Mathématiques gonflables

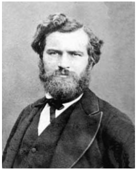
David Vogan

Université de Lorraine
8 juin, 2016

Outline

Les personnages de la pièce

Camille Jordan (1838–1922)



Hannibal Schubert (1848–1911)

François Bruhat (1929–2007)

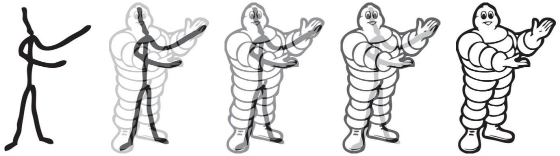
L'idée principale

Nous commençons par de l'algèbre linéaire : la résolution d'un système d'équations linéaires par l'élimination de Gauss-Jordan.

Idée : réduire le nombre de coordonnées

Établir un rapport entre l'algèbre et la géométrie des droites et des plans.

Idée : réduire le nombre de dimensions



Nous utilisons la même idée pour la géométrie plus compliquée.

L'élimination de Gauss-Jordan : les cas faciles

Soient trois équations à trois inconnues

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & c_1 \\ a_{21}'x_1 & + & a_{22}x_2 & + & a_{23}x_3 & = & c_2' \\ a_{31}x_1 & + & a_{32}x_2 & + & a_{33}x_3 & = & c_3 \end{array}$$

Supposons toujours qu'il n'y a qu'une seule solution.

Le cas le plus simple est le cas diagonal : diviser chaque équation par une constante pour résoudre.

Ensuite la plus simple est triangulaire inférieure : ajouter des multiples de certaines équations à celles en-dessous pour résoudre.

Soit le système triangulaire inférieure SAUF que le coefficient $a_{12} \neq 0$. Ajouter un multiple de la première équation à la deuxieme pour obtenir...

Ce système est presque triangulaire inférieure, à l'exception que les deux premières équations sont interverties.

L'élimination de Gauss-Jordan : le cas typique

Le système typique de trois équations est

$$\begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & a_{13}x_3 & = & c_1 \\ a_{21}{}'x_1 & + & a_{22}{}'x_2 & + & a_{23}x_3 & = & c_2{}' \\ a_{31}{}''x_1 & + & a_{32}{}'x_2 & + & a_{33}x_3 & = & c_3{}'' \end{array}$$

avec (typiquement) $a_{13} \neq 0$. Ajouter des multiples de la 1re équation aux suivantes pour obtenir…

avec (typiquement) $a_{22}{}' \neq 0$. Ajouter un multiple de la deuxième équation à la troisième pour obtenir…

Ce dernier système est à nouveau presque triangulaire inférieure, à l'exception que l'ordre des trois équations est inversé.

S'il y a plus d'équations, on utilise la notation matricielle. Soient $A = (a_{ij})$ la matrice des coéfficients, et $\mathbf{x} = (x_j)$ le vecteur colonne d'inconnues.

Le théorème d'élimination de Gauss-Jordan

Théorème

Soit A une matrice $n \times n$ inversible, et $\mathbf{c}$ un n-uplet de constantes. Considérons le système de n équations à n inconnues

$$A\mathbf{x} = \mathbf{c}.$$

En utilisant les deux opérations

la multiplication d'une équation par une constante non nulle, et

l'ajout d'un multiple d'une équation à une équation suivante

nous transformons ce système en un nouveau

$$A'\mathbf{x} = \mathbf{c}'.$$

Le nouveau système est, à permutation près, triangulaire inférieure.

Les possibilités pour trois inconnues

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (321)$$

$$a_{13}\neq 0,\ \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}\neq 0$$

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (312)$$

$$a_{13}=0,\ a_{12}\neq 0,\ a_{23}\neq 0$$

$$\begin{pmatrix} * & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (231)$$

$$\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}=0,\ a_{13}\neq 0$$

$$\begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (213)$$

$$a_{13}=a_{23}=0,\ a_{12}\neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (132)$$

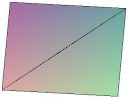
$$a_{12}=a_{13}=0,\ a_{23}\neq 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (123)$$

$$a_{12}=a_{23}=a_{13}=0$$

De l'algèbre à la géométrie

Un drapeau en 3 dimensions est la donnée de :
l'origine sur une droite dans un plan :



Un seul drapeau n'a pas grand intérêt. Ce qui nous intéresse est de savoir combien il y a de drapeaux, et comment ils sont liés.

Un système de 3 équations $\leftrightsquigarrow$ une matrice $\rightsquigarrow$ un drapeau :
la droite $=$ multiples de la 1$^{\text{re}}$ ligne de la matrice,
le plan $=$ combinaisons linéaires des deux 1$^{\text{res}}$ lignes

deux matrices $\leftrightsquigarrow$ même drapeau $\iff$ liées par

- *multiplier une ligne par une constante non nulle, et*
- *ajouter un multiple d'une ligne à une ligne suivante.*

Les drapeaux $L \subset P$ possibles

$$
\begin{tikzcd}
 & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (321) \\ P_{xy} \not\supset L' \subset P' \not\supset L_x \end{array} & \\
\begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ * & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (312) \\ P_{xy} \supset L \subset P' \not\supset L_x \end{array} \arrow[ur] & & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & * & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (231) \\ P_{xy} \not\supset L' \subset P \supset L_x \end{array} \arrow[ul] \\
\begin{array}{c} \begin{pmatrix} * & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (213) \\ L_x \neq L \subset P_{xy} \end{array} \arrow[u] & & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & * & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (132) \\ L_x \subset P \neq P_{xy} \end{array} \arrow[u] \\
 & \begin{array}{c} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (123) \\ L_x \subset P_{xy} \end{array} \arrow[ul] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

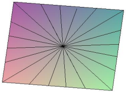
La vue géométrique

Remonter le diagramme $\rightsquigarrow$ géométrie plus complexe

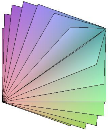
se déplacer suivant une étape bleue $\rightsquigarrow$ droite variable $\subset$ plan fixe

se déplacer suivant une étape rouge $\rightsquigarrow$ plan variable $\supset$ droite fixe

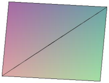
Les mathématiques gonflables : remplacer les points par les cercles.



$L_x \neq L \subset P = P_{xy}$



$L_x \subset P \neq P_{xy}$



$L_x \subset P_{xy}$

Qu'est-ce qu'une variété de Schubert ?

Nous avons reparti les drapeaux (en trois dimensions) en six *cellules de Bruhat* selon leur relation avec le drapeau standard $L_x \subset P_{xy}$.

Une variété de Schubert est une cellule puis tout en dessous :

$$\begin{tikzcd}
L' \subset P',\ L \subset P' \cap P_{xy} \arrow[dr] & & L' \subset P',\ P \supset L' + L_x \arrow[dl] \\
& P_{xy} \not\supset L' \subset P' \not\supset L_x & \\
P_{xy} \supset L \subset P' \not\supset L_x \arrow[uu, "L \rightsquigarrow L' \subset P'"'] \arrow[ur] & & P_{xy} \not\supset L' \subset P \supset L_x \arrow[uu, "P \rightsquigarrow P' \supset L'"'] \arrow[ul] \\
L_x \neq L \subset P_{xy} \arrow[u, "P_{xy} \rightsquigarrow P' \supset L"'] & & L_x \subset P \neq P_{xy} \arrow[u, "L \rightsquigarrow L' \subset P"] \\
& L_x \subset P_{xy} \arrow[ul, "L_x \rightsquigarrow L \subset P_{xy}"'] \arrow[ur, "P_{xy} \rightsquigarrow P \supset L_x"'] &
\end{tikzcd}$$

Chaque variété de Schubert est presque gonflée à partir d'une plus petite, en remplaçant chaque point par un cercle.

Cela échoue seulement tout en haut. . .

Sachant aussi peu que possible

Pour calculer avec des variétés de Schubert, il ne faut qu'un diagramme de flèches rouges et bleues, décrivant la façon dont les petites variétés de Schubert sont gonflées.

$$\begin{tikzcd}
 & (321) & \\
(312) \arrow[ur, blue] & & (231) \arrow[ul, red] \\
(213) \arrow[u, red] & & (132) \arrow[u, blue] \\
 & (123) \arrow[ul, blue] \arrow[ur, red] &
\end{tikzcd}$$

Les permutations $\leftrightsquigarrow$ les emplacements des pivots de Gauss

Les règles de la construction de ce diagramme :

1. Un sommet pour chaque permutation de $\{1, 2, 3\}$.
2. Un échange $1 \leftrightarrow 2$: une flèche bleue vers le haut
3. Un échange $2 \leftrightarrow 3$: une flèche rouge vers le haut

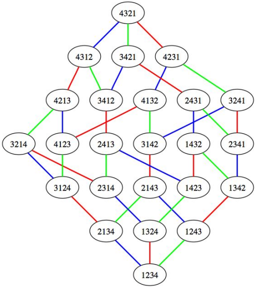
Autant de dimensions que vous souhaitez

Les règles à n dimensions :

1. un sommet pour chaque permutation de $\{1, 2, \ldots, n\}$.
2. chaque échange $i \leftrightarrow i+1$: une flèche de couleur i vers le haut.

Problèmes de dénombrement de ce diagramme $\leftrightsquigarrow$ géométrie des variétés de Schubert.

Il y a beaucoup de jeux à jouer.



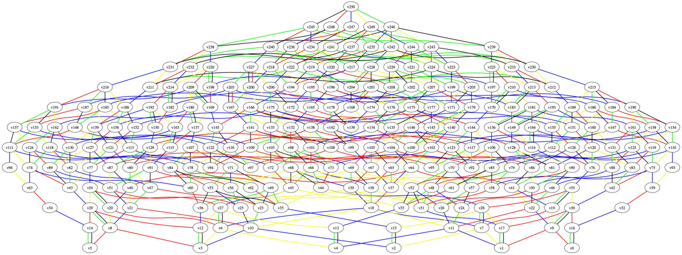
la hauteur d'une permutation $=$ le nombre de paires inversées.

le nombre de permutations à la hauteur $d =$ le coéfficient de x^d dans

$$(1)(1+x)(1+x+x^2)\cdots(1+x+\cdots x^{n-1}).$$

Les groupes plus complexes

Le diagramme ci-dessus (avec $n!$ sommets) est pour le groupe de matrices inversibles $n \times n$. Les mathématiciens et les physiciens considèrent beaucoup d'autres groupes. . .



Chaque groupe réductif $\rightsquigarrow$ un diagramme décrivant le gonflage des petites variétés de Schubert dans les plus grandes. Ce diagramme $\leftsquigarrow$ le groupe $SO(5, 5)$, de dimension 45.

Pour ce groupe on a 251 variétés de Schubert : chaque flèche $\leftrightsquigarrow$ remplacer des points par des cercles.

Que fait-on avec ces jolies images ?

Notre point de départ

les systèmes de n éqs linéaires $\overset{\text{pivots de Gauss}}{\leftrightsquigarrow}$ le groupe $GL(n) \leftrightsquigarrow$ les variétés de Schubert $\leftrightsquigarrow$ un diagramme de $n!$ sommets, et flèches de $n-1$ couleurs.

Le diagramme $\rightsquigarrow$ comment les équations changent au cours de l'élimination de Gauss-Jordan.

De même :

un problème de maths ou de physique $\overset{\text{théorie des représentations}}{\leftrightsquigarrow}$ un groupe réductif $G \leftrightsquigarrow$ les variétés de Schubert pour $G \leftrightsquigarrow$ un diagramme fini pour le gonflage.

1979 : David Kazhdan (Harvard) et George Lusztig (MIT) ont montré comment répondre à des questions de la théorie des représentations en calculant dans ce diagramme fini.

Ils ont défini les polynômes de Kazhdan-Lusztig $P_{x,y}$ pour toute paire x et y de sommets du diagramme.

$P_{x,y} \neq 0$ seulement si y est au-dessus de x dans le diagramme. Le calcul de $P_{x,y}$ est une récursion basée sur la connaissance de tous les $P_{x',y'}$ pour $y' \leq y$.

Guide pratique

Fixons un groupe réductif G et son diagramme de variétés de Schubert.

Pour chaque paire (x, y) de sommets du diagramme, nous voulons calculer le polynôme KL $P_{x,y}$.

Par induction sur y, du bas vers le haut du diagramme :

Pour chaque y, commencer par $x = y$ et travailler vers le bas.

Soit une flèche en haut de $\overset{x'}{\overset{|}{x}}$ de la m̂ couleur qu'une fléche en bas de $\underset{y'}{\underset{|}{y}}$.

Si elle existe, alors $P_{x,y} = P_{x',y}$ (qui est connu par induction).

Si elle n'existe pas, alors (x, y) est primitive : aucune couleur en bas de y est en haut de x

C'est un calcul difficile pour chaque paire primitive (x, y).

Le calcul pour une paire primitive (x, y)

le sommet supérieure $y \leftrightsquigarrow$ une grande variété de Schubert F_y.

le sommet inférieure $x \leftrightsquigarrow$ une petite variété de Schubert F_x.

le polynôme $P_{x,y} \leftrightsquigarrow$ la géométrie de F_y autour de F_x.

Choisir une flèche en bas de $\begin{matrix} y \\ | \\ y' \end{matrix}$; cela signifie que

$F_y \approx$ le gonflage de $F_{y'}$.

(x, y) primitive $\leftrightsquigarrow$ la flèche rouge $\begin{matrix} x \\ | \\ x' \end{matrix}$ est également en bas de x.

On traduit la géométrie en algèbre : $P_{x,y} \approx P_{x',y'} + qP_{x,y'}$. Plus précisément :

$$P_{x,y} = P_{x',y'} + qP_{x,y'} - \sum_{x' \leq z < y'} \mu(z, y') q^{(l(y')-l(z)-1)/2} P_{x',z}.$$

La formation de l'équipe *Atlas*

Entre 1980 et 2000, des programmes de plus en plus sophistiqués calculent certains types de polynômes de Kazhdan-Lusztig.

Aucun n'a traité les difficultés liées aux groupes réductifs réels.

En 2001, Jeff Adams de l'Université du Maryland a suggéré que les ordinateurs et les mathématiques avaient avancé assez loin pour commencer un travail intéressant dans cette direction.

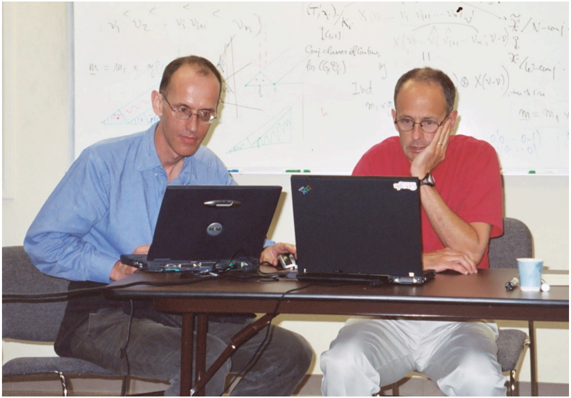
Adams a formé l'équipe de recherche *Atlas* visant à produire des logiciels pour rendre largement accessible de vieilles mathématiques, et à découvrir de nouvelles mathématiques.

Un premier objectif était de calculer les polynômes de Kazhdan-Lusztig pour les groupes réductifs réels.

Comment programmer un ordinateur pour le faire ?

En juin 2002, Jeff Adams a sollicité Fokko du Cloux.

En novembre 2005, Fokko a complété le logiciel. N'était-ce pas facile ?



En 2006, Jeff a proposé de calculer les polynômes KL pour le groupe de Lie exceptionnel E_8 de dimension 248.

Qu'est-ce que l'ordinateur doit faire ?

TÂCHE	DEMANDE sur l'ORDINATEUR
faire le diagramme : 453060 sommets, huit flèches à chacun	250Mo de RAM, 10 minutes (logiciel actuel : 30 secondes)
énumérer toutes les paires primitives de sommets : 6083626944	450Mo RAM, 5 secondes
calculer le polynôme pour chaque paire primitive	chercher quelques kilo-octets de mémoire, effectuer quelques milliers d'opérations entières $\times$6 milliards
rechercher le polynôme en mémoire, l'ajouter s'il est nouveau	$4\ \frac{\text{octets}}{\text{coéfficient}} \times 20\ \frac{\text{coéfficients}}{\text{polynôme}} \times\ ??$ polynômes
inscrire le nombre du polynôme dans un tableau	25 gigaoctets RAM

LE GRAND INCONNU : le nombre de polynômes.
Nous espérions : 400 millions $\rightsquigarrow$ 75 gigaoctets.
Nous craignions : 1 milliard $\rightsquigarrow$ 150 gigaoctets.

La fin de toutes choses

11/06 Des tests par Birne Binegar sur l'ordinateur `sage` de William Stein $\rightsquigarrow$ nous aurions besoin de 150 gigaoctets RAM.

28/11/06 Nous nous sommes renseignés sur l'utilité d'un ordi à 150 Go en maths.

30/11/06 Noam Elkies : nous n'en avons pas besoin. . .

$$\text{Un calcul de 150 Go} \xrightarrow{\left(\substack{\text{arithmétique}\\ \text{modulaire}}\right)} \text{quatre calculs de 50 Go}$$

03/12/06 Marc van Leeuwen ajoute l'arithmétique modulaire au logiciel.

19/12/06 Le calcul mod 251 sur `sage`. Cela a pris 17 heures :

```
Temps écoulé = 62575s. Fini á l = 64, y = 453059
d_store.size() = 1181642979, prim_size = 3393819659

VmData: 64435824 kB
```

Écrire le résultat sur le disque : deux jours. Enquête : bug dans la routine de sortie. Résultats mod 251 invalides.

La Grande Tribulation (suite)

21/12/06 21 :00 Démarrage du calcul mod 256 sur `sage`. Suite à calculer 452.174 des 453.060 lignes des polynômes KL en 14 heures, `sage` a planté.

22/12/06 LE SOIR Redémarrage mod 256. Fini en 11 heures.

(hip, hip, HOURRA ! hip, hip, HOURRA ! `pthread_join(acclamation[k], NULL);`) :

```
Temps écoulé = 40229s. Fini á l = 64, y = 453059
d_store.size() = 1181642979, prim_size = 3393819659

VmData: 54995416 kB
```

23/12/06 Démarrage du calcul mod 255 sur `sage`, qui s'est planté.

`sage` est resté planté jusqu'à 26/12/06 (en raison d'une fête locale à Seattle).

Nous avons mod 256. . .

26/12/06 sage a été redémarré. Polynômes KL mod 255 écrits sur disque.

27/12/06 Démarrage du calcul mod 253. A mi-chemin, sage a planté.

Les experts nous affirment que la cause n'a probablement pas été le Sasquatch (Yéti américain).

Ai-je mentionné que sage se trouve à Seattle ?

Nous avons décidé de ne plus abuser de sage pendant un an.

3/1/07 Les membres de l'équipe Atlas ont vieilli d'une année $\rightsquigarrow$ l'équipe est trente ans plus sage $\rightsquigarrow$ il est plus sûr de retourner au travail.

Polynômes KL mod 253 écrites sur disque. (12 heures).

Nous avions les calculs mod 253, 255, 256.

Théorème des restes chinois (TRC)

donne le calcul mod 253·255·256 = 16.515.840.

Un petit calcul pour chacun des 13 milliards de coefficients.

Les restes chinois

4/1/07 Marc van Leeuwen lance son logiciel TRC. Un compteur à l'écran affiche le numéro du polynôme : 0, 1, 2, 3,...,1181642978. Cela se révèle être une mauvaise idée.

5/1/07 LE MATIN Relancement du calcul TRC, avec compteur 0, 4096, 8192, 12288, 16536,...,1181642752, 1181642978.

Cela a bien fonctionné jusqu'à ce que `sage` ait planté.

William Stein (notre héros !) a remplacé le disque dur avec un autre contenant des fichiers de sauvegarde de nos 100 gigaoctets de calculs.

5/1/07 L'APRÉS-MIDI Re-relancement du calcul TRC.

6/1/07 07 :00 Le fichier de sortie était de 7 Go trop grand : BUG dans la routine de sortie.

7/1/07 02 :00 Marc a trouvé le BUG. Il a eu lieu seulement après le polynôme 858993459 ; nous avions testé jusqu'au polynôme 100000000.

7/1/07 06 :00 Re-re-relancement du calcul TRC.

Qui a jamais pu sonder les profondeurs de l'abîme ?

8/1/07 09 :00 Fin de l'écriture sur le disque des polynômes pour E_8.

Alors, quel est le point ?

En automne 2004, Fokko du Cloux se trouvait au MIT avec un collègue du groupe Atlas, Dan Ciubotaru. Fokko était à mi-parcours de l'écriture du logiciel dont je vous ai parlé : le point où ni la fin du tunnel, ni le début n'était visible depuis longtemps.

À la fin d'un week-end de mathématiques, Dan dit : « Fokko, regardes-nous. Nous passons le dimanche tout seul au travail ».

Fokko fut surpris, mais pas bouche bée :
« Je ne sais pas pour toi, mais je m'amuse comme un fou ! »

Fokko du Cloux
20 décembre 1954–10 novembre, 2006