \mathbb{C}\mathbb{P}^1$ tel que si $\kappa \in \Omega$, l'intersection du disque $\sigma_{\rho, \kappa}(D)$ avec Σ est finie. On note alors $n_\kappa(x) = I(\sigma_{\rho, \kappa})$ pour tout ρ suffisamment petit. De plus le fait que Σ est fermé implique que pour tout κ' proche de κ on a $n_{\kappa'}(x) \leq n_\kappa(x)$ (semi-continuité). Une direction κ est alors dite *stable* si pour tout κ' proche de κ on a $n_{\kappa'}(x) = n_\kappa(x)$. Les directions stables constituent un ouvert de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$, et cet ouvert est dense parce qu'au voisinage d'un κ donné l'infimum des $n_{\kappa'}(x)$ est atteint. Enfin on note $n(x) = \inf_{\kappa \in \Omega} n_\kappa(x)$, qui est également atteint. Le premier résultat est alors le suivant :

Lemme 7.17 - *Choisissons en $x \in \Sigma$ un repère complexe tel que la direction $\kappa_0 = (1 : 0) \in \mathbb{CP}^1$ soit stable. Alors l'application ϕ du lemme 7.16 est lipschitzienne en 0, c'est-à-dire que si le voisinage considéré est assez petit, il existe une constante $c > 0$ telle que pour w assez petit,*

$$\sup_{\zeta \in \phi(w)} |\zeta| \leq c \cdot |w|.$$

DÉMONSTRATION : Pour ρ assez petit, on a $\sigma_{\rho, \kappa_0}(D) \cap \Sigma = \{x\}$ et $I(\sigma_{\rho, \kappa_0}) = n_{\kappa_0}(x)$. Pour κ proche de κ_0 , la propriété (2) implique que $I(\sigma_{\rho, \kappa}) = I(\sigma_{\rho, \kappa_0}) = n_{\kappa_0}(x)$, qui d'après la stabilité de κ_0 est égal à $n_\kappa(x)$. Or si $\sigma_{\rho, \kappa}(D)$ rencontre Σ en un autre point que x , les propriétés (4) et (5) impliquent que $I(\sigma_{\rho, \kappa}) > n_\kappa(x)$ ce qui constitue une contradiction. Donc pour κ proche de κ_0 on a $\sigma_{\rho, \kappa}(D) \cap \Sigma = \{x\}$. Ceci signifie qu'au voisinage de x , on ne peut pas avoir $(\zeta : w)$ proche de $(1 : 0)$ dans \mathbb{CP}^1 , c'est-à-dire que ζ/w est borné ce qui est précisément le résultat. \square

Le même type d'argument en utilisant une famille plus grande de disques permet d'obtenir de façon générique ce résultat pour un voisinage de x au lieu du seul point x . Pour ce résultat, on dira qu'un point $x \in \Sigma$ est *régulier* si pour tout x' dans un voisinage de x on a $n(x') \geq n(x)$. En particulier un point vérifiant $n(x) = 1$ est régulier. Dans le cas contraire on dira que le point est *singulier*. On a alors :

Lemme 7.18 - *L'ensemble des points réguliers de Σ est un ouvert dense. De plus si x est un point régulier de Σ , il existe un repère complexe tel que sur un voisinage de x l'application ϕ du lemme 7.16 vérifie les propriétés suivantes :*

- 1) ϕ est à valeurs dans l'ensemble des m -uplets non-ordonnés dont les m composantes sont égales (c'est-à-dire que $\phi(w)$ ne comporte qu'un seul point).
- 2) ϕ est lipschitzienne.

Une conséquence immédiate de ce lemme est qu'il existe un ouvert dense de Σ qui a la structure d'une sous-variété lipschitzienne de X . Le lemme suivant constitue alors le coeur de l'argument :

Lemme 7.19 - *Soit $x \in \Sigma$ un point régulier. Alors il existe un voisinage de x dans Σ qui est un disque pseudo-holomorphe plongé.*

IDÉE DE DÉMONSTRATION : On part du résultat précédent. Pour w petit, $\phi(w)$ ne comporte qu'un point qu'on notera encore $\phi(w)$. Pour $w \neq 0$, on pose $\partial\phi(w) = \frac{\phi(w)}{w}$. Le but est de montrer que $\partial\phi$ admet une limite en 0, ce qui prouvera l'holomorphicité en x . Pour cela, supposons que ce ne soit pas le cas : alors il existe deux suites $a_{1,i}$ et $a_{2,i}$ qui convergent vers 0, telles que $\partial\phi(a_{1,i})$ converge vers une valeur $c_{1,\infty}$ et $\partial\phi(a_{2,i})$ converge vers une valeur $c_{2,\infty}$ distincte de $c_{1,\infty}$. On choisit alors des indices i et j suffisamment grands, et on pose $a_1 = a_{1,i}$, $a_2 = a_{2,j}$, $c_1 = \partial\phi(a_1)$ et $c_2 = \partial\phi(a_2)$. On considère alors le disque donné par les points de coordonnées $\sigma_0(\zeta) = \left(\frac{c_1 - c_2}{a_1 - a_2} \zeta^2 + \frac{c_2 a_1 - c_1 a_2}{a_1 - a_2} \zeta, \zeta\right)$ pour $|\zeta|$ inférieur à un certain ρ fixé. Ce disque rencontre Σ aux trois points distincts dont les coordonnées sont $(0, 0)$, $(\phi(a_1), a_1)$ et $(\phi(a_2), a_2)$.

Cependant les applications coordonnées ne sont rigoureusement pseudo-holomorphes qu'à l'origine (défaut d'identification de X au modèle de \mathbb{C}^2 plat), donc il faut perturber légèrement σ_0 pour obtenir une application σ pseudo-holomorphe. Toutefois si on a choisi les indices i et j suffisamment grands, de telle sorte que a_1 et a_2 soient très petits tandis que $c_2 - c_1$ reste grand, le disque perturbé rencontre toujours Σ en au moins trois points. A cause des propriétés (4) et (5) chacun de ces trois points contribue de façon positive au calcul de $I(\sigma)$, et de plus la régularité de x et la définition de n_κ impliquent que chacune de ces contributions est au minimum $n(x)$. On a donc $I(\sigma) \geq 3n(x)$.

D'autre part, σ est homotope à σ_0 qui est défini à partir d'un polynôme du second degré. Lorsque i et j tendent vers l'infini, a_1 et a_2 tendent vers 0 donc le coefficient de ζ dans ce polynôme devient négligeable devant le coefficient de ζ^2 . Si on a choisi i et j assez grand, le disque qu'on a considéré est donc homotope de façon admissible au disque $\sigma_1(D)$ où on a posé $\sigma_1(\zeta) = (\zeta^2, 0)$. La propriété (3) s'applique alors, et donne $I(\sigma_1) = 2n(x)$. Or par la propriété (2) on a $I(\sigma) = I(\sigma_1)$ ce qui constitue une contradiction. Donc $\partial\phi$ admet une limite en 0, et ϕ est pseudo-holomorphe. \square

Enfin, on a le résultat suivant :

Lemme 7.20 - *La surface Σ contient un nombre fini de points singuliers.*

La preuve, très longue et technique, se base sur la constatation que les propriétés telles que l'égalité de différentes composantes d'un m -uplet peuvent être vues comme l'annulation de certains polynômes symétriques en les composantes. En effet, en considérant le m -uplet comme l'ensemble des racines d'un polynôme de degré m sur \mathbb{C} (dont les coefficients sont les fonctions symétriques élémentaires), l'existence de deux composantes égales par exemple s'écrit comme l'annulation du discriminant du polynôme, c'est-à-dire l'annulation d'un polynôme en ses coefficients, donc d'un polynôme symétrique en les composantes du m -uplet. On peut prouver dans un premier temps à partir de cette constatation que l'ensemble des points singuliers est au plus dénombrable, puis montrer qu'il est fini.

Enfin, un argument similaire à celui qui intervient dans la preuve du lemme 6.6 permet de conclure qu'il n'y a en fait pas de singularités. Σ est donc effectivement une courbe pseudo-holomorphe.

Le dernier point à vérifier est que la classe fondamentale de Σ est bien le dual de $c_1(E)$. Or pour tout indice n , Σ_n est le lieu des zéros d'une section de E , donc sa classe fondamentale est le dual de la classe d'Euler de E qui est égale à $c_1(E)$. Par passage à la limite, c'est aussi le cas de Σ . On a donc construit à partir d'une structure spin^c ayant un invariant de Seiberg-Witten non nul une courbe pseudo-holomorphe dont la classe fondamentale est duale de $c_1(E)$, ce qui achève la preuve du théorème 7.2.

8 Conséquences

Le théorème 7.2 a de nombreux corollaires intéressants, quand on l'utilise en conjonction avec l'inégalité d'adjonction généralisée suivante (voir [KM]) :

Lemme 8.1 - *Soit X une variété compacte orientée de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$, et soit $e \in H^2(X, \mathbb{Z})$ tel que $e.e \geq 0$. Soit g le genre minimal d'une surface plongée dont la classe fondamentale est le dual de Poincaré de e . Alors pour toute spin^c -structure dont l'invariant de Seiberg-Witten est non nul, lorsque $g \geq 1$ on a $2 - 2g + e.e \leq -|c_1(L).e|$, et lorsque $g = 0$, $e.e \leq -|c_1(L).e|$.*

IDÉE DE DÉMONSTRATION : On commence par le cas où $e.e = 0$ et $g \geq 1$, qui est celui traité dans [KM] (lemme 9). Pour cela on considère une surface Σ dont la classe fondamentale est e , et on remarque que le fibré normal à Σ est de degré $e.e = 0$ donc trivial, $N\Sigma \cong \Sigma \times \mathbb{C}$. Si on identifie le fibré normal avec un voisinage tubulaire de Σ , le fibré en cercles correspondant aux vecteurs de norme 1 dans $N\Sigma$ fournit une sous-variété Y de X , de dimension 3, difféomorphe à $S^1 \times \Sigma$. Y coupe X en deux composantes. De plus un voisinage de Y (ce qui correspond à "épaissir" le fibré en cercles) est difféomorphe à $] - a, a[\times Y$.

On peut choisir une métrique sur X dont la restriction à ce voisinage est une métrique produit, correspondant à une métrique sur Σ pour laquelle la courbure scalaire est constante. Par déformation de la métrique on peut éloigner arbitrairement $\{-a\} \times Y$ de $\{a\} \times Y$ (dilatation du facteur "temporel"). On peut alors montrer (proposition 8 de [KM]) qu'il existe une solution des équations de Seiberg-Witten qui est invariante par translation sur le facteur temporel, et dont la connexion a une partie temporelle triviale.

Or si on normalise la métrique pour que l'aire de Σ soit égale à 1, la formule de Gauss-Bonnet implique que la courbure scalaire sur Σ est égale à $-2\pi(4g-4)$. La proposition 4.4 implique alors que la solution Φ invariante par translation, qui atteint son maximum par compacité de Y , vérifie $|\Phi|^2 \leq 2\pi(4g-4)$. Par la proposition 4.2, $|\omega^\Phi|^2 = 2|\Phi|^4$, donc $|\omega^\Phi| \leq 2\sqrt{2}\pi(4g-4)$ et donc $|F_A^+| \leq \sqrt{2}\pi(2g-2)$. Comme la connexion A a une partie temporelle triviale, F_A est le relevé d'une 2-forme sur Y , donc F_A^+ et F_A^- sont de même norme, et on obtient $|F_A| \leq 2\pi(2g-2)$.

Il vient donc à cause de la normalisation de l'aire de Σ ,

$$|c_1(L).e| = \left| \frac{i}{2\pi} \int_{\Sigma} F_A \right| \leq \frac{1}{2\pi} \sup |F_A| \leq 2g - 2$$

d'où le résultat.

Pour $g = 0$ on procède de même, mais la proposition 4.4 donne cette fois l'inégalité $|\Phi|^2 \leq 0$, et on obtient en fin de compte $c_1(L).e = 0$ et donc l'inégalité voulue.

Le passage au cas $e.e > 0$ s'effectue par une suite d'éclatements. On rappelle que l'éclaté X' d'une variété complexe X en un point s'obtient en remplaçant un voisinage de ce point difféomorphe à un ouvert de $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ par $\pi^{-1}(\Omega) = \{(x, p) \in \Omega \times \mathbb{C}\mathbb{P}^1, x \in p\}$ (où on voit un élément de $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ comme une droite de \mathbb{C}^2). La projection sur le premier facteur est bijective sauf au point où est

effectué l'éclatement (car un élément non nul de \mathbb{C}^2 appartient à une unique droite vectorielle), et au point-base la fibre est $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$. L'opération d'éclatement correspond à une somme connexe avec la variété $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, ce qui fait apparaître un nouveau générateur ϵ dans $H_2(X', \mathbb{Z})$ qui vérifie $\epsilon.\epsilon = -1$, et qui correspond à la classe fondamentale de la fibre $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$ au-dessus du point-base. ϵ est de plus orthogonal à l'image de $H_2(X, \mathbb{Z})$ puisque toute classe d'homologie de X peut être représentée par une courbe ne passant pas au point-base.

On effectue un éclatement de X en un point x_0 d'une courbe pseudo-holomorphe Σ de classe fondamentale e , et on note Σ' la courbe correspondante dans X' . La classe fondamentale de Σ' correspond à $e' = e \pm \epsilon$ (car l'intersection avec la fibre au-dessus de x_0 comporte comme seul point la tangente à Σ en x_0), et on a donc $e'.e' = e.e - 1$. De plus Σ' est difféomorphe à Σ , donc le genre reste le même : $g' = g$. Si on note c la classe de Chern du fibré en droites L , il faut montrer que les structures spin^c sur X' correspondant à $c + \epsilon$ et $c - \epsilon$ ont même invariant de Seiberg-Witten que la structure initiale. En effet, comme $(c \pm \epsilon).(e \pm \epsilon) = c.e \pm 1$, le résultat sur e est alors équivalent au résultat sur e' , ce qui permet de conclure par récurrence sur $e.e$.

Or comme $X' = X \# \overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, on peut choisir une métrique qui sur le col reliant X à $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$ coïncide avec la métrique produit sur $S^3 \times \mathbb{R}$. La courbure scalaire y étant alors positive, la proposition 4.4 implique que toute solution s'annule sur le col. D'autre part sur $\overline{\mathbb{C}\mathbb{P}^2}$, $b_2^+ = 0$, ce qui implique qu'une solution vérifie $F_A^+ = 0$ et donc $\omega^\Phi = 0$, et donc $\Phi = 0$. En conséquence les solutions sur X' correspondent aux solutions sur X . \square

On obtient alors les corollaires suivants.

Corollaire 8.2 - *Soit X compacte orientée symplectique de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$. Pour toute structure spin^c dont l'invariant de Seiberg-Witten est non nul, la dimension d dans la formule (4.3) (ou de façon équivalente (5.3)) est nulle.*

DÉMONSTRATION : On peut supposer que le fibré E associé à la structure spin^c n'est pas trivial, car le cas $E = I$ correspond à la structure canonique, dont on a vu à la section 5 qu'elle vérifie $d = 0$. Le théorème 7.2 fournit alors une courbe pseudo-holomorphe (non connexe) dont la classe fondamentale est duale de $c_1(E)$. Pour chacune de ses composantes le dual de la classe fondamentale sera noté e_i (on a $\sum e_i = c_1(E)$, et pour $i \neq j$, $e_i.e_j = 0$).

Envisageons d'abord les composantes vérifiant $e_i.e_i \geq 0$. La formule d'adjonction (6.1) donne $2 - 2g_i + e_i.e_i = -c_1(K).e_i$. Or si $g_i = 0$, l'inégalité d'adjonction généralisée appliquée à la structure spin^c canonique implique que $e_i.e_i = c_1(K).e_i = 0$, et en reportant dans (6.1) on obtient une contradiction. Donc on a $g_i \geq 1$, et en utilisant l'inégalité d'adjonction généralisée il vient $-c_1(K).e_i \leq -c_1(L).e_i$. Or $c_1(L) = 2c_1(E) - c_1(K)$, donc on obtient $c_1(E).e_i \leq c_1(K).e_i$.

Lorsque $e_i.e_i < 0$, on a $c_1(E).e_i = e_i.e_i \leq -1$, tandis que la formule d'adjonction donne $c_1(K).e_i = 2g_i - 2 - e_i.e_i \geq 0 - 2 + 1 = -1$, ce qui implique

qu'on a encore $c_1(E).e_i \leq c_1(K).e_i$. Donc chaque composante vérifie

$$-c_1(K).e_i + c_1(E).e_i \leq 0 \quad (8.1)$$

Par somme sur les composantes, il vient $c_1(E).c_1(E) \leq c_1(K).c_1(E)$, et donc par la formule (5.3), $d = -c_1(K).c_1(E) + c_1(E).c_1(E) \leq 0$. Comme SW est non nul, on a forcément $d \geq 0$, donc $d = 0$. \square

Corollaire 8.3 - *Soit X compacte orientée symplectique de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$, et E un fibré en droites non trivial tel que la structure spin^c associée a un invariant de Seiberg-Witten non nul. Alors le dual de Poincaré de $c_1(E)$ est la classe fondamentale d'une courbe symplectique plongée (éventuellement non connexe). De plus pour chacune des composantes de cette courbe, si on note g le genre et e le dual de la classe fondamentale, on a $g = 1 + e.e$.*

DÉMONSTRATION : La première partie du résultat est exactement le théorème 7.2. L'hypothèse de non-trivialité de E sert à assurer que la courbe obtenue n'est pas vide (puisqu sa classe fondamentale est alors non nulle).

Pour démontrer la seconde partie, on utilise la formule (8.1) qui affirme que $-c_1(K).e_i + c_1(E).e_i \leq 0$. Or le corollaire 8.2 affirme que $d = \sum(-c_1(K).e_i + c_1(E).e_i) = 0$, ce qui implique que pour chaque composante (8.1) est une égalité, c'est à dire $c_1(K).e_i = c_1(E).e_i = e_i.e_i$. La formule d'adjonction (6.1) s'écrit alors $2 - 2g_i + e_i.e_i = -c_1(K).e_i = -e_i.e_i$, d'où on déduit que $g_i = 1 + e_i.e_i$. \square

Corollaire 8.4 - *Soit X compacte orientée symplectique de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$. Alors le dual de Poincaré de $c_1(K)$ est représenté par une courbe symplectique. De plus, si X ne contient pas de sphère plongée de nombre d'intersection -1 , alors $c_1(K).c_1(K) \geq 0$.*

DÉMONSTRATION : Le théorème 7.7 affirme que pour $E = K$ l'invariant de Seiberg-Witten est non nul. La première partie du corollaire est alors une conséquence immédiate du résultat précédent.

Plaçons-nous désormais dans l'hypothèse de la seconde partie, et notons à nouveau, pour chaque composante de la courbe symplectique qu'on vient de construire, e_i le dual de la classe fondamentale et g_i le genre. Le corollaire 8.3 affirme que $g_i = 1 + e_i.e_i$, et l'hypothèse de non-existence de sphères plongées d'intersection -1 implique que $g_i \geq 1$, donc $e_i.e_i \geq 0$. Par somme sur les composantes, comme $e_i.e_j = 0$ dès que $i \neq j$ et $\sum e_i = c_1(K)$, il vient $c_1(K).c_1(K) \geq 0$. \square

Corollaire 8.5 - *Soit X compacte orientée symplectique de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$, et supposons que X ne contient pas de sphère plongée symplectiquement de nombre d'intersection -1 . Alors la signature de la forme d'intersection de X et les nombres de Betti de X vérifient $b_2^+ \geq \frac{4}{5}(b_1 - 1) + \frac{1}{5}b_2^-$.*

DÉMONSTRATION : Pour $E = K$, le théorème 7.7 affirme que pour $E = K$, l'invariant de Seiberg-Witten est non nul. La formule (5.3) implique que la dimension $d = -c_1(K).c_1(E) + c_1(E).c_1(E)$ est alors nulle. Or la formule (4.3) affirme que $d = -\frac{2\chi+3\sigma}{4} + \frac{1}{4}c_1(K).c_1(K)$, donc on a $2\chi + 3\sigma = c_1(K).c_1(K)$, et cette dernière valeur est positive par le corollaire 8.4. Donc on a $2\chi + 3\sigma \geq 0$, or $\chi = 2 - 2b_1 + b_2$, d'où l'inégalité voulue. \square

EXEMPLE D'APPLICATION : Considérons une surface K3, par exemple une surface algébrique Σ_4 de degré 4 dans $\mathbb{C}\mathbb{P}^3$. Σ_4 est une variété différentielle de dimension 4, compacte, orientable et simplement connexe. De plus Σ_4 est kählérienne, puisque c'est une variété algébrique. Considérons maintenant la somme connexe $X = \Sigma_4 \# \Sigma_4$, qui est toujours une variété de dimension 4, compacte, orientable et simplement connexe. Le résultat précédent implique que X n'admet pas de structure symplectique compatible avec l'orientation.

En effet, on sait (voir [DK]) que la forme d'intersection de Σ_4 peut se mettre sous la forme $2(-E_8) \oplus 3 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, où E_8 désigne l'unique forme quadratique unimodulaire paire irréductible définie positive de rang 8. La forme d'intersection de X est donc $4(-E_8) \oplus 6 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Supposons que X admette une structure symplectique. On a $b_2^+ = 6 > 1$, et à cause de la parité de la forme d'intersection les hypothèses du corollaire 8.5 sont satisfaites. On devrait donc avoir $b_2^+ \geq \frac{1}{5}(4b_1 - 4 + b_2^-) = \frac{1}{5}(-4 + 38) = \frac{34}{5} > 6$ ce qui constitue une contradiction. Cet exemple illustre donc le fait qu'une somme connexe de variétés symplectiques n'est pas nécessairement symplectique.

Remarquons toutefois qu'un tel résultat peut être dérivé de façon systématique du théorème 7.7. En effet, on a le résultat suivant ([T1], [KMT]) :

Proposition 8.6 - *Soit X compacte orientée symplectique de dimension 4, et supposons que X peut se décomposer en somme directe $X = X_1 \# X_2$. Alors la forme d'intersection sur l'un des deux facteurs X_1 ou X_2 est définie négative.*

Enfin, un dernier corollaire du théorème 7.2 est le résultat suivant.

Corollaire 8.7 - *Soit X compacte orientée symplectique de dimension 4 avec $b_2^+ \geq 2$, et supposons que X ne contient pas de sphère plongée symplectiquement de nombre d'intersection -1 . Supposons également que $c_1(K).c_1(K) = 0$. Alors pour tout fibré en droites E non trivial tel que la structure spin^c associée a un invariant de Seiberg-Witten non nul, $c_1(E)$ est le dual de Poincaré d'une réunion disjointe de tores symplectiquement plongés de nombre d'intersection 0.*

DÉMONSTRATION : On traite d'abord le cas où $E = K$. Pour cela on applique le corollaire 8.3 pour obtenir une courbe symplectique, dont chaque composante vérifie $g_i = 1 + e_i.e_i$. L'hypothèse faite sur X implique que $g_i \geq 1$, et donc $e_i.e_i \geq 0$. Or on a $\sum e_i.e_i = c_1(K).c_1(K) = 0$, donc on a pour chaque composante $e_i.e_i = 0$ et donc $g_i = 1$.

Pour traiter le cas général, on commence par appliquer l'inégalité d'adjonction généralisée (lemme 8.1) aux composantes de la courbe symplectique obtenue pour $c_1(K)$. Dans le cas $g_i = 1$ et $e_i \cdot e_i = 0$, le lemme 8.1 s'écrit $c_1(L) \cdot e_i = 0$. Par somme sur les composantes on a donc $c_1(L) \cdot c_1(K) = 0$. Comme $c_1(K) \cdot c_1(K) = 0$, on a donc $c_1(E) \cdot c_1(K) = 0$. Par le corollaire 8.2, $d = -c_1(K) \cdot c_1(E) + c_1(E) \cdot c_1(E) = 0$, donc $c_1(E) \cdot c_1(E) = 0$.

On applique alors le corollaire 8.3 pour obtenir une courbe symplectique dont chaque composante vérifie $g'_i = 1 + e'_i \cdot e'_i$. L'hypothèse faite sur X implique que $g'_i \geq 1$ et donc $e'_i \cdot e'_i \geq 0$. Or on a $\sum e'_i \cdot e'_i = c_1(E) \cdot c_1(E) = 0$ donc $e'_i \cdot e'_i = 0$ et $g'_i = 1$, d'où le résultat. \square

9 Bibliographie

9.1 Ouvrages de fond

- [DK] S.K. Donaldson, P.B. Kronheimer, *The Geometry of Four-Manifolds*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford, 1990.
- [LB] A. Lascoux, M. Berger, *Variétés kählériennes compactes*, Lecture Notes in Mathematics **154**, Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg, 1970.
- [LM] H.B. Lawson, M.L. Michelsohn, *Spin Geometry*, Princeton Mathematical Series **38**, Princeton Univ. Press, Princeton, 1989.
- [McS] D. McDuff, D. Salamon, *J-holomorphic Curves and Quantum Cohomology*, University Lecture Series **6**, American Mathematical Society, Providence, 1994.

9.2 Articles

- [F] T. Friedrich, *Neue Invarianten der 4-dimensionalen Mannigfaltigkeiten*, Seminar des SFB 288, 1995.
- [G] M. Gromov, *Pseudo-holomorphic Curves in Symplectic Manifolds*, Inventiones Math. **82** (1985), 307–347.
- [KM] P.B. Kronheimer, T.S. Mrowka, *The Genus of Embedded Surfaces in the Projective Plane*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 797–808.
- [KMT] D. Kotschick, J.W. Morgan, C.H. Taubes, *Four-Manifolds without Symplectic Structures but with Nontrivial Seiberg-Witten Invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 119–124.
- [T1] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten Invariants and Symplectic Forms*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 809–822.
- [T2] C.H. Taubes, *More Constraints on Symplectic Manifolds from Seiberg-Witten Equations*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 9–14.
- [T3] C.H. Taubes, *The Seiberg-Witten and Gromov Invariants*, Math. Res. Lett. **2** (1995), 221–238.
- [T4] C.H. Taubes, *SW \Rightarrow Gr : From the Seiberg-Witten Equations to Pseudo-Holomorphic Curves*, preprint, Harvard Univ., Cambridge.

[W] E. Witten, *Monopoles and 4-manifolds*, Math. Res. Lett. **1** (1994), 769–796.

Remerciements

Je tiens à remercier Jean Pierre Bourguignon pour son soutien constant, ainsi que Pierre Pansu et Cliff Taubes pour leur aide sur certains points délicats.